



Чарльз Дарвин (*Nature*, 20 ноября 2008).

The University of Auckland

Devoted to the Darwin anniversary

Charles Robert Darwin (February 12, 1809–April 19, 1882)

Sh.U. Galiev

**Charles Darwin's geophysical reports
as models of the theory
of catastrophic waves**

Auckland

Посвящено 200-летию юбилею Дарвина
Чарльз Роберт Дарвин (12 февраля 1809–19 апреля 1882)

Ш.У. Галиев

Геофизические сообщения
Чарльза Дарвина
как модели теории
катастрофических волн

Перевод с английского Т.Г. Валиуллиной

Москва
Центр современного образования
2011

УДК 550.3:001.89
ББК 26.234.7
Г15



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 10-01-07054-Д

Галиев Ш.У.

Г15 Геофизические сообщения Чарльза Дарвина как модели теории катастрофических волн. — М.: Центр современного образования, 2011. — 656 с.: ил.

ISBN 978-5-904403-06-5

Вместе с 200-летием со дня рождения Чарльза Дарвина 2009 год ознаменован также 170-летием публикации его книги *Журнал Исследований*, широко известной также как *Путешествие на Бигле*. Во время путешествия Дарвин оказался в Вальдивии и Консепсьоне, Чили, как раз перед, во время и после сильного землетрясения 1835 года.

Предлагаемая вниманию читателя книга имеет целью подчеркнуть приоритет Дарвина в описании и анализе результатов сильных землетрясений. Представлены извлечения из его дневника, а также книг, в частности, *Журнал Исследований* и *Автобиография Чарльза Дарвина*. Материал извлечений группируется так, чтобы читатель мог проследить развитие мыслей и идей Дарвина, связанных с катастрофическими землетрясениями. Затем эти идеи анализируются и сравниваются с современными экспериментальными и теоретическими данными.

Принимая во внимание ключевые идеи Дарвина, в книге строятся математические модели природных катастрофических явлений. При их описании используется метод Лагранжа. Моделируется данное Дарвином описание эволюции цунами в прибрежных водах. В последней части исследуется применимость развитых подходов к изучению других случаев возникновения катастрофических волн, а также исследуется эволюция их в вихри. Может быть спиралевидные галактики — всего лишь след эволюции катастрофических волн, прокатывавшихся по ранней Вселенной?

УДК 550.3:001.89
ББК 26.234.7

ISBN 978-5-904403-06-5

© Ш.У. Галиев, 2011
© Центр современного образования, 2011

Оглавление

Обращение к российским читателям книги профессора Г.Д. Маллинсона	15
От научного редактора книги.	17
Предисловие: несколько слов о Чарльзе Дарвине, его исследованиях и содержании книги	19
Литература	39
ЧАСТЬ I. ЧАРЛЬЗ ДАРВИН И ЧИЛИЙСКОЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ 1835 ГОДА. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И СОВРЕМЕННЫЕ НАУЧНЫЕ ДАННЫЕ	
1. Введение	43
1.1. Экстремальные вертикальные колебания земли при землетрясениях	44
1.2. Особенности разрушения слабосвязных слоев осадочных пород при экстремальных вертикальных колебаниях	46
1.3. Неустойчивость земной коры и связь сейсмических и вулканических явлений	51
2. Извлечения из некоторых публикаций Чарльза Дарвина и его основные геофизические идеи	53
2.1. Некоторые геологические и исторические сведения, связанные с путешествием Дарвина	53
2.2. Извлечения из материалов Дарвина, описывающих путешествие военного корабля <i>Бигль</i>	54
2.3. Извлечения из книги <i>Журнал Исследований</i>	59
2.4. Извлечения из книги <i>Автобиография Чарльза Дарвина</i>	63
2.5. Дарвин о землетрясениях, поднятии земной поверхности, вулканических извержениях и катастрофических океанских волнах	66
2.5.1. Чилийское землетрясение 1835 г. — часть одного большого явления	67
2.5.2. Земля как глобальная сейсмическая система	69
2.5.3. Поднятие земли, вызванное землетрясением	73
2.5.4. Топографический эффект.	75

2.5.5. Запускающий механизм вулканических извержений по Дарвину.	76
2.5.6. Цунами, гигантские океанические волны и резонансное усиление сейсмических волн в слоях осадочных пород.	80
3. Сообщения Дарвина о катастрофических природных волновых явлениях и современные научные данные	83
3.1. Введение	83
3.2. Поднятие земли и сильно-нелинейный топографический эффект.	83
3.2.1. Некоторые физические механизмы опускания и поднятия земли.	84
3.2.2. Разрыхление верхних слоев из-за сильно-нелинейных волновых явлений	88
3.2.3. Топографический эффект: экстремальные колебания холма Тарзана	92
3.2.4. Топографические эффекты: подъем и разрушение вершин горных хребтов.	95
3.2.5. Топографический эффект: подъем и разрушение поверхности островов	100
3.3. Обсуждение идеи Дарвина о близкой связи между вулканическими и сейсмическими силами	103
3.3.1. Разрушение кратера — механизм, инициирующий крупномасштабные вулканические извержения	104
3.3.2. Поверхностные волны в кратере и кратковременные вулканические извержения.	110
3.3.3. Кратковременные выбросы из кратеров	114
3.3.4. Обсуждение вызванных землетрясением вулканических извержений	119
3.4. Цунами от прибрежного землетрясения и их описание Дарвином	121
3.4.1. Эффект прибрежного дна на образование катастрофического цунами.	122
3.4.2. Эффект прибрежного дна на отлив океана и крутой фронт цунами	125
3.4.3. Дарвин об обрушениях и лавинах, вызывающих цунами	127
3.5. Катастрофические океанские волны, моретрясение и нестационарная кавитация	129
3.6. Усиление конвульсии землетрясения. Влияние геологии и рельефа	132
3.7. Дарвин и одна из теорий горообразования	134

3.8. Катастрофические землетрясения и цунами последних двух лет . . .	140
3.9. Заключение	144
Литература	150

ЧАСТЬ II. ОПИСАНИЕ КАТАСТРОФИЧЕСКИХ

ОКЕАНСКИХ ВОЛН И ЦУНАМИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА . . .	159
---	-----

4. Введение	160
4.1. Несколько исторических замечаний	160
4.2. Описание нелинейности	161
4.3. Переменные Лагранжа	162

5. Лагранжева форма двумерных уравнений гидродинамики:

уравнения равновесия, граничные условия и вывод сильно-нелинейного основного уравнения	164
---	------------

5.1. Исходные уравнения	164
5.2. Граничные условия	166
5.3. Выражение для давления и основное сильно-нелинейное волновое уравнение	168
5.4. Двухмерные (2D) сильно-нелинейные волновые уравнения для вязкой жидкости	169
5.4.1. Аппроксимация вертикального перемещения	169
5.4.2. Двухмерное (2D) волновое уравнение типа Эйри	170
5.4.3. Обобщение линейного уравнения Грина-Нагди	174

6. Осреднение по глубине. Модельные уравнения океанских волн . . .

6.1. Степенная аппроксимация вертикального смещения	177
6.2. Сильно-нелинейные волновые уравнения для случая степенной аппроксимации	178
6.2.1. Трехскоростные варианты сильно-нелинейного волнового уравнения.	180
6.3. Резонансное взаимодействие гравитационных и капиллярных эффектов в поверхностной волне	182
6.4. Линейное двухскоростное волновое уравнение и эффект дисперсии	183
6.5. Кубические и квадратные нелинейные уравнения для гравитационных волн на воде умеренной глубины	185
6.6. Нелинейное уравнение для гравитационных волн в океане конечной глубины	187
6.6.1. Кубические и квадратные нелинейные уравнения для гравитационных волн в глубоком океане	190

6.7. Теория длинных волн для идеальной и вязкой моделей жидкости	192
6.7.1. Сильно-нелинейные волновые уравнения	192
6.7.2. Уравнение Эйри	195
6.7.3. Волновые уравнения теории длинных волн и области их применимости	197
6.7.4. Уравнения Буссинеска	200
6.7.5. Эффекты внутренней вязкости и донного трения	203
7. Длинные уединенные волны	206
7.1. Конкуренция нелинейных и дисперсионных эффектов	206
7.2. Примеры уединенных стационарных волн	207
7.3. Модельные уравнения для уединенных волн, распространяющихся над медленно изменяющимся дном	210
7.4. Кубические нелинейные волны	212
7.4.1. Эффекты капиллярности и вязкости	212
7.4.2. Эффект гравитации	214
7.5. Квадратично-нелинейные волны над переменным дном. Закон Грина	216
7.6. Примеры прибрежного развития уединенной волны	217
8. Резонансные и трансрезонансные волны в длинных резонаторах	219
8.1. «Опасные» делители и самовозбуждение длинных катастрофических волн	219
8.2. Пример нелинейного резонанса	223
8.3. Обобщения закона Грина	224
8.3.1. Эффект донного трения	225
8.3.2. Анализ квадратичных нелинейных эффектов.	227
8.3.3. Закон Грина	230
8.3.4. Закон Грина для слабо-дисперсионных гармонических волн	230
8.4. Самовозбужденные резонансные волны конечной амплитуды	232
8.4.1. Основные исходные соотношения	234
8.4.2. Нелинейное самовозбуждение резонансных длинных волн	237
8.5. Каскад резонансов и усиление длинных волн в окрестности нелинейных резонансов	239
8.5.1. Простейший нелинейный резонанс	240
8.5.2. Квадратичный нелинейный резонанс.	241
8.5.3. Кубический нелинейный резонанс	243

8.6. Нелинейные составляющие самовозбуждающихся резонансных волн. Общая квадратичная теория	244
8.6.1. Структура фронта волны	245
8.7. Влияние скорости волны, дисперсии и кубической нелинейности на зарождение хаотических волн	248
8.7.1. Малые делители и сингулярные решения	248
8.7.2. Трансрезонансное зарождение хаотических волн	249
9. Решения типа Даламбера для волн в конечных резонаторах.	252
9.1. Деформируемые координаты. Аналитическое решение нелинейного волнового уравнения	253
9.1.1. Ограниченные во времени решения волнового уравнения	256
9.2. Недеформируемые координаты. Аналитическое решение нелинейного волнового уравнения	259
9.2.1. Частные случаи решения уравнения (9.40)	264
9.2.2. Резонансные решения волнового уравнения	265
9.2.3. Частные случаи резонансного решения	270
9.3. Метод возмущений, резонансные и когерентные волны	273
9.4. Нелинейные резонансные плоские волны в удлиненных резонаторах	275
9.4.1. Пример граничной задачи и уравнения, определяющего резонансные плоские волны	277
9.5. Нелинейные резонансные сферические волны	280
9.5.1. Аналитическое описание динамики облака сферических пузырьков.	282
9.5.2. Ударные сферические волны, возбуждаемые давлением в пузырьковом облаке	285
10. Трансрезонансная прибрежная эволюция океанских волн и формирование катастрофических цунами	289
10.1. Нелинейные волны в канале с трапецевидной возвышенностью на дне	289
10.2. Нелинейная эволюция уединенной волны над трапецевидной возвышенностью на дне	293
10.3. Волны в канале с полукруглой возвышенностью на дне	294
10.4. Линейное развитие уединенной волны над наклонным дном	297
10.5. Моделирование описанной Чарльзом Дарвином эволюции цунами в прибрежной зоне.	298
10.6. Заключение	305
Литература	308

ЧАСТЬ III. ОКЕАНСКИЕ КАТАСТРОФИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КАК ТРАНСРЕЗОНАНСНОЕ ЯВЛЕНИЕ.	318
11. Катастрофические (экстремальные) океанские волны	320
11.1. Волны и суда на поверхности океана	320
11.2. Результаты наблюдений катастрофических волн	322
11.3. Возможные причины появления катастрофических волн.	326
11.4. Эффекты ветра и течения	329
11.5. Алгоритм моделирования катастрофических океанских волн и их взаимодействия с корпусом судна	332
12. Аналитическое описание ветер–волна взаимодействия	334
12.1. Моделирование действия ветра на волны	335
12.2. Соотношения и уравнения для ветровых волн на мелкой и глубокой воде	337
12.3. Волновые уравнения для однонаправленных волн	339
12.3.1. Длинные волны.	339
12.3.2. Короткие волны и глубокая вода	341
12.4. Предварительный анализ возможности возбуждения катастрофических волн	343
12.4.1. Линейный анализ самовозбуждения ветровых волн	343
12.4.2. Прохождение через резонанс линейных ветровых волн	345
12.4.3. Волны, возбуждаемые в окрестности резонансов	346
12.4.4. Самовозбуждение нелинейных длинных волн зыби и ветровых волн.	347
12.5. Заключение по главе, определяющие дальнейшие исследования	352
13. Теория катастрофических волн, возбуждаемых гармонической составляющей ветра	354
13.1. Еще раз о влиянии дисперсии и поверхностного трения	355
13.2. Структура фронта волны: эффект нелинейности	356
13.3. Структура фронта волны: эффекты ветра, дна и слабой дисперсии	361
13.4. Структура катастрофических резонансных волн: эффект дисперсии	364
14. Трансрезонансная эволюция ветровых вынужденных длинных волн.	370
14.1. Моделирование трансрезонансной эволюции прибрежных волн	373
14.2. Моделирование «Новогодней» волны	375

14.3. Влияние кубических нелинейных эффектов на трансрезонансную эволюцию длинных волн	377
14.4. Трансрезонансные катастрофические длинные волны, возбуждаемые порывом ветра	380
15. Самовозбуждение катастрофических длинных волн	382
15.1. Моделирование катастрофической волны. Эффект нелинейности	383
15.2. Моделирование «дыры в море», встреченной танкером «Таганрогский залив»	386
15.3. Моделирование прибрежной эволюции самовозбуждающихся волн	388
15.4. Моделирование экстремальных волн. Эффект дисперсии	389
15.4.1. Пример трансрезонансной эволюции катастрофических волн	397
15.5. Эволюция катастрофических волн, проходящих над подводной топографией	399
15.6. Трансрезонансное развитие океанских волн в облако смеси вода-воздух	401
15.7. Кубически-нелинейные эффекты и гармонический анализ катастрофических волн	404
15.7.1. Моделирование «Новогодней» волны	404
15.7.2. Малые делители и катастрофическое усиление гармонических волн	406
15.7.3. Моделирование группы волн «три сестры». Эффект дисперсии.	408
15.7.4. Условие возникновения катастрофических волн	410
15.8. Моделирование катастрофических волн составными решениями .	411
16. Катастрофические волны на поверхности океана	414
16.1. Простейшее рассмотрение вынужденных и свободных волн . . .	414
16.2. Основные соотношения и уравнения развиваемой теории катастрофических океанских волн	415
16.2.1. Условие возникновения катастрофических волн	416
16.2.2. Вывод основного уравнения	418
16.3. Моделирование катастрофических океанических волн	421
16.4. Заключение по главам 11–16	425
17. Экстремальное взаимодействие волны с корпусом судна	428
17.1. Экстремальные нагрузки на корпус судна, вызванные поверхностными волнами.	428

17.2. Эффекты кавитации на корпусе судна на нагрузку	431
17.3. Влияние кавитации на импульсное деформирование элемента корпуса судна поверхностной волной	435
17.3.1. Модель взаимодействия и результаты числого исследования	435
17.3.2. Эффект деформируемости пластины на импульсное давление воды	437
17.3.3. Эффекты корпусной кавитации	438
17.3.4. Экспериментальные данные	439
17.4. Кавитационные процессы при упруго-пластическом деформировании пластин импульсом воды	443
17.5. Заключение по главе 17	448
Литература	450
ЧАСТЬ IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД, ЖИДКОСТЕЙ И МАГМЫ В СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНАХ	455
18. Моделирование осадочных пород, содержащих газовые включения	457
18.1. Вибрационное разрыхление осадочных пород	457
18.2. Уравнение состояния для газированных сред	461
18.3. Сильно-нелинейная модель уравнения состояния для газированных материалов	463
18.4. Модельное уравнение состояния для газированных пород	464
18.5. Волновые уравнения для газированных осадочных пород	466
19. Волновые уравнения для осадочных пород, содержащих пузырьковую жидкость	468
19.1. Эффект колебаний пузырьков на уравнение состояния слабосвязных материалов	468
19.2. Сильно-нелинейное волновое уравнение	470
19.3. Трехскоростное волновое уравнение и линейная акустика слабосвязных осадочных пород	472
19.4. Влияние вязкостных свойств пузырьковой среды на скорость звука	474
19.5. Усиление волн в пузырьковых средах за счет вязких эффектов .	475
19.6. Квадратично-нелинейная акустика газированных сред: уравнения Буссинеска и Клейна-Гордона	477
19.7. Сильно-нелинейные волновые уравнения	478
19.8. Заключение	478
Литература	482

ЧАСТЬ V. КАТАСТРОФИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ВОЛНЫ: ОТ МОРЕТЯСЕНИЙ ДО АТОМИЗАЦИИ И РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ . . .	485
20. Катастрофические волны со складчатым фронтом	488
20.1. Примеры высоко-нелинейных волновых уравнений	488
20.2. Примеры волн со складчатым фронтом	491
20.3. Эксперименты сэра Тэйлора и волновые формы «эластика»	494
20.4. Упрощенные уравнения для высоко-нелинейных поверхностных волн	498
20.5. Теория трансрезонансного развития высоко-нелинейных волн . .	500
20.6. Трансрезонансное развитие волн в грибовидные структуры, султаны (струи) и пузыри	503
20.7. Сильно-нелинейные волны в резонаторах и параметрически возбуждаемые локализованные резонансы	509
21. Вертикально-возбуждаемые волны, осцилоны и патены	522
21.1. Солитоны, осцилоны и патены	522
21.2. Анализ неожиданных параметрически-возбуждаемых волн на воде	529
21.3. Теория вертикального возбуждения длинных поверхностных волн	539
21.3.1 Метод возмущений и локальный резонанс	540
21.3.2. Методика выполнения расчетов, представленных в разделе 21.1.	544
21.3.3. Методика выполнения расчетов, представленных в разделе 21.2.	547
21.4. Анализ катастрофических волн Фарадея на воде	550
21.5. Локально-справедливая теория вертикально-возбуждаемых резонансных волн	556
21.6. Сильно-нелинейные волны, вихри и направления дальнейших исследований	559
22. Эволюция волн в вихри	562
22.1. Введение	562
22.2. Самовозбуждаемые волны на поверхности раздела сред	566
22.3. Катастрофические волны в потоках	570
22.4. Резонансное зарождение вихрей	573
22.5. Моделирование результатов неустойчивости Рихтмайера-Мешкова	579
22.6. Устойчивость, неустойчивость и турбулизация волн при трансрезонансной эволюции	585

23. От атомов до ранней Вселенной	601
23.1. «Звучащая» Вселенная	602
23.2. Пример сведения уравнения Клейна-Гордона к алгебраическому уравнению	606
23.3. От атома до ранней Вселенной	611
23.4. Единообразное описание резонансных катастрофических волн . .	617
23.5. Примеры моделирования сложных патенов	621
23.6. Заключение	627
Литература	631
Заключение	640
1. Трудности расчета и прогнозирования катастрофических природных явлений	640
2. Основные составляющие и выводы развитой теории катастрофических волн	643
3. Геофизическое наследие Чарльза Дарвина	651
Благодарности	654

Обращение к российским читателям книги профессора Г.Д. Маллинсона

Заведующий Кафедрой Инженерной Механики
Инженерный Факультет
Университет Окленда

Мне доставляет большое удовольствие представить русскому читателю результаты исследований профессора Ш.У. Галиева, выполненные в течение более десяти лет в стенах факультета инженерии Оклендского Университета. В этом исследовании Ш.У. Галиев успешно использует свои глубокие знания в механике, физике и математике, с тем, чтобы выполнить научный анализ некоторых геофизических результатов Чарльза Дарвина, которые до сих пор не анализировались с позиций современной науки. Возможно, этого и нельзя было сделать, так как для анализа этих результатов потребовалось развить специальный раздел волновой механики — теорию катастрофических волн, которая претендует на описание очень сильно нелинейных, катастрофических явлений в Природе.

Я надеюсь, что эта книга также даст представление читателю об уровне развития научных исследований факультета инженерии Оклендского Университета, где проводятся широкие исследования, преимущественно прикладного направления, во всех областях инженерии. На факультете изучаются как механические, химические и физические свойства материалов, так и методы их формирования; устойчивость горных пород и поведение конструкций при землетрясениях; изменение природы Новой Зеландии, а также вопросы моделирования поведения жидких, гранулированных и твердых сред. Трудно в этом кратком вступлении в книгу выделить наиболее успешные исследования факультета и кафедры. Чтобы дать общее представление о них, отмечу, что факультет традиционно входит в число лучших инженерных факультетов в списке лучших университетов мира. В определенной мере уровень наших исследований характеризует и эта предлагаемая вниманию русского читателя книга.

В завершение отмечу, что на факультете учатся молодые люди различных национальностей со всего мира. Это своеобразный интернациональный учебный центр. Есть здесь и молодые люди из России. Я надеюсь, что их количество будет с каждым годом возрастать.

Letter to Russian readers of the book
Charles Darwin's geophysical reports as models of the theory of
catastrophic waves
from Professor G.D. Mallinson

Head of Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
The University of Auckland

It is a great pleasure for me to present to the Russian readers this book, where Professor Sh. U. Galiev has collected together the scientific results he has obtained while working in the Faculty of Engineering at The University of Auckland. Professor Galiev has successfully applied his fundamental knowledge in mechanics, physics and mathematics to scientifically analyse some of the geophysical results of Charles Darwin from the position of modern science. His analyses have required new developments of a special section of wave mechanics — the theory of catastrophic waves — which impacts on the description many strongly nonlinear, catastrophic phenomena in Nature such as earthquakes and tsunami.

I hope that this book shows a level of development of research in the Faculty of Engineering, where wide-ranging studies, in all areas of engineering are flourishing. In particular, physical properties of materials and methods of their formation are studied as well as mechanical and chemical problems of engineering. We also study intensively different processes associated with the natural environment of New Zealand. It is impossible to describe most successful research of the Faculty and the Department. I only emphasise that the Faculty ranks highly amongst those in the best Universities in the World

In the Faculty young students and researchers from every corner of the globe and many nationalities are studying and working together. It is a truly international educational and research environment which includes several people from Russia. I hope that their quantity will increase every year.

От научного редактора книги

Недавно мир отметил 200-летний юбилей Чарльза Дарвина и 150-летний юбилей публикации его книги «Происхождение Видов». Видимо, нет в истории науки человека и книги (по понятным причинам исключаются из рассмотрения «Библия» и «Коран»), оказавших такое же могучее влияние на развитие человеческого общества. Дарвин написал еще несколько книг, совершивших революционные перевороты в различных областях знания. Однако наиболее читаемой и наиболее доступной для широкого круга читателей является его книга «Журнал исследований» (или «Путешествие натуралиста вокруг света на корабле «Бигль»»). В 2009 году был 175-летний юбилей издания этой книги. В ней Дарвин в полной мере реализовал свой выдающийся литературный талант. Книга стоит в ряду таких замечательных произведений, как «Фрегат Паллада» Гончарова, в плане литературных достоинств, но намного превосходит ее в плане остроты и занимательности сюжета, и, конечно, неизмеримо выше как пример пытливого взгляда гениального исследователя на разнообразные природные явления.

Дарвин считал, что путешествие на «Бигле» было самым значительным событием в его жизни. В частности, его потрясло гигантское землетрясение в Чили, в 1835 году, и его результаты. Он был первым исследователем, который наблюдал и зафиксировал локальное усиление сейсмической активности, связанной с рельефом Земли и ее геологией, взаимодействие землетрясения и вулканов, моретрясение, возникновение цунами и разрушение городов этой волной.

Исходя из этих наблюдений, Дарвин выдвинул несколько идей, объясняющих причину землетрясений, взаимодействие землетрясений и вулканической активности, прибрежную эволюцию цунами и динамику верхнего слоя Земли. Эти идеи оказали определенное воздействие на развитие наук о Земле. Однако с течением времени эти идеи, которые Дарвин после путешествия практически не развивал, были полностью заслонены его гениальными исследованиями, которыми гордится мировая наука.

В настоящей книге ее автор — Ш.У. Галиев — переоткрывает страницы Дарвина, посвященные землетрясению 1835 года и связанными с ним катастрофическими природными явлениями, для современного вдумчивого читателя. Он задается вопросами — насколько упомянутые данные Дарвина и его идеи согласуются с результатами современной науки? Можно ли современные данные физических и механических экспериментов сопоставить с описанием катастрофического землетрясения, данного Дарвином. И, наконец, насколько удачным может быть моделирование результатов катастрофических землетря-

сений с помощью математических методов? Он отстаивает приоритет Дарвина в описании некоторых катастрофических природных явлений и в формулировке принципов, заложенных в основу некоторых наук о Земле. Он показывает, что современная сейсмология и вулканология только в последние дни начали формулировать идеи, аналогичные идеям, сгенерированным Дарвином почти 200 лет тому назад. Он полагает, что наука о катастрофических землетрясениях находится в стадии становления и идеи Дарвина могут в дальнейшем определить ее дальнейшее развитие. Таким образом, в книге излагаются и анализируются некоторые результаты Дарвина, которые были получены им задолго до того, как он обосновал свою гениальную теорию, известную как Дарвинизм.

Условно говоря, книга содержит две взаимно дополняющие части. В первой рассматриваются основные геофизические мысли Дарвина, связанные с динамикой поверхности Земли, во второй автор, отталкиваясь от этих мыслей, строит теорию катастрофических волн. В ее основе лежат понятия резонанса и трансрезонансных волн. Я не буду останавливаться более подробно на содержании книги, что сделал автор во введении и что отражено в оглавлении. Отмечу только, что сам факт попытки математического и физического осмысливания некоторых результатов Дарвина не может не вызывать интереса. Исходя из этого, я выступил с инициативой перевода книги на русский язык. С удовлетворением отмечаю, что инициатива была поддержана российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ). Огромную помощь в деле перевода и редактирования книги оказала Т.Г. Валиуллина.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся гигантской фигурой Дарвина, историей науки, методами анализа природных явлений и приложениями математических методов к решению актуальных задач современной геофизики, механики и физики.

Научный редактор книги
профессор В.А. Лазарев

Предисловие: несколько слов о Чарльзе Дарвине, его исследованиях и содержании книги

...я смотрю на геологическую летопись как на историю мира, не вполне сохранившуюся и написанную на менявшемся языке, историю, из которой у нас имеется только один последний том...

Чарльз Дарвин. О происхождении видов путем естественного отбора, Лондон, Джон Мюррэй, 1859.

...нет ничего тайного, что не сделалось бы явным, ни сокровенного, что не сделалось бы известным.

Евангелие от Луки

Юность Дарвина и путешествие на *Бигле*. Чарльз Роберт Дарвин родился 12 февраля 1809 года в небольшом английском городке Шрусбери (Shrewsbury) графства Шропшир (Shropshire) в родовом имении Маунт Хаус (Mount House). Он был пятым ребенком в семье преуспевающего врача. Семья не была аристократической, но принадлежала к элитному слою высокоинтеллектуальных семей Англии. Из всех сохранившихся воспоминаний следует, что юный Дарвин рос вежливым, разговорчивым и сердечным мальчиком с явно выраженным интересом к естествознанию, однако он не был сколь-нибудь увлечен основными предметами программы, посещаемой им классической школы. Он вспоминал *...Когда я кончил школу, я не был для своих лет ни очень хорошим, ни плохим учеником; кажется, все мои учителя и отец считали меня весьма заурядным мальчиком, стоявшим в интеллектуальном отношении, пожалуй, даже ниже среднего уровня... я стал с большим удовольствием наблюдать за повадками птиц.... Помню, что в простоте своей я был поражен тем, почему каждый джентльмен не становится орнитологом. Когда я заканчивал школу, мой брат усердно занялся химией... он позволил мне помогать ему при производстве опытов.... Это составило лучшее, что было в образовании, полученном мною в школьные годы, ибо здесь я на практике понял значение экспериментального знания....*

Явный интерес к науке возник у шестнадцатилетнего Дарвина, когда его послали учиться в Медицинскую школу в городе Эдинбурге, где велось преподавание множества предметов на высоком европейском уровне, хотя сам Дарвин считал читаемые там лекции невыносимо скучными. Там Дарвин начал самостоятельные исследования и сделал свои первые два открытия в науке,

связанные с бескостными мелкими морскими организмами. В частности, он нашел, что так называемые яйца *Flustra* обладают способностью самостоятельно двигаться при помощи ресничек. В те годы Дарвин общался с очень приятным и умным негром, который научил его искусству изготовления чучел птиц. Он приобрел знакомых, интересующихся наукой, естествознанием и анатомированием. Однако Дарвину не было суждено стать врачом. Тяжелое впечатление от зрелища операции на ребенке (тогда операции проводили без обезболивающих средств, и страдания оперируемого ребенка преследовали его



Карта показывает путь *Бигля* и территории, которые посетил Дарвин во время путешествия



Охота с болами как описано в *Путешествии на Бигле* [5].

многие годы) заставило Чарльза задуматься о другом поприще. Видимо, отец не был доволен этим. «Ты не заботишься ни о чем, кроме стрельбы, собак и ловли крыс. Ты станешь позором для себя и семьи», — заявил он как-то в раздражении, к глубокому огорчению сына [1]. Хотя семья не отличалась особой набожностью, было решено выбрать для Чарльза путь священника. Сам Дарвин не был против этого, хотя и чувствовал некоторые сомнения в своей религиозности. Мысль стать сельским священником нравилась ему. Он поступил в колледж Христа в Кембриджском университете. Посещение занятий по теологии и другим дисциплинам не занимало много времени, и у Дарвина оставалось достаточно времени для развлечений и самообразования. По-видимому, он выделялся из студентов, поэтому несколько молодых и талантливых профессоров начали привлекать его к своим исследованиям в процессе почти дружеского общения. Это имело далеко идущие и неожиданные последствия. Дело в том, что в то время, когда он заканчивал учебу в Кембридже, английское правительство снаряжало военный корабль *Бигль* (the *Beagle*) для кругосветного плавания. Задачей плавания было уточнение военно-морских карт и диаграмм. Капитаном корабля был блестящий аристократ, по-

томок английских королей, Роберт Фиц-Рой (частица Фиц (Fitz) в имени человека указывает на то, что он потомок внебрачной связи одного из английских королей). Он решил взять в путешествие ученого для изучения растений и животных различных стран. Дарвин был рекомендован для проведения этой исследовательской работы. На первый взгляд, удивительно, что для столь трудного и ответственного поручения, как естественнонаучное исследование мало известных и плохо изученных отдаленных стран, был выбран молодой человек, только что окончивший университет. Однако к указанному времени Дарвин обладал обширным запасом знаний в различных областях и, что важнее всего, умением самостоятельно работать, наблюдать и улавливать своеобразие тех или иных явлений. Он был достаточно хорошо знаком с техническими приемами, применяемыми при зоологических, ботанических и геологических исследованиях.

С другой стороны, это надо подчеркнуть, предложение не являлось официальной работой, она не оплачивалась, поэтому далеко не каждый, а только человек из состоятельной семьи мог принять предложение Роберта Фиц-Роя, и оно могло состояться только с согласия отца, которого Чарльз глубоко чтит. Поначалу отец подчеркивал неприемлемость путешествия *...для репутации священника... то, что я пускаюсь в бесполезное путешествие, может восприниматься, как очередная смена профессии...* [1]. Затем он изменил свое мнение. Неожиданно возникшая возможность кругосветного путешествия круто изменила жизненные планы Чарльза Дарвина.

В путешествии он провел пять лет (1831–1836). При любой возможности Дарвин сходил на берег, чтобы делать наблюдения и собирать образцы геологических пород, растений и животных. Он совершал длительные поездки вглубь территории Южной Америки. Фактически, Дарвин провел больше времени на земле, чем на *Бигле*. В результате он возвратился домой с огромным объемом впечатлений и наблюдений, используемых впоследствии при написании его выдающихся книг и статей.

Помимо того, что Дарвин был гениальным исследователем природы, он обладал талантом писать с большой выразительностью и ясностью, поэтому его книги читаются с большим интересом даже людьми, далекими от науки. Среди его многочисленных публикаций книга *Журнал Исследований*, опубликованная в 1839 году и обычно называемая *Путешествие на Бигле*, выделяется тем, что она рассчитана на самый широкий круг читателей [3–5]. Английские литературоведы всегда отмечали, что эта книга представляет собой по языку и манере изложения превосходный образец английской прозы второй четверти XIX века, в котором Дарвин проявил себя как выдающийся стилист.

Отметим, что один из замечательнейших российских поэтов XX века Осип Мандельштам посвятил Дарвину статьи «К проблеме научного стиля Дарвина»

и «Литературный стиль Дарвина». Он пишет «Дарвина и Диккенса читала одна и та же публика. Научный успех Дарвина был в некоторой своей части и литературным». Это высокая оценка, если иметь, в частности, в виду, что Диккенс один из наиболее читаемых в мире авторов, следующий почти за Гомером, Сервантесом и Шекспиром. Конечно, слова Манделыштама относятся в первую очередь к *Путешествию на Бигле*.

Вместе с 200-летием со дня рождения Чарльза Дарвина 2009 год ознаменован также 170-летием публикации этой книги. Наряду с описанием путешествия и приключений она содержит много информации о народах, птицах, животных и растениях. В ней Дарвин впервые изложил некоторые свои мысли относительно теории эволюции ...*Наблюдая эту постепенность и различие в строении в пределах одной небольшой, связанной тесными узами родства группы птиц, можно действительно представить себе, что вследствие первоначальной малочисленности птиц на этом архипелаге был взят один вид и видоизменен в различных целях...* [4, стр. 456]. Очень даже могло быть, что эта и несколько других фраз, опубликованных Дарвином в [3, 4, 6], были бы единственными, появившимися при его жизни, где он как бы вводит в свою гениальную теорию происхождения видов.

Дарвинизм и его критика. Простота и красота в науке. Гениальный труд Дарвина *О происхождении видов путем естественного отбора* часто для краткости именуют *Происхождение видов*. Отметим сразу, что настоящая книга не имеет отношения к этому основному труду Дарвина. Мы только коснемся некоторых вопросов, связанных с этой работой Дарвина, которые не безразличны и для содержания настоящей книги. Известно, что на протяжении многих лет он не намеревался публиковать свою теорию эволюции, не собираясь конфликтовать с официальной идеологией, ...*всякого, кто посягнул бы на откровения Библии, не станут увещевать с помощью логики или разума. Нет, против него обратят «веру, которая выше всякого понимания»...* [7]. Дарвин намеревался оформить теорию как книгу и договориться о ее издании после своей смерти. В этом он был смелее великого математика Гаусса, который не решился опубликовать свои результаты по неевклидовой геометрии, убоясь «криков беотийцев». К счастью, обстоятельства сложились так, что друзья Дарвина настоятельно рекомендовали и способствовали публикации его теории. В этом ее судьба напоминает историю написания основного труда Ньютона. Однако замечательно, что не только в первом издании книги *Путешествие на Бигле* [3], но и во втором ее издании, вышедшем в 1845 г. [4], Дарвин стремился всячески маскировать свои идеи об эволюции видов, что он продолжал делать и в дальнейшем, вплоть до 1858–1859 годов, когда решился, наконец, выступить с развернутым изложением своей теории. Если бы этого не про-

изошло, то имя Дарвина, в лучшем случае, стояло бы недалеко от имен гениальных представителей человечества, только предвосхитивших результаты развития науки, таких как, например, Демокрит, сформулировавший еще более смелые идеи. «Имеются неисчислимые миры различных размеров. В некоторых нет ни солнца, ни луны, в других они больше, чем наши, и их более чем по одной. Эти миры расположены на различных расстояниях. Одни из них возникают и процветают, другие умирают. Они могут соударяться. Некоторые миры не имеют животных и растений, и даже воды». Однако теория эволюции видов все же была опубликована, сделав ее автора наиболее выдающимся и известным представителем науки. Действительно, нет другой теории, которая более 150 лет подвергается самой заинтересованной проверке и критике и которая с удивительным успехом, каждый раз, подтверждает свое соответствие самым последним достижениям науки.

Одну из наиболее успешных атак на теорию эволюции видов провел выдающийся физик 19-го века лорд Кельвин (William Thompson). Дело в том, что теория Дарвина основана на неявном предположении о весьма большом возрасте Земли. Дарвин на основе анализа скорости эрозии поверхности одной из больших долин Англии (the Weald) пришел к выводу, что после окончания мелового периода прошло около 300 млн. лет. Подобная величина является обязательным условием для протекания биологической эволюции. Действительно, только при положительном решении вопроса в пользу большого (измеряемого миллиардами лет) возраста Земли, можно обсуждать аргументы из сферы биологической науки. Если же достоверно доказывается, что геологическая история измеряется гораздо меньшими величинами, то тогда остальные положения теории эволюции становятся всего лишь умозрительными теоретическими построениями, не имеющими никакого отношения к реальности.

Сторонником последнего взгляда был Кельвин. Он подчеркнул, что для биологической эволюции нужна энергия Солнца. Согласно Кельвину, если принять химический источник энергии Солнца, то его хватило бы не более, чем на 3000 лет. Если принять более благоприятное для Дарвина предположение, что источником энергии Солнца служит гравитация, то время для эволюции видов не может превосходить 20 миллионов лет. Но этого тоже слишком мало. Это был один из самых могучих ударов по Дарвиновской теории. Ведь оппонентом был один из наиболее уважаемых ученых Англии, оперирующий «непогрешимыми» соотношениями физики и математики, а Дарвин был преисполнен уважения к математическим знаниям. В «Автобиографии» он с огорчением пишет, что, по его мнению, не мог *...хотя бы немного разбираться в великих руководящих началах математики, ибо люди, овладевшие ею, кажутся мне наделенными каким-то сверхчувством... Не думаю, впрочем, что-*

бы я когда-либо мог добиться успеха за пределами элементарной математики.... Приняв мнение Кельвина к сведению, Дарвин во втором издании «Происхождения видов» убрал свою оценку возраста Земли в 300 млн. лет, как минимум. Но это, ни в коей мере, не было следствием принятия взглядов Кельвина. Он проявил свойственную ему мудрость и уважение к мнению оппонента ...*это возражение, упорно защищаемое сэром Уильямом Томсоном, по всей вероятности, одно из самых важных, какие были до сих пор выдвинуты, то я могу только сказать, во-первых, что мы не знаем, как быстро изменяются виды, если выражать это время годами, а во-вторых, что многие ученые еще до сих пор не допускают, что строение вселенной и внутренности нашей планеты известны нам в такой степени, которая допускала бы сколько-нибудь достоверные соображения о продолжительности ее существования. Что геологическая летопись несовершенна, допускают все; но что она несовершенна в такой мере, как требуется нашей теорией, с этим, вероятно, согласятся очень немногие...* Возможно, Дарвин был прав и с мнением Кельвина были согласны многие их современники. Однако Дарвин был прав и в другом, как почти всегда, в самом важном. Современные оценки возраста Земли составляют около 4.7 млрд. лет! Этого больше — чем достаточно для теории эволюции — ведь все это время живительные лучи Солнца падали на Землю! Это открытие конца 20-х годов прошлого века. Тогда английский астроном сэр Артур Эддингтон высказал убеждение, что Солнце содержит огромное количество энергии, которая освобождается при ядерных процессах. Как и в случае Дарвина, предвидение Эддингтона было встречено критикой, которая сводилась к тому, что в недрах звезд нет температур, достаточных для возникновения ядерных реакций. На возражения Эддингтон отвечал словами, к которым, возможно, присоединился бы и Дарвин «Не будем спорить с тем, кто считает, что звезды недостаточно горячи для этого процесса; пусть пойдет и поищет себе местечко погорячее». Приблизительно в то же время замечательный русский физик Георгий Гамов, используя концепцию туннельного эффекта, объяснил причину радиоактивного распада ядер. При этом выделяется колоссальная энергия. На основе этой идеи и результатов Эддингтона строгую теорию термоядерных процессов в звездах, полностью отменяющую возражения Кельвина, построил в 1938 году Ганс Бете. Несколько позднее (конец 30-х и 1940 годы) Гамов построил первую последовательную теорию эволюции звезд с термоядерным источником энергии.

Возможно, еще более мощное потрясение испытал Дарвин в июне 1867 года, когда вышла в свет статья английского инженера Флеминга Дженкина (Fleeming Jenkin), где критиковалась идея естественного отбора как движущей силы эволюции. По Дженкину полезный признак мог сохраниться только

в случае его возникновения сразу у большого числа особей и в короткий промежуток времени (в одном поколении), что противоречит основной идее Дарвина. Ознакомившись с возражениями Дженкина, Дарвин считал, что их правильность *...едва ли может быть подвергнута сомнению...* и называл их «кошмаром Дженкина». «Кошмар» мучил Дарвина до конца его дней. Видимо, поэтому он формулировал и развивал свою гипотезу о наследовании признаков, получившую название «пангенезис». Согласно этой гипотезе, любая ткань любого организма содержит в себе особые микрочастицы — геммулы, которые отвечают за наследование приобретенных признаков. Надо вспомнить, что это было время, когда законы наследственности Менделя только-только были сформулированы (1865 год), идея атома еще полностью не утвердилась, а до открытия электрона оставалось еще 30 лет. Поэтому, хотя догадки о том, что передачу потомкам признаков родителей обеспечивает совокупность отдельных (дискретных) наследственных задатков высказывали еще Демокрит, Гиппократ и другие, мы полагаем, что Дарвин в числе первых начал говорить о единицах наследственной информации. Благодаря его авторитету, эта идея получила распространение. Мы не утверждаем, но нельзя и отвергнуть мысль, что идея геммулы могла повлиять на создание революционных понятий кванта энергии Планка и гена наследственности. Таким образом, гипотеза Дарвина содержит подтвержденное в дальнейшем представление о дискретности (корпускулярности) материальной основы наследственности (генов и хромосом). Открытие дискретности наследственного материала позволило преодолеть «кошмар Дженкина». Выдающийся российский генетик Сергей Четвериков был первым, кто опроверг доводы Дженкина и сделал первый шаг к объединению теории эволюции и генетики. Другой генетик, тоже уроженец России, Феодосий Добжанский (Dobzhansky, Th.) написал книгу вполне созвучную книге Дарвина, (*Genetics and the Origin of Species*. Columbia University Press. NY, 1937). Последние исследования французских ученых (2010 год), позволяют выдвинуть на роль геммул Дарвина, так называемые, микровезикулы — мембранные пузырьки размером от 30 нм до 1–4 мкм, повсеместно встречающиеся в жидких средах организма (Романовская, Т., 28.12.2010. Молекулярная биология. Интернет).

«Кошмар Дженкина», возможно, не преследовал Дарвина, если бы он знал об эпохальном открытии Грегори Менделя. 8 марта 1865 года Мендель доложил результаты своих опытов с горохом брюнскому Обществу естествоиспытателей, которое в конце следующего года опубликовало конспект его доклада в очередном томе трудов. Этот том попал в 120 библиотек университетов мира. Мендель заказал 40 отдельных оттисков своей работы, почти все из которых разослал крупным исследователям-ботаникам. Но работа не вызвала интереса у современников, хотя он сделал открытие чрезвычайной важности.

Вначале, по-видимому, он в этом убежден был и сам. Но результаты последующих опытов не согласовывались с открытыми им законами. В результате великий ученый сам разуверился в том, что совершил открытие.

Заметим, что описанные ситуации в науке, в какой-то мере, повторяются. В 1917 году Альберт Эйнштейн обнаружил, что его уравнения общей теории относительности, будучи применены ко всей Вселенной в целом, предсказывают, что она должна сжиматься за счет самогравитации материи и энергии. Однако идея эволюционирующей Вселенной (как ранее теория эволюции видов) настолько противоречила представлениям того времени, что Эйнштейн отбросил ее и ввел в свои уравнения специальный параметр, компенсирующий тяготение в космологических масштабах и обеспечивающий стационарность Вселенной. Этот параметр, получивший название космологической постоянной, проявлялся как очень слабое отталкивание любых двух масс, растущее с расстоянием. Позднее, после расчетов великого русского ученого Александра Фридмана и наблюдений Эдвина Хаббла, факт расширения (нестационарности) Вселенной стал общепризнанным и Эйнштейн принял его. Он говорил, что введение в уравнения общей теории относительности космологической постоянной было самой большой ошибкой его жизни. Он умер, находясь в этом заблуждении. Однако в 1998 году и последующие годы неожиданно появляются наблюдения, которые убедительно показывают, что Вселенная расширяется по некоторому сложному закону и, в первом приближении, этот закон определяется космологической постоянной Эйнштейна. Теперь указанное удивительное расширение Вселенной общепризнанный факт.

Все сказанное приводит к мысли, что величайшие открытия Коперника, Дарвина, Менделеева, Максвелла, Эйнштейна и других величайших гениев человечества, потому-то и гениальны, что содержат фундаментальные, лежащие вне текущих научных знаний, предвидения. Как вспоминал Галилей во время его студенческих лет, мысль Коперника о том, что в представлениях людей об устройстве Вселенной надо поменять местами Солнце и Землю, казалась совершенно дикой. Тогда даже наиболее образованные люди полагали, что модель Коперника не имеет никаких достоинств кроме простоты и красоты, в то время как ее несоответствие наблюдениям мог видеть каждый. Издевательством над уравнениями Максвелла выглядела планетарная модель атома, построенная Нильсом Бором. Конечно, все эти исследователи видели недостатки своих моделей, но завораживающая красота и простота теоретических построений приводила их к убеждению, что следующие за ними ученые уберут шероховатости развиваемых теорий. Основную идею, позволявшую им преодолевать сомнения и неуверенность хорошо выразил Вернер Гейзенберг: «Если

Природа приводит нас к математическим выражениям, необычайно простым и красивым..., то мы невольно воспринимаем их как «истинные»...». Анри Пуанкаре считал, что «Специальное эстетическое чувство — ощущение красоты — играет роль тонкого решета... Тот, кто не владеет им, никогда не будет истинным творцом». Истинное всегда прекрасно, но говорят и больше — прекрасное часто оказывается истинным. Конечно, во всем нужна мера. Красота и простота в достаточной мере субъективные понятия. Простота не должна переходить в упрощенчество. Все это хорошо понимали великие умы. Большому поклоннику красоты и простоты Эйнштейну приписывают следующую максиму: «Сделайте все настолько просто, насколько это возможно, но не проще».

Слова «красота», «прекрасный», «красивый» (beauty, beautiful) встречаются в дарвиновском труде *Происхождение видов* более 20 раз. Дарвин говорит о «красивой адаптации», «прекрасном и гармоничном разнообразии видов». В некоторых случаях Дарвин употребляет слово «прекрасный» в смысле «хороший», «отличный». Но в целом *Происхождение видов*, в полном соответствии с вышеприведенными словами Пуанкаре, исполнено эстетики. Эмоциональный и выразительный литературный стиль автора, не говоря уже о предельной силе мысли и убедительности аргументации, делает чтение *Происхождения видов* сильным эстетическим переживанием (Волькенштейн, М., 1999. Красота науки. Интернет). В конце жизни, осмысливая ее в «Автобиографии», Дарвин пишет ...*утрата высших эстетических чувств... равносильна утрате счастья...*

Нет книги, которая столь же быстро и радикально повлияла на развитие общества. Видимо, оно, в лице каждого мыслящего человека, нуждалось и ждало появления подобной теории. Многие культурные страны были уже подготовлены к Дарвиновской революции. Конечно, Дарвин никогда не был революционером и воинствующим атеистом. Он помыслить не мог о каком-либо насилии, что сопровождало распространение христианской и мусульманской религий. В результате огромные цивилизации были разрушены, а человечество локально откатывалось в почти первобытное состояние. Нечто подобное произошло и с новой, пусть не самой совершенной, коммунистической цивилизацией СССР. Теперь на той территории много культовых сооружений, но почти не осталось детских садов, пионерских лагерей, доступных домов отдыха и высоко престижных научных и культурных учреждений.

Жена Дарвина была глубоко религиозным человеком. Он уважал ее образ мышления, так же как и религиозные чувства некоторых своих друзей и учителей. Однако его книга заложила научный фундамент атеизма и очень способствовала распространению этой всеобъемлющей и плодотворной идеи по планете. Косвенно, книга очень способствовала возникновению современных развитых стран. Действительно, чем меньше влияние религий, тем стабильнее, культур-

нее и богаче жизнь населения страны, тем меньше влияние коррупции (растления общества) и преступности.

Как и опасался Дарвин книга *Происхождение видов* принесла ему много огорчений. Шум вокруг этой книги и постоянное психологическое давление разрушили окончательно его здоровье. В 1864 году он начал себя очень плохо чувствовать, что продолжалось два года. В 1866 году он начал выходить из своей комнаты. За это время из ранее неутомимого путешественника, из почти цветущего человека он превратился в хилого старика с огромной седой бородой. Именно этот облик известен многим, а ведь ему тогда было только 57 лет. Ученые до сих пор спорят о истоках его болезней. Но Дарвин нашел в себе силы продолжать свои эпохальные исследования [1].

В 1872 году Дарвин опубликовал книгу *О выражении эмоций человека и животных*, которая положила начало научному изучению мира человеческих эмоций, а также эмоций животных. Возможно, к этому исследованию подтолкнула Дарвина несомненная связь проявления творческих способностей человека и активности его эмоциональной жизни.

Геологические и физико-механические интересы Дарвина. Вместе с тем подчеркнем, что до публикации книги *Происхождение видов* Дарвин был хорошо известен научному миру как натуралист и геолог. В частности, большинство его публикаций до 1859 г. были полностью или частично посвящены геологии. Книга *Путешествие на Бигле* — первая значительная публикация Дарвина, которая вводит читателя в круг геологических интересов Дарвина. Здесь мы кратко рассмотрим наиболее важные геологические результаты путешествия, которые в той или иной степени представлены в книге. Их три.

Во-первых, Дарвин устанавливает, что океанические острова, лежащие вдали от материков, либо образованы кораллами, либо состоят из вулканических пород. Развивая подробнее это представление в своих последующих публикациях, Дарвин показал, что как континентальные, так и островные вулканы связаны с крупными разломами земной коры, с трещинами, образовавшимися в процессе поднятия горных цепей и материков [3, 4, 6, 8].

Дарвин пришел к выводу, что на протяжении многих миллионов лет материк Южная Америка испытал неоднократные движения поднятия и опускания, которые чередовались с периодами относительного покоя [3, 4, 6, 9]. Своей книгой он донес до широкой публики новейшие геологические результаты об эволюции лика Земли в течение миллионов и миллионов лет. Отправляясь в путешествие, Дарвин, как и все люди, воспитанные на библейских истинах, не испытывал никаких сомнений в правильности библейской догмы о неизменности видов животных и растений и сотворении их богом около шести тысяч лет назад, хотя уже в 1749 году французский натуралист Бюффон нашел,

что возраст Земли может составлять 70 тысяч лет. Еще дальше пошел знаменитый философ Иммануил Кант, который высказал предположение, что Земля могла существовать не тысячи, а миллионы лет. Правда, ни тот, ни другой даже не пытались подтвердить свои предположения фактами. Таким образом, по-своему, результаты геологических исследований Дарвина были не менее революционны, чем его теория происхождения видов. По-видимому, Дарвин был первым, кто задался вопросом о корреляции истории развития жизни на Земле и эволюции геологических формаций.

Наконец, третьим важным геологическим результатом Дарвина, целиком подсказанным ему теорией опускания и поднятия материков, является его теория происхождения коралловых рифов [3, 4, 6, 10].

В указанных выше публикациях Дарвин дал изложение своих взглядов, поражающих своей строгой логичностью, простотой и универсальным охватом всех сторон и особенностей геологических процессов. Подчеркнем, что уже в первом издании *Журнала Исследований* Дарвин высказал свои основные геологические идеи с достаточной ясностью.

За значительный вклад в эту область знаний Геологическое Общество наградило Дарвина в феврале 1859 года самой высокой честью — медалью Волластона (*the Wollaston Medal*).

Таким образом, круг научных интересов Дарвина был много шире тех идей и результатов, которые сделали его имя бессмертным. Читая *Журнал Исследований* страницу за страницей, не устаешь поражаться разносторонности и глубине его знаний. Мы не говорим о подготовке Дарвина как натуралиста, — ее можно было бы ожидать, — но он демонстрирует знание химии и физики, а главное, уверенное применение этих знаний при объяснении результатов наблюдений. Например, специалиста в области гидродинамики, волновых явлений и импульсной механики может поразить его удивительно глубокое понимание сложных механических явлений. Размышляя о полете птиц, он писал: *...В том случае, когда птица парит, движение ее должно быть настолько быстрым, чтобы воздействие наклонной поверхности ее тела на воздух могло уравновесить ее тяжесть. Сила, необходимая для поддержания момента в теле, движущимся в горизонтальной плоскости в воздухе (где трение так мало), не может быть велика, а кроме этой силы ничего больше и не требуется...* [3, стр. 224]. Трудно дать более ясное изложение основ воздухоплавания! Возможно, братья Райт (Wright) перед началом конструирования своего аэроплана знали о воздухоплавании не больше Дарвина.

В этой книге анализируются сейсмические наблюдения Дарвина, поэтому мы приведем ниже несколько его замечаний с тем, чтобы показать читателю хорошее понимание им волнового движения и нестационарных процессов.

Дарвин подчеркивает, что волновое движение не связано прямо со смещениями частиц воды ...*это движение не имеет отношения к смещению воды в результате обтекания самого корпуса судна...* [3, стр. 378]. Рассматривая вызванные землетрясением колебания возвышенностей, он пишет ...*известно, что на поверхности любого колеблющегося тела колебания сказываются иначе, чем на его центральной части...* [3, стр. 371].

Удивительно точно и красочно он описал возникновение катастрофических волн в ограниченном объеме жидкости, вызванных обрушением массы льда в воду ...*вниз с шумом и грохотом полетела глыба, и мы тотчас же увидели плавные очертания бегущей в нашу сторону волны. Матросы со всех ног побежали к шлюпкам, так как последним явно грозила опасность быть разбитыми в щепки. Один из матросов уже ухватился было за нос шлюпки, но их настиг и захлестнул бурун; матроса сбilo с ног и понесло, но не ушибло...* [4, стр. 273–274].

Сейчас описанные явления хорошо известны. В частности, наивысшее зафиксированное цунами (выплеснувшая вода повалила деревья до высоты 524 метра) было вызвано обрушением массы горных пород в воду морского залива в 1958 году (Аляскинское землетрясение).

Возникновение пористой структуры вулканических бомб Дарвин объяснил нестационарными процессами [4, стр. 273–274], которые в современной терминологии можно назвать кавитационными. Таким образом, Дарвин впервые описал кавитационное поведение магмы в области разрежения. Его внимание также привлекло закипание моря и возникновение гигантских пузырей при моретрясениях.

Страницы книги *Журнал Исследований*, посвященные чилийскому землетрясению 1835 года, представляют собой классическое описание природных нестационарных явлений. Сам он считал, что землетрясение и сопровождавшие процессы поразили его во время путешествия, возможно, сильнее, чем что-либо другое. Он писал ...*Я не стану и пытаться дать сколько-нибудь подробное описание того, как выглядел Консепсьон, ибо считаю совершенно невозможным передать всю совокупность испытанных мной ощущений...* Горько и обидно видеть, как плоды деятельности человека... обращены в прах; но сострадание к жителям почти мгновенно отступало перед изумлением... По моему мнению, с самого отъезда из Англии мы вряд ли видели другое до такой степени интересное зрелище... [3, стр. 376–377].

Конечно, интерес Дарвина к сейсмическим и механическим явлениям не может быть сравним с его чисто геологическими результатами. По-видимому, поэтому его интерес к этим явлениям практически не обсуждался в научной литературе [11, 12]. По-видимому, также, поэтому практически не обсужда-

лись данные Дарвином описание и анализ сейсмических явлений. Однако мы полагаем, что его мысли, связанные с чилийским землетрясением 1835 года, еще не оценены по достоинству.

Земля как гигантская сейсмически-активная система. Дарвин находился в Вальдивии и Консепсьоне (Valdivia and Concepcion), Чили, как раз до, в течение и после большого землетрясения, которое уничтожило сотни зданий, убило и покалечило много людей. Это была гигантская естественная катастрофа. Он видел колебание поверхности земли, на ней возникали трещины, пробудились вулканы, и гигантские океанские волны атаковывали побережье. Некоторые из этих событий представлялись невероятными. Например, одновременное извержение многих вулканов, находящихся на больших расстояниях друг от друга, или вызванное землетрясением поднятие островов до трех метров. Дарвин, видимо, был первым исследователем, кто описал подобные катастрофические явления. Его описание цунами можно легко принять за сообщение из Индонезии или Шри-Ланки после катастрофического цунами 26 декабря 2004 года. Дарвин взглянул с геологической точки зрения на эффекты, которые случаются в течение и немедленно после землетрясения. Эти эффекты иногда повторяются во время катастрофических землетрясений; но сильные землетрясения, такие как в Чили в 1835, или гигантские землетрясения, как в Чили в 1960, являются редкими и остаются полностью непредсказуемыми. Это одна из немногих областей науки, где специалисты остаются в значительной степени в полной неизвестности [13–16].

Наблюдения и описания Дарвина включают сильное движение поверхности земли, вызванное землетрясением. Теперь известно, что сильные землетрясения генерируют волны большой амплитуды в Земле и на ее поверхности. Эффекты этих волн и их взаимодействия могут объяснить подъем на целых 15 м [17] или вертикальное ускорение до $3.8 g$ (g — гравитационное ускорение) [18–20] поверхности земли так же, как одновременные вулканические извержения [21–23]. Понимание этих слабо изученных явлений требует более детальных исследований физических процессов, которые управляют сильными волновыми движениями Земли, и законов распространения сейсмических волн большой амплитуды около ее поверхности [24, 25]. Дарвин предположил, что вертикальные движения были результатом *...разрыва слоев, расположенных не очень глубоко от поверхности Земли...* [23, стр. 70] и *...в момент разрыва, возникают колебания... Разве при разрыве длинного стержня стали, вибрации не вызваны разрывом так же, как и вибрации возникших краев стержня...* [23, стр. 73].

Таким образом, Дарвин писал о напряженности земной коры и, мы подчеркиваем, объяснил землетрясение и извержения разрывом коры, что могло

бы напомнить разрыв длинного бруска стали. Его теория включала также медленное поднятие (вертикальное движение) коры Земли. Дарвин сформулировал крупные идеи об эволюции Земли и ее динамике. Подобные идеи определили появление и развитие теории тектонических плит.

Однако последняя теория не объясняет полностью, почему землетрясения происходят внутри плит [13, 16]. Дарвин подчеркнул, что имеются различные виды землетрясений *...Я ограничиваю предшествующие наблюдения землетрясениями на побережье Южной Америки или подобными, которые, кажется, сопровождаются поднятием земной поверхности. Но, поскольку мы знаем, что это сопровождается понижением в других частях мира, там должны формироваться трещины и, как следствие, условия для землетрясений...* [23, стр. 74]. Он рассматривал Землю как гигантскую сейсмически-активную систему. Согласно Дарвину *...Часто случается, что одна и та же конвульсия возмущает большие области земного шара...* [23, стр. 59] и *...большинство землетрясений, на первый взгляд внезапные, являются результатом длительного развития...* [23, стр. 66]. Эти мысли находятся в полном соответствии с результатами последних публикаций [13–16]. Сейсмологи убедились, что сильное землетрясение в одном месте может вызвать аналогичное явление на расстоянии тысяч километров от него. Таким образом, приблизительно 200 лет назад Дарвин сформулировал идеи и проблемы, которые начали обсуждать только недавно.

Согласно Дарвину, земная кора — система, где зоны, содержащие трещины, и зоны сейсмической и вулканической активности взаимодействуют. Дарвин сформулировал задачу совместного рассмотрения процессов, которые изучаются сейчас сейсмологией и вулканологией [12, 26, 27]. Однако, трудности исследования взаимодействий между землетрясениями и вулканами таковы, что оно началось только недавно и публикации Дарвина [3, 4, 23] оказали относительно небольшое воздействие на появление и развитие этого исследования [11, 12, 27].

В этой книге мы обсуждаем, как последние данные о сейсмических и вулканических событиях соответствуют наблюдениям Дарвина и его идеям о чилийском землетрясении 1835 года. Кроме того, мы задаемся вопросом, как современные эксперименты с механическими импульсами и взрывами, а также простые эксперименты со слабосвязными материалами согласуются с его сообщениями. Используя новые данные, мы в состоянии исследовать эту тему много лучше, чем первые попытки такого анализа в публикациях 1998, 1999, 2003, 2008 годов [28–32].

Изучая результаты землетрясения, Дарвин надеялся получить универсальные данные о развитии Земли. В частности, он интересовался важнейшей геологической проблемой — возвышением и понижением земной коры [11, 12].

Сандра Герберт [11, стр. 356] пишет: «...Дарвин был честолобив. Он полагал, что возможно создать «простую» геологию, основанную на понимании вертикальных движений земной коры...».

Содержание книги и концепция простоты. У книги две главных цели. Первая — подчеркнуть приоритет Дарвина в описании и анализе результатов серьезных землетрясений (часть I). Представлены отрывки его текстов из книг [3, 4, 33, 34], а также из книги *Автобиография Чарльза Дарвина*. В этих отрывках, написанных в разное время, Дарвин описал свои наблюдения в течение нескольких дней путешествия. Возможно, эти дни были среди самых важных дней его жизни. Мы группируем отрывки текстов так, чтобы читатель мог проследить развитие мыслей Дарвина. Кратко сформулированы ключевые наблюдения и идеи Дарвина, представленные в этих отрывках. Затем эти идеи анализируются и сравниваются с современными экспериментальными данными и наблюдениями.

Вторая цель этой книги — развитие теории катастрофических волн (части II–V). Большое внимание уделяется высоко-нелинейным волновым явлениям, возникающим при сильных землетрясениях в натуральных резонаторах, таких как поверхностные топографии, осадочные геологические формации и океанический шельф. Эти явления сравниваются с данными Чарльза Дарвина. Приводится описание огромного количества наблюдений, данных экспериментов и расчетов, показывающих удивительное разнообразие высоко-нелинейных катастрофических волн, которые могут возникать в природных резонаторах, начиная с систем атомов и глубокого океана, и кончая Вселенной в первые мгновения ее развития.

Эта посвященная Дарвину книга замышлялась как попытка взгляда на автора теории эволюции видов под несколько непривычным углом зрения. Надеюсь, этот взгляд немного дополнит общеизвестный образ величайшего из великих исследователей. Возможно, что под влиянием этой книги некоторые читатели решат прочитать *Журнал Исследований* или восстановить в памяти события, описанные там. Это не только дневник исследователя, — может, в большей степени, — это дневник исключительно смелого, предприимчивого, благородного и гуманного человека. Автор не может не воспроизвести здесь наиболее поразившие его строки из книги Дарвина ...*Представьте себе, что над вами вечно висит опасность того, что жену вашу и ваших маленьких детей — существа, которые природа даже раба побуждает назвать своей собственностью, — оторвут от вас и продадут, подобно скоту, первому, кто по дорожке заплатит за них! А ведь такие дела совершают и оправдывают люди, которые исповедуют «люби ближнего, как самого себя», которые верят в бога и молятся о том, чтобы его воля была исполнена на Земле! Кровь заки-*

пает в жилах, и сердце сжимается... [4, стр. 597]. Эти строки, возможно, наиболее полно характеризуют Дарвина тех лет, когда он не подозревал о своем великом предназначении. И в дальнейшем, всю жизнь, он оставался хорошим человеком, скромным и добрым, всегда в своих действиях соответствовал тем общечеловеческим ценностям, которые усвоил с детства.

При написании книги использовалась схема конической спирали. Введение и вторая глава определяют начальный виток. Там читатель вводится в круг геофизических наблюдений и идей Дарвина и, следуя извлечениям из его публикаций, может проследить ход его мыслей. Последующему витку соответствует третья глава книги, где его наблюдения и идеи сопоставляются с данными современных экспериментов и полевых наблюдений. Последний виток образует математическое описание некоторых из наблюдений Дарвина.

При таком построении книги неизбежно определенное повторение ранее упомянутых результатов, но это происходит на новом уровне знаний читателя. Последнее очень важно, так как книга содержит как бы два взгляда на сообщения Дарвина. Первый — взгляд человека далекого от математики и математического моделирования. Это первые два витка спирали. Третий виток соответствует взгляду теоретика, изощренного в построении простых математических моделей сложных природных явлений. Мы думаем, что стремление к максимально простому изложению, как наблюдений Дарвина, так и материала книги — это основное, что проходит через нее. Основу достижения простоты мы видим в рассмотрении и всестороннем анализе максимального количества данных наблюдений и экспериментов. Известна глубокая мысль близкого друга Дарвина Томаса Гексли «Математика подобна мельнице, которая мелет, не разбирая, что в нее ни засыпъ». Поэтому в книге содержится, помимо сведений Дарвина, большое количество данных современных экспериментов и наблюдений, которые, мы надеемся, обеспечивают возможность разработки качественных моделей, которые затем засыпаются в математическую мельницу. Причем мы стараемся использовать, возможно, более простую «мельницу». Идея такого подхода была четко сформулирована еще в 19 веке в предисловии к курсу физики Томсона (лорд Кельвин) и Тэта [35], где сказано: «В этой книге мы не избегаем математических трудностей, но и не ищем их — не они являются нашей целью».

Автор считает себя последователем советской и российской школы механиков прикладного направления. Многие из них с гордостью называли себя инженерами. Лучшие ее представители, такие как И.Г. Бубнов, А.Н. Крылов, Н.Е. Жуковский, С.П. Тимошенко, В.В. Новожилов и многие другие, опираясь на опыт, полагали, что «точность» моделей должна соответствовать поставленной задаче и не выходить за рамки погрешности исходных данных. Инженерный подход, очевидно, полностью применим к математическому

описанию природных катастрофических волн, таких как цунами, гигантские океанские волны или волны, возникшие при взрывном зарождении Вселенной. Действительно, обычно мы не знаем исходных данных для катастрофического процесса и часто имеем чисто качественные сведения о его результатах.

Как всякая научная книга, она призвана просвещать читателя. Первые ее два витка вполне доступны самой широкой аудитории. Там практически нет математики. Автор помнит, что каждое очередное математическое выражение резко уменьшает круг заинтересованных книгой лиц. Таким образом, значительный объем книги рассчитан на всех, кого интересует гигантская личность Дарвина и, вместе с тем, на молодого читателя, учащегося в последних классах общеобразовательной школы.

Многие иллюстрации этой книги, которые приведены без ссылок, принадлежат автору. Другие сопровождаются ссылками на источник, откуда взят рисунок. В некоторых случаях рисунки взяты из Интернета. Некоторые иллюстрации воспроизведены из источников (например, из Интернета), которые больше не являются опознаваемыми. Они выделены звездочками [*].

Все материалы и цитаты Дарвина, приведенные в книге, взяты из [6, 36] или даны в переводе автора книги.

Книга содержит пять частей. Первая часть посвящена нескольким дням жизни Дарвина, в течение которых он наблюдал и анализировал быстрое изменение земной поверхности в результате сейсмического удара, что подтвердило его предположения об изменчивости, существующей в Природе. Формулируются идеи Дарвина, связанные с чилийским землетрясением 1835 года, влиянием землетрясений на вулканизм, цунами и моретрясение [37–39]. Затем эти идеи анализируются и сравниваются с современными экспериментальными и теоретическими данными. Отмечается, что предвиденье Дарвина о влиянии землетрясений на вулканы подтвердилось данными наблюдений со спутников в самые последние дни [40]. Еще более впечатляющее подтверждение дала цепочка вулканов, разбуженных японским землетрясением 11 марта 2011 года. В последующих частях книги рассматриваются резонансные и сингулярные, то есть катастрофические, волны.

Часть II посвящена цунами и другим катастрофическим океанским волнам. При их описании используется метод Лагранжа. Выводятся сильно-нелинейные уравнения, описывающие волны, распространяющиеся по воде постоянной и переменной глубины. В случае длинных волн эти уравнения являются некоторым аналогом нелинейных уравнений Эйри (Airy) и Буссинеска (Boussinesq). Для этого случая строятся приближенные аналитические решения, которые являются обобщением хорошо известного линейного решения Даламбера. Волны, бегущие по поверхности воды переменной глубины, опи-

сываются с помощью решения Грина (Green). Последнее записывается в виде, учитывающем влияние трения о дно и дисперсии. Много внимания уделяется океаническим волнам. Для них выводятся уравнения, отличные от нелинейного уравнения Шредингера. Строятся приближенные аналитические решения, описывающие катастрофическое усиление океанских волн. Это усиление объясняется резонансными эффектами. Изучаются уединенные волны и анализируется эволюция волн, проходящих над подводной топографией. Моделируется данное Дарвином описание эволюции цунами в прибрежных водах.

Затем в части III рассматриваются катастрофические океанские волны, достигающие 30 метров высоты. Существование этих волн было под сомнением до последнего времени, хотя, возможно, с одной из этих волн встретился *Бигль* недалеко от мыса Горн. Дарвин отмечает, что судно было почти потоплено гигантской одиночной волной. Такие волны появляются во всех районах Мирового океана как в прибрежной зоне, так и далеко от берега. Для описания этих волн на мелкой и глубокой воде используются различные уравнения, выведенные в первых главах части II. Найдены решения этих уравнений. Решения описывают три типа экстремальных волн: волну с очень крутым фронтом (так называемая «водяная стена»), одиночную волну, которая может иметь огромную высоту и группу волн (так называемые «три сестры»). Появление подобных катастрофических волн объясняется резонансными эффектами. В целом, можно сказать, что части II и III посвящены проблемам океанских волн. Полученные результаты лежат в русле некоторых современных исследований океана [41, 42], хотя как методы исследования, так и результаты имеют определенно выраженную новизну.

Теория разрыхления, разрыва и последующего подъема слабосвязных материалов, почв и магмы в результате быстрой декомпрессии верхних слоев Земли после сейсмического удара развита в части IV. Указанные среды рассматриваются как смеси твердых частиц, жидкости и газа. В частности, изучаются случаи газовых включений и пор, имеющих сферическую форму. Получены приближенные уравнения, описывающие распространение нелинейных волн в этих средах. Отдельно рассматриваются волны, длина которых много больше размера газовых включений, и волны, длина которых сравнима с размерами этих включений.

В последней части книги термин «катастрофическая волна», в первую очередь, связывается с возникновением складок на волновом профиле при прохождении области резонанса. Термин приводится в соответствии с теорией катастроф [43, 44]. Математически описаны новые классы волн, поверхности которых имеют складки, кратеры, извергают капли или струи, или обрамлены вихрями. Особое внимание уделяется эволюции волн в вихри. Этот процесс

связывается с возникновением акустической турбулентности и нестационарными явлениями в Бозе-Эйнштейна конденсате. Анализируется возможность резонансной эволюции гравитационных волн плотности в вихри в процессе начального развития Вселенной, когда скорость этих волн была близка к скорости света. Этот анализ подсказан эффектом Вавилова-Черенкова, возникающем при движении частицы (т.е. волны де Бройля) со скоростью равной или большей, чем фазовая скорость света. Полученные результаты имеют значительную общность, так как следуют из волновых уравнений, описывающих высоко-нелинейные волны в различных средах и полях.

Рассматривая разнообразные катастрофические волны, автор использует уравнения, выведенные для гладких непрерывных функций, следовательно, формально не описывающих разрывные, складчатые и разрушаемые поверхности и их эволюцию. Почему уравнения моделируют такую эволюцию удивительно и самому автору. Здесь он может только сослаться на мнение многих выдающихся исследователей о необъяснимом могуществе математического метода при анализе разнообразных задач. Например, Юджин Вигнер писал о «непостижимой эффективности математики». В некоторых областях физики эта эффективность за последние 40–50 лет стала привычной. В частности, уравнения нелинейной акустики успешно описывают возникновение слабых разрывных (ударных) волн в газе и других средах. Возможно, определенные успехи в описании разрывных и складчатых фронтов поверхностных волн, в моделировании их разрушения, испускания струй связаны с используемой в книге предельной идеализацией этих сложных катастрофических явлений, позволяющей свести их анализ к решению нелинейных алгебраических уравнений.

Таким образом, отталкиваясь от указанных выше наблюдений Дарвина, автор развивает теорию высоко-нелинейных волн. Теория иллюстрируется большим количеством экспериментальных и аналитических результатов. В основе теории лежит понятие резонанса, которое истолковывается достаточно широко. Это понятие для книги настолько важно, что ее можно было бы озаглавить, как «Теория резонансных и трансрезонансных волн и геофизические наблюдения Чарльза Дарвина», однако это не сделано, так как изначально целью исследования было описание катастрофических природных волн. Решение сложных задач, привлечших внимание только в последнее время и которые с той или иной степенью успеха анализируются на основе очень сложных методов, автору удалось существенно упростить. Разнообразные природные волновые явления истолковываются на основе одного единственного — резонансного — механизма. Можно ли считать подобное упрощение и унификацию исследований до сих пор слабоизученных катастрофических природных явлений красивым результатом? Можно ли считать таким проведенный анализ не-

которых наблюдений Чарльза Дарвина? На эти вопросы читатель может ответить после знакомства с содержанием книги.

Части, главы и многие разделы книги сопровождаются эпитафиями. В некоторых случаях это высказывания Дарвина, являющиеся отправной точкой нижеследующего исследования. В других случаях обобщающие мысли и блестящие рифмы великих людей прошлого призваны, хоть в какой-то мере, передать противоречивую атмосферу научного поиска, сопровождавшего работу над книгой, атмосферу, которую не могут передать уравнения и, тем более, сопровождающий их текст автора.

По сравнению с английским вариантом книги настоящее издание существенно переработано. Перевод книги с английского, выполненный Т.Г. Валиуллиной, и последующая публикация ее русского варианта оказались возможны благодаря финансовой поддержке со стороны Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ).



Ш. Галиев

Литература

- [1] Browne, J., 2006. Darwin's "Original of Species". Atlantic Books, London (Браун, Д., 2009. Чарльз Дарвин: Происхождение видов. АСТ, Москва).
- [2] Concise History of Science and Invention. Ed. J. Goddard, National Geographic, Washington, 2010.
- [3] Darwin, C., 1839. Journal of Researches into the Geology and Natural History of the Various Countries Visited by H.M.S. Beagle. Henry Colburn, London. (First edition).
- [4] Darwin, C., 1845. Journal of Researches into the Natural History and Geology of the Countries Visited during the Voyage of H.M.S. Beagle Around the World, under the Command of Captain Fitz Roy, R. N. T. Nelson and Sons, London.
- [5] Albert, E., 1955. The Story of English Literature. Collins, London and Glasgow.
- [6] Чарльз Дарвин. Путешествие натуралиста вокруг света на корабле «Бигль». Государственное издательство географической литературы. Москва, 1953.
- [7] Стоун, И., 1989. Происхождение. Роман-биография Чарльза Дарвина. Издательство политической литературы, Москва.
- [8] The works of Charles Darwin. Eds. P.H. Barrett & R.B. Freeman, vol. 8, London, William Pickering, 1986.
- [9] The works of Charles Darwin. Eds. P.H. Barrett & R.B. Freeman, vol. 9, London, William Pickering, 1986.
- [10] The works of Charles Darwin. Eds. P.H. Barrett & R.B. Freeman, vol. 7, London, William Pickering, 1986.
- [11] Herbert, S., 2005. Charles Darwin, Geologist. Cornell University Press, Ithaca, NY.
- [12] Rudwick, M., 2005. Darwin's first love. *Nature*, **436**, 330.
- [13] Chui, G., 2009. Shaking up earthquake theory. *Nature*, **461**, 870–872.
- [14] Taira, T., Silver, P.G., Niu, F., Nadeau, R.M., 2009. Remote triggering of fault-strength changes on the San Andrea fault at Parkfield. *Nature*, **461**, 636–639.
- [15] Parsons, T., 2009. Last earthquake legacy. *Nature*, **462**, 42–43.
- [16] Stein, S., Liu, M., 2009. Long aftershock sequences within continents and implications for earthquake hazard assessment. *Nature*, **462**, 87–89.
- [17] Davison, C., 1936. Great Earthquakes. Thomas Murby & Co., London.
- [18] Aoi, S., Kunugi, T., Fujiwara, H., 2008. Trampoline effect in extreme ground motion. *Science*, **322**, 727–730.
- [19] O'Connell, D.R.H., 2008. Assessing ground shaking. *Science*, **322**, 686–687.

- [20] Johnson, J.B., Lees, J.M., Gerst, A., Sahagian, D., Varley, N., 2008. Long-period earthquakes and co-eruptive dome inflation seen with particle image velocimetry. *Nature*, **456**, 377–381.
- [21] Linde, A.T., Sacks, I.S., 1998. Triggering of volcanic eruptions. *Nature*, **395**, 888–890.
- [22] Brodsky, E.E., Sturtevant, B., Kanamori, H., 1998. Earthquakes, volcanoes, and rectified diffusion. *J. Geophys. Res.*, **103**, 23,827–23,838.
- [23] Darwin, C. On the connexion of certain volcanic phenomena in South America; and on the formation of mountain chains and volcanoes, as the effect of the same power by which continents are elevated. In *The Collected Papers of Charles Darwin*. Ed. P.H. Barrett, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1977.
- [24] Anderson J.G., 2007. Physical processes that control strong ground motion. In *Treatise on Geophysics*. Ed. G. Schubert, 513–565, Elsevier.
- [25] Rhoades, D.A., Zhao, J.X., McVerry, G.H., 2008. A simple test for inhibition of very strong shaking in ground-motion models. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **98** (1), 448–453.
- [26] Hill, D.P., Pollitz, F., Newhall, C., 2002. Earthquake-volcano interaction. *Physics Today*, **55** (11), 41–47.
- [27] Kawakatsu, H., Yamamoto, M., 2007. Volcano seismology. In *Treatise on Geophysics*. Ed. G. Schubert, vol. 4, 389–420, Elsevier.
- [28] Galiev, Sh.U., 1998. Topographic amplification of vertical-induced waves in natural resonators. <http://kfki.baw.de/conferences/ICHE/1998-Cottbus/333.pdf>.
- [29] Galiev, Sh.U., 1998. Is there some new kind of nonlinear surface waves? The University of Auckland, School of Engineering, Report No. 584.
- [30] Galiev, Sh.U., 1999. Topographic effect in a Faraday experiment. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 6963–7000.
- [31] Galiev, Sh.U., 2003. The theory of nonlinear trans-resonant wave phenomena and an examination of Charles Darwin's earthquake reports. *Geophys. J. Inter.*, **154**, 300–354.
- [32] Galiev, Sh.U., 2008. Strongly-nonlinear wave phenomena in restricted liquids and their mathematical description. In *New Nonlinear Phenomena Research*, Ed. T.Perlidze, 109–300, Nova Science Publishers, NY.
- [33] Narrative of the surveying voyages of His Majesty's Ship Adventure and Beagle, between the years 1826 and 1836, describing their examination of the southern shores of South America, and the Beagle's circumnavigation of the globe. Henry Colburn, London, 1839. Volume 2. Proceedings of the second expedition, 1831–1836, under the command of Captain Robert Fitz-Roy, R.N.

- [34] The Beagle Record, Ed. R.D.Keynes. Cambridge University Press, 1979.
- [35] Thomson, W., Tait, P., 1867. Treatise on Natural Philosophy. The University Press, Cambridge.
- [36] Чарльз Дарвин. Воспоминания о развитии моего ума и характера (автобиография). Перевод с англ. С.Л. Соболя. (Приложение к книге Чарльза Дарвина «Происхождение видов путем естественного отбора». Просвещение, Москва, 1987).
- [37] Galiev, Sh., 2010. Charles Darwin's earthquake reports. Geophysical Research Abstracts, EGU2010, Vienna, Austria, 3738.
- [38] Galiev, Sh., 2010. Darwin's triggering mechanism of volcano eruptions. Geophysical Research Abstracts, EGU2010, Vienna, Austria, 3693.
- [39] Galiev, Sh., 2010. Modelling of Charles Darwin's tsunami reports. Geophysical Research Abstracts, EGU2010, Vienna, Austria, 2588.
- [40] Geoscience: Volcanoes respond to earthquakes. 2010, Nature, 467, 887.
- [41] Нигматулин Р.И., 2010. Океан: климат, ресурсы, природные катастрофы. Вестник РАН, 80(8), 675–687.
- [42] Нигматулин Р.И., 2012. Механика сплошной среды. Изд-во МГУ. Москва.
- [43] Арнольд В.И., 1981. Теория катастроф. Знание, Москва.
- [44] Arnold, V.I., 1991. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Kluwer, Boston.

Часть I.

Чарльз Дарвин и чилийское землетрясение 1835 года. Интерпретация, моделирование и современные научные данные

...Путешествие на *Бигле* было, безусловно, самым значительным событием моей жизни...

Дарвин

Познав жадный, он следил
Кочующие караваны
В пространство брошенных светил;

Лермонтов



Собор в Консепсьоне после разрушительного чилийского землетрясения 1835 года. Картина художника J.C. Wickham.

1. Введение

...Я — геолог...

Дарвин

Во время путешествия на *Бигле* Дарвин находился в Вальдивии и Консепсьоне, Чили, как раз до, в течение и после чилийского землетрясения 20 февраля 1835 года [1]. Несколько дней его внимание было полностью поглощено результатами землетрясения. Он описал «дрожание» островов и горных хребтов, разрушение поверхности земли, извержения вулканов, зарождение и эволюцию волн цунами. В частности, Дарвин писал *...среди других замечательнейших зрелищ, какие мы наблюдали, можно отметить... действующий вулкан; губительные последствия сильного землетрясения. Эти последние явления были мне, быть может, особенно интересны ввиду их тесной связи с геологическим строением Земли. Впрочем, землетрясение на всех должно производить чрезвычайно сильное впечатление: Земля, на которую мы с раннего детства смотрели как на символ незыблемости, колеблется у нас под ногами, как тонкая корка, а глядя, как в один миг рушатся плоды трудов человека, мы чувствуем все ничтожество его хваленого могущества...* [2, стр. 601–602].

Дарвин предположил, что землетрясение было результатом *...разрыва слоев, расположенных не очень глубоко от поверхности земли...* [3, стр. 70] и *...Судя по проявившейся во всей этой цепи явлений тесной и сложной связи между подъемными и вулканическими силами, мы можем уверенно заключить, что те силы, которые медленно или небольшими скачками поднимают материк, и те, которые заставляют вслед за тем вулканические вещества изливаться из открытых кратеров, — тождественны. Исходя из многих соображений, я считаю, что частые землетрясения на этом побережье вызваны разрывом земных пластов, представляющим необходимое следствие того напряжения, которое испытывает суша при поднятии, и инъекцией в образовавшиеся промежутки расплавленных пород. Эти разрыв и инъекция, если они повторяются достаточно часто (а мы знаем, что землетрясения неоднократно постигают одни и те же области и протекают там одинаковым образом), образуют цепи холмов; именно этот процесс и произошел, по-видимому, с вытянутым островом Санта Марии, который поднялся втрое выше соседней местности...* [2, стр. 376–377].

Таким образом, Дарвин писал о напряженности земной коры, и, мы подчеркиваем, объяснил землетрясение и извержения разрывом коры. Он думал, что его наблюдения можно объяснить сильным вертикальным движением поверхности земли, вызванным землетрясением. Возможно, это верно, если вызванные разрывом ускорения земной поверхности являются достаточно боль-

шими. Однако обычно вызванное землетрясением ускорение поверхности земли не является большим (меньшим, чем g). Причем вертикальное движение земной поверхности обычно значительно меньше, чем горизонтальное. Поэтому исследования оценки опасности землетрясения были сосредоточены, в основном, на горизонтальной составляющей движения. Эффекты сильного вертикального движения фактически не обсуждались, так как условия безопасности сооружений от действия гравитационных статических вертикальных сил обычно обеспечивают достаточное сопротивление динамическим силам, возбуждаемым вертикальным ускорением во время землетрясения.

Но что современная сейсмология знает об амплитуде сильного движения поверхности Земли? Может ли сильное вертикальное движение ее поверхности быть ответственным за результаты чилийского землетрясения 20 февраля 1835 года? Могут ли современные экспериментальные и теоретические данные объяснить наблюдения Дарвина? Одна из целей книги — ответ на эти вопросы.

1.1. Экстремальные вертикальные колебания земли при землетрясениях

История сейсмологических наблюдений характеризуется частой переоценкой максимально возможного ускорения земной поверхности, которое может быть вызвано землетрясением. Обычно колебания почвы, которые могут причинить разрушение конструкций, превышают приблизительно $0.1g$. Первая акселерограмма сильного движения, записанная в Лонг-Бич (Long Beach), Калифорния, во время землетрясения Лонг-Бич 10 марта 1933 года, дала пиковые горизонтальное и вертикальное ускорения $0.19g$ и $0.28g$, соответственно [4]. До последнего времени предполагалось, что никакое землетрясение не может произвести ускорение земной поверхности столь же значительное, как g .

Однако данные, представленные недавно [4–8], показывают, что есть приблизительно 25 акселерограмм с пиковым ускорением, большим, чем g . Несколько пиков были близки к $2.5g$ [4]. В буквальном смысле, в последние дни во время землетрясения в Крайстчерче (Christchurch) (февраль 2011 года, Новая Зеландия) было зарегистрировано вертикальное ускорение, равное $2.2g$, заметно превосходящее горизонтальное ускорение. Есть ли свидетельства о существенно более серьезных ускорениях? Беспрецедентно высокое вертикальное поверхностное ускорение, близкое к четырем гравитационным ускорениям ($3.8g$) и превышающее более чем в два раза горизонтальную компоненту ускорения, было измерено в Японии [9]. Вертикальное ускорение было отчетливо асимметрично. Пики ускорения были больше по амплитуде, чем антипики; они также имели тенденцию быть узкими и острыми, тогда как антипики были бо-

лее широкими. На куполе вулкана Сантьягито (Santiaguito), Гватемала, недавно было измерено местное пиковое вертикальное ускорение около 2–3g [10]. Этот пик был связан с резким вертикальным поверхностным смещением купола вулкана. Подъем на 20–50 см имел место в центре купола, и затем он распространялся со скоростью ~ 50 м/сек к периферии купола диаметром 200 метров.

Таким образом, в последние годы показано, что могут иметь место большие вертикальные ускорения, вызванные землетрясениями. В целом, это согласуется с замечаниями Дарвина о конвульсиях и больших движениях земной поверхности.

Пористость верхних осадочных пород Земли и ее рельеф могут усиливать вызванное землетрясением движение земной поверхности. В частности, амплитуда сейсмической волны часто больше в имеющей малую плотность низкоскоростной почве, чем в высокоплотном высокоскоростном граните. Возможно, Дарвин имел в виду этот эффект, описывая руины Талькауано (Talcahuano) *...только три здания, стоявшие на скалистом основании, избежали судьбы всех тех, которые стояли на рыхлой песчаной почве...* [11, стр. 257]. Теперь хорошо известно, что осадочные породы могут усиливать движение земной поверхности относительно жестких глубинных пород [4, 12].

Если пиковое ускорение превышает g , то поверхностные объекты могут быть выброшены в воздух землетрясением. Дарвин сообщает *...Я сильно заинтересовался, найдя на самом высоком пике одного хребта (приблизительно 700 футов выше уровня моря) большой арочный фрагмент, лежащий на его выпуклой или верхней поверхности. Должны ли мы полагать, что он был ранее выброшен в воздух и там перевернут?... [1, стр. 255] и ...во время землетрясения в Чили, которое в 1835 уничтожило Консепсьон, представлялось удивительным, что маленькие тела подбрасывались на несколько дюймов от земли...* [1, стр. 256]. Таким образом, Дарвин описывает сильное землетрясение, при котором ускорение поверхности земли было больше, чем g . Из-за топографического эффекта вызванное землетрясением ускорение вершин гор и вулканов могло бы быть намного больше, чем g .

Известный пример зарегистрирован Олдемом (Oldham) [4]. Он сообщил о камнях и других каменных объектах, которые были отброшены от их начального местоположения на расстояния до 2.5 м при землетрясении 1897 в Ассаме (Assam), Индия. Другие примеры, включая восемь случаев, когда объекты были брошены на расстояния от 2 до 4 м, описаны Мидорикава (Midorikawa) [4]. Во время землетрясения в Крайстчерче (февраль 2011 года, Новая Зеландия) зарегистрированы случаи, когда людей подбрасывало в воздух.

Еще более удивительные явления происходят при моретрясениях, возбуждаемых сильными вертикальными колебаниями дна. На море возникают ог-

ромные столбы воды и обильное выделение пузырей газа, вызванных нестационарными кавитационными процессами у дна моря. Если эпицентр вынуждающего землетрясения находится непосредственно под судном, то оно начинает сильно вибрировать и в некоторых случаях может на какие-то мгновения отделяться от воды [8].

1.2. Особенности разрушения слабосвязных слоев осадочных пород при экстремальных вертикальных колебаниях

Из сказанного следует, что во время сильных вертикальных колебаний, вызванных землетрясением, верхнележащий слабосвязный слой осадков также может отделиться от подстилающей жесткой среды [13–15]. В результате между материалами формируется разрыв (газовая полость). Схлопывание полости и последующее столкновение жесткого основания и верхнележащего материала может генерировать сильно-нелинейные остроконечные или разрывные волны.

Имеется ряд очень интересных экспериментов, в которых песок приводится в движение последовательными вертикальными импульсами [16].

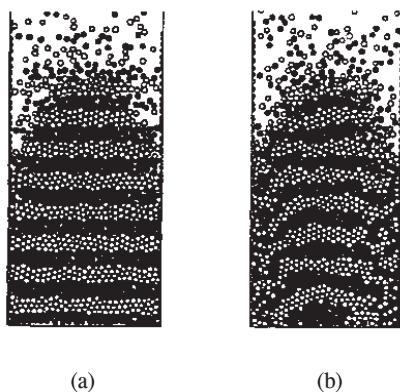


Рис. 1. Положения зерен песка в одинаковой фазе движения после двух последовательных импульсов [16].

Рис. 1 показывает частицы песка, летящие с максимальной амплитудой, для двух последовательных импульсов. Частицы окрашены черным или белым цветом так, чтобы можно было увидеть результат действия каждого импульса. Верхние частицы летят свободно. Наблюдается упорядоченное движение в центральной части материала. Важно отметить, что движение центральных частиц наибольшее около основания. Движение вблизи боковых границ определяется

граничным эффектом. Подобные эффекты, возникающие при взаимодействии слабосвязного материала и твердого вибрирующего основания, могут быть очень интересными для сейсмологии. Дарвин пишет *...колебательное движение колоссальной силы выровняло обломки в один сплошной слой... что нужно сказать о движении, заставившем продвигаться глыбы во много тонн весом как песчинки на колеблющемся столе...* [2, стр. 256].

Фарадей первым [17] начал изучать эффект вертикальных колебаний на слой слабосвязных материалов. Он поместил слой на вибрирующем столе и нашел, что из-за вибраций возникают маленькие неровности и медленная конвекция частиц слоя. Недавние экспериментальные исследования вертикально-возбуждаемых гранулированных сред продемонстрировали богатое разнообразие аналогичных, но более сложных явлений. В частности, для амплитуды ускорения, большего, чем g , эффективная гравитация становится отрицательной, и слой гранул теряет контакт с основанием. Формируется полость между основанием и слоем, затем полость уменьшается. После столкновения слой приобретает скорость основания и остается в контакте с ним до следующего цикла, когда процесс повторяется. Пример возникающих при этом поверхностных волн и полостей дан на рис. 2.

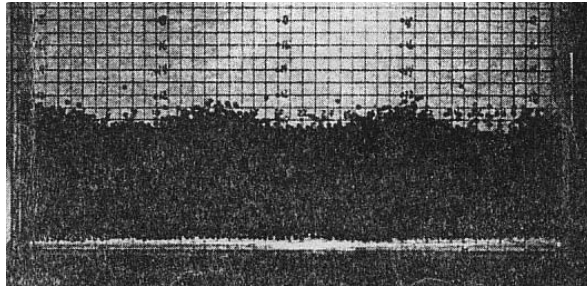


Рис. 2. Пример эксперимента Фарадеевского типа. Фотография поверхностных волн, возникающих при вертикальных колебаниях гранулированного материала в контейнере [18]. Полость между летящей компактной массой и основанием хорошо видна. Вертикальное ускорение составляло $3.3g$. Это ускорение меньше, чем вертикальное ускорение, измеренное во время землетрясения Ивате-Мияги в Японии 14 июня 2008 года ($3.8g$) [9].

Когда вынуждающее вертикальное ускорение существенно превышает гравитационное ускорение, материал слоя демонстрирует удивительно сложное поведение. Оно включает состояния, в которых частицы формируют поверхностные волны, или «облако» частиц со слабой структурой или полным ее отсутствием (см. рис. 1), и состояния, когда частицы перемещаются как компактная масса (упругое, или прыжковое, движение). Рисунки 1 и 2 иллюстрируют явления, которые могут иметь место при катастрофических землетрясе-

ниях. Схема упругого (прыжкового) движения [13, 14] использовалась с тем, чтобы объяснить сильные колебания холма Тарзана (Tarzana Hill) во время Калифорнийского землетрясения (17 января 1994 года). Пиковое горизонтальное ускорение холма равнялось $1.78g$, пиковое вертикальное ускорение было $1.14g$. Исходя из описанных выше экспериментов, было решено, что имелся некоторый пороговый (спусковой) уровень ускорения, вызванного землетрясением. Когда ускорение превысило этот уровень, произошло очень сильное увеличение амплитуды колебаний вершины холма Тарзана. При моделировании этих колебаний Галиев [14] исходил из того, что вызванные землетрясением вертикальные колебания холма Тарзана могли напоминать прыжки шара или столба жидкости на вибрирующем основании. По-видимому, модель Галиева является достаточно общей. В частности, она позволяет качественно понять особенности колебаний верхних слоев Земли при очень сильных землетрясениях. Аналогичную модель, почти через 10 лет после публикации [14], предложили японские ученые, изучавшие землетрясения Ивате-Мияги (Iwate–Miyagi) [9].

Чтобы проиллюстрировать эту новую идею, принято [14], что жесткое основание холма может быть моделировано колеблющимся металлическим поршнем, а верхнележащую слабосвязную почву холма можно рассматривать как жидкость (вода). Таким образом, моделировался высококонтрастный импеданс между почвой холма Тарзана и его жестким основанием. Затем результаты экспериментов Натансона [19] с высоким столбом воды, возбуждаемым внизу поршнем, использовались для анализа колебаний холма Тарзана [13, 14].

На рис. 3 приведены осциллограммы давления, которое измерялось около поршня [14, 19]. Синусоидальные кривые показывают положение поршня. Во время экспериментов ускорение поршня медленно увеличивалось от $0.2g$ до $2g$ и затем медленно уменьшалось до $0.37g$. Можно видеть, что в частотном диапазоне, простирающемся от 7.7 гц до 17 гц, имеются большие изменения амплитуды и формы волн давления. Когда вертикальное ускорение превышает g , тогда гармонические колебания преобразовываются в пики, которые соответствуют столкновениям верхнерасположенного материала и основания. Слабопеременные части кривых давления соответствуют свободному полету материала. Таким образом, выше основания образовывалась зона разрежения (кавитационная полость). Когда вынуждающее ускорение уменьшается, тогда имеет место сильно-гистерезисный эффект. Для этого случая разрывные волны существуют в системе до $0.5g$, когда они мгновенно трансформируются в гармонические волны очень маленькой амплитуды. Таким образом, согласно экспериментам (см. рис. 3), сильно-нелинейные разрывные волны могут быть инициированы в верхнележащем материале, когда вертикальное ускорение жесткого основания превышает гравитационное ускорение g . Линейные

непрерывные волны возбуждаются, если вынуждающее вертикальное ускорение меньше, чем $0.5g$.

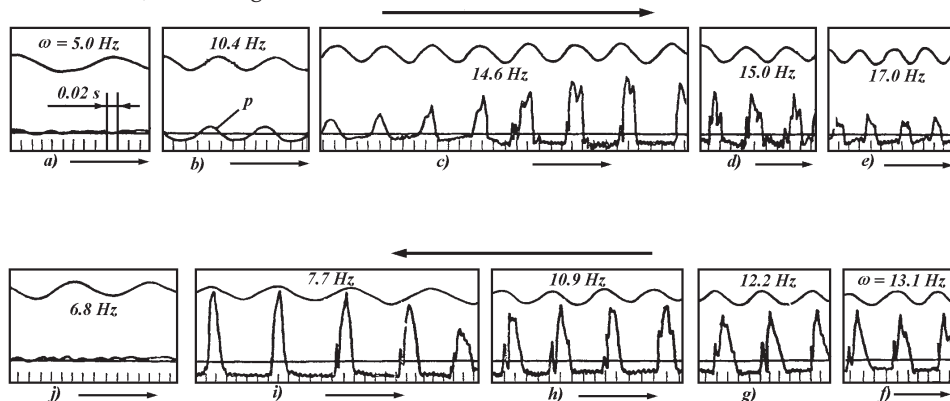


Рис. 3. Гистерезисная динамика сильно-нелинейных колебаний водяного столба (вынуждающая амплитуда — 0.002 м., высота столба — 7 м). Вертикальное ускорение медленно увеличивается от $0.2g$ до $2g$ (возбуждающая частота от 5 гц до 17 гц) и затем медленно уменьшается до $0.37g$ (возбуждающая частота от 13.1 гц до 6.8 гц) [14, 19].

Следовательно, если вертикальное ускорение увеличивается за некоторый пороговый уровень, то линейное описание сейсмических волн становится неприменимым. Влияние нелинейности растет, и она изменяет как амплитуду, так и форму поверхностных волн. В частности, волна разрежения (кавитация) периодически возникает выше вибрирующего основания. Однако, согласно рис. 3, амплитуда возбуждаемых волн ограничена и зависит от гистерезисного эффекта. Из-за этого эффекта максимальное увеличение имеет место, когда вынуждающее ускорение приблизительно равняется $0.5g$. В целом, этот факт соответствует полевым наблюдениям. Сильные сейсмические движения часто усиливаются благодаря местным эффектам слабее, чем умеренные сейсмические движения [4, 8].

Отмеченная выше аналогия колебаний холма Тарзана и столба воды в экспериментах Натансона согласуется с данными землетрясения Ивате-Мияги 2008 года в Японии [9]. На рис. 4 приведена акселерограмма очень сильного вертикального ускорения поверхностного осадочного слоя, расположенного на жестком вулканическом туфе. Измеренное максимальное положительное ускорение было около $3.8g$, в то время как отрицательное ускорение не падало ниже $1.7g$ и соответствовало отделению слоя осадков от подстилающего основания. Видно, что разрывные колебания столба воды (рис. 3) могут качественно моделировать сильно-нелинейные разрывные колебания верхних слоев Земли во время катастрофических землетрясений.

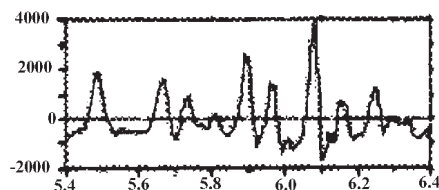


Рис. 4. Акселерограмма поверхностного слоя Земли во время землетрясения Ивате-Мияги в Японии. Ускорение дано в 0.001 g, время — в секундах [9].

Столкновение верхнерасположенного материала с жестким подстилающим основанием порождает волну сжатия с крутым фронтом, подобную ударной волне. Отражение этой волны от свободной поверхности материала генерирует волну разрежения (расширения). Внутри волны разрежения поровый объем материала увеличивается, в результате чего материал переходит в состояние, подобное газу, и происходит подъем его свободной поверхности. Эти процессы иллюстрируются рис. 5. Подобные явления могут иметь место в результате импульсного взаимодействия жесткого подстилающего основания с расположенным сверху осадочным слоем. Таким образом, волны сжатия и волны разрежения могут возбуждаться в верхнележащем слабосвязном материале в результате вертикального ускорения подстилающего основания. В пределах зон сжатия объем пор материала уменьшается, а поровое давление увеличивается. Внутри волны разрежения объем пор увеличивается, и материальные частицы начинают перемещаться, практически не взаимодействуя друг с другом (см. рис. 1 и 5).

В целом, процессы разрушения и разрыхления верхнележащего материала и подъема его свободной поверхности, показанные на рисунках 1, 2 и 5, соответствуют данным многих экспериментов (см., например, [21]). Эти рисунки также качественно иллюстрируют одну из причин поднятия поверхности Земли во время катастрофических землетрясений.

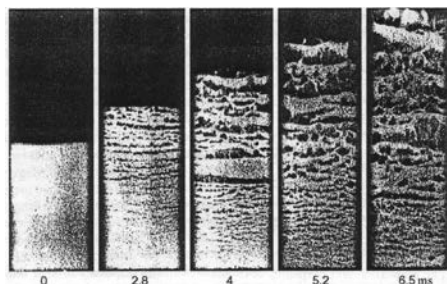


Рис.5. Разрушение и поднятие поверхности первоначально-сжатого гранулированного материала (маленькие стеклянные шарики) в волне разрежения [20].

Физическое понимание причин аномального ускорения $3.8g$ [9] требует детального исследования сильного движения верхних слоев в результате вызванных землетрясением ударов. Мы показали (см. рис. 1–5), что это явление может быть связано с разделениями, столкновениями и разрушениями поверхностных слоев Земли. Конечно, разрушение и поднятие поверхности верхнележащего материала могут быть только, если вызванное землетрясением вертикальное ускорение жесткого основания является достаточно большим.

1.3. Неустойчивость земной коры и связь сейсмических и вулканических явлений

Дарвин надеялся развить общую теорию землетрясений. Согласно ему *...Часто случается, что одна и та же конвульсия возмущает большие области земного шара, и странные шумы распространяются на много сотен миль вглубь стран...* [3, стр. 59] и *...в других частях мира должны формироваться трещины и, как следствие, условия для землетрясения...* [3, стр. 74]. В частности, он начал думать о неустойчивости частей земной коры, которые содержат трещины. Обсуждая различные виды землетрясений, Дарвин писал *...Если бы жидкое вещество, на котором, я полагаю, земная кора покоится, постепенно опускалось вместо того, чтобы подниматься, то там появилась бы тенденция возникновения полостей и, следовательно, направленного вниз давления; или полости закрывались бы обрушивавшимися массами земной коры, производящими эффект огромного взрыва. Такие землетрясения... редко сопровождались бы извержениями...* [3, стр. 74].

В последнее время было найдено, что сильные вертикальные ускорения могут возбуждаться землетрясениями. При этом может происходить разрушение поверхностного слабосвязного материала и образование многих трещин около поверхности Земли. В целом, это согласуется с замечанием Дарвина: *...это сопровождается многими незначительными трещинами, которые, прорастая вверх почти до поверхности, вместе с тем не достигают ее (за исключением сравнительно редкого случая подводного извержения)...* [3, стр. 71]. Из-за топографического эффекта трещины могут быть максимальными на горных вершинах.

В случае вулканов это может привести к разрушению материала кратеров и одновременному извержению многих вулканов. Дарвин [1, стр. 380] сообщает *...последовательность вулканов, расположенных в Андах, ...мгновенно извергнула темный столб дыма...*

Землетрясения часто предшествуют вулканическим извержениям. Интерпретация этой связи — давняя проблема [22–25]. «Связано ли это извержение

с тем землетрясением?». Это вопрос, который часто задают вулканологи и сейсмологи. Традиционный ответ: «Вряд ли» [23]. Согласно Дарвину [1, стр. 380–381], вызванный землетрясением сейсмический удар может быть общим механизмом, вызывающим одновременные извержения вулканов, разделенных большими расстояниями. Дарвин пишет, что *...поднятие многих сотен квадратных миль территории около Консепсьона — часть того же самого явления, с выплескиванием, если можно так выразиться, вулканического материала через отверстия в Кордильерах в момент удара...* [3, стр. 60]. Действительно, согласно экспериментам (см. рис. 5), слабосвязный первоначально сжатый материал может извергаться из трубы в результате быстрой декомпрессии. Вызванное землетрясением вертикальное ускорение основания вулкана может вызвать аналогичное извержение магмы из канала вулкана. Чарльз Дарвин пишет: *...Если бы землетрясение... не действовало никаким другим способом, кроме как, просто ломая корку на лаве внутри кратеров, то в этом случае, возможно, имело бы место только несколько выбросов дыма...* [3, стр. 61].

Согласно Дарвину, земная кора — система, где зоны, содержащие трещины, и зоны сейсмической и вулканической активности взаимодействуют. Дарвин сформулировал задачу совместного рассмотрения процессов, которые изучаются сейчас сейсмологией и вулканологией [4, 22–25]. Он связал эти процессы с вызванным землетрясением вертикальным движением (ускорением) земной поверхности. Если $g > 1$, то волны разрежения могут возникать около поверхности Земли. Если интенсивность этих волн является достаточно большой, то поверхностные слои вулканических кратеров могут быть разрушены, что приведет к одновременному извержению нескольких вулканов.

Таким образом, мы рассмотрели эффекты, связанные с сильными вертикальными колебаниями верхних слоев земли. Именно с подобными сильными вертикальными движениями Дарвин связывал возникновение описанных им сейсмических эффектов. Для нас важно, что возможность таких колебаний в последние годы твердо установлена. Это сняло все сомнения и открыло путь нашему исследованию. Удивительно, но появление интереса Дарвина к эффектам, возникающим при вертикальных колебаниях моря и слоев Земли, почти совпало по времени с экспериментальными исследованиями Фарадея вертикально возбуждаемых волн на поверхности жидких и гранулированных сред. Эти волны, которые часто называют волнами Фарадея, будут рассмотрены внимательно в части V книги.

Мы обсудили ряд сейсмических наблюдений Дарвина. Более детальному рассмотрению его наблюдений, сопровождаемому в частях II–V их математическим анализом, посвящена эта книга.

2. Извлечения из некоторых публикаций Чарльза Дарвина и его основные геофизические идеи

2.1. Некоторые геологические и исторические сведения, связанные с путешествием Дарвина

20 февраля 1835 года сильное землетрясение поразило Вальдивию, и Дарвин был при этом. В результате подземного удара почти каждое здание в области было повреждено или разрушено. Затем *Бигль* прибыл в Консепсьон. При заходе в бухту Консепсьона, Дарвин высадился на маленьком острове Кирикина. Там он нашел участки поверхности, которые были подняты землетрясением на несколько футов. Он был поражен этим фактом, увидев в нем явное подтверждение того, что Анды и, соответственно, вся Южная Америка очень медленно поднимаются над уровнем океана. Это подтверждало теорию Чарльза Лайелля (Charles Lyell), согласно которой континенты поднимаются в результате крошечных вертикальных приращений в течение очень длительного периода времени. (Английский геолог Чарльз Лайелль (1797–1875) — один из основателей геологии и близкий друг Дарвина. Первый выпуск его *Принципов Геологии* был настольной книгой Чарльза Дарвина во время путешествия на *Бигле* [26]. Между 1830 и 1833 Лайелль издал три тома своей основополагающей книги. В ней Лайелль, основываясь на собственных наблюдениях, обрисовывал в общих чертах теорию, которая по существу утверждала, что мир был сформирован теми же самыми геологическими процессами, которые могут наблюдаться в действии и сегодня. Лайелль утверждал, что поверхность Земли постепенно, в течение длительных периодов времени, изменялась под действием эффектов, связанных с извержениями, землетрясениями, эрозией и осадками. Соответственно, эта новая теория оценивала возраст Земли в сотнях миллионов лет, а не тысячах согласно библейским хронологиям. Дарвин был восхищен идеями Лайелля и полагал, что они оказали важное влияние на его теорию естественного отбора.) На следующий день он прибыл в прибрежный город Талькауано и оттуда проехал на лошади в Консепсьон, где встретился с *Биглем*.

Во время путешествия Дарвин сконцентрировался на одной важной геологической проблеме: возвышение и понижение поверхности Земли. Это лежало в основе его интереса к эффектам землетрясения, которое он наблюдал в Чили. Дарвин увидел воочию подъем поверхности Земли. Это наблюдение сформировало его мнение, что высокие Анды возникли в результате вертикального движения земной коры. Современная теория связывает появление этих гор с горизонтальным движением тектонических плит.

В этой главе мы представляем страницы из его дневника и записей наблюдений [11]. В них Дарвин впервые формулирует свои мысли о землетрясениях и вызванных ими цунами. Затем приводятся материалы из первой (1839) публикации *Журнала Исследований* [1], связанные с чилийским землетрясением 1835 года. Далее воспроизведены страницы из его книги *Автобиография Чарльза Дарвина*, связанные с кругосветным путешествием.

В конце этой главы мы кратко формулируем идеи Дарвина о вызванных землетрясением катастрофических явлениях.

2.2. Извлечения из материалов Дарвина, описывающих путешествие военного корабля *Бигль*

Интересующие нас материалы Дарвина впервые были опубликованы в отчете о путешествии *Бигля* [27]. Только затем, через несколько месяцев, но в том же 1839 году, Дарвин опубликовал описание своего путешествия отдельной книгой [1].

Материалы отчета [27], конечно, менее известны, чем книга, хотя они неоднократно переиздавались. Для нас эти материалы очень интересны. По-видимому, они менее, чем последующая книга, подвергались литературной обработке и поэтому передают более ранние впечатления Дарвина и дают представление о наиболее поразивших его явлениях. Мы используем эти материалы в виде, представленном в сборнике [11]. Там же содержатся выдержки из его дневника. Каждому материалу в сборнике предшествует маленький подзаголовок. Мы их здесь сохраняем с указанием соответствующих страниц сборника [11]. В извлечениях описывается время после землетрясения 20 февраля, которое застигло *Бигль* в Вальдивии. Затем *Бигль* отправился на север, продолжая топографическую съемку побережья Чили, 4-го марта он достиг порта Консепсьона.

Дневник. Стр. 277–278. Поздно 24-го февраля мы бросили якорь вблизи острова Моша, и следующая неделя была занята топографической съемкой его берега и пространства между ним и материком. Часто ощущались более или менее сильные удары землетрясений; иногда я думал, что судно случайно снялось с якоря, и якорная цепь потеряна. В то время как судно стояло на якоре, я часто ощущал, что оно движется, пока я не видел, что нет ни волнения, ни потока, ни ветра, достаточного, чтобы переместить его. Мы, естественно, заключили, что это связано с конвульсиями земли, и встревоженные судьбой Консепсьона, поспешили в залив Талькауано, как только наша работа позволила сделать это: прибыв туда 4-го марта — к нашему огорчению — мы увидели повсюду руины.....

.....Город Консепсьон стоит на равнине, незначительно выше уровня реки Био Био. Почва рыхлая и состоит из наносных пород. В восточном и северном направлениях находятся скалистые нерегулярные холмы, у основания которых везде было видно разрушающее действие сильных конвульсий, в частности, большие трещины, от дюйма до больше, чем фут шириной. Казалось, как будто земля основания холмов отделена от них и подверглась более сильному удару.....

.....В Талькауано большое землетрясение 20-го февраля было ощутимо так же сильно, как и в городе Консепсьоне. Оно имело место в то же самое время, и эффект его был аналогичный: только три здания, стоявшие на скалистом основании, избежали судьбы всех тех, которые стояли на рыхлой песчаной почве, которая простиралась между берегом моря и холмами. Почти все жители спаслись; но едва они пережили неожиданные губительные удары, и страх начал исчезать, как море начало отступать от берега! О Пенко не забыли; опасаясь гигантской волны, жители как можно быстрее побежали к холмам (**Замечание** автора — Пенко — населенный пункт на побережье, см. рис. 35).

Около получаса после удара, когда большая часть населения достигла холмов — море, отступившее так, что все суда на якорю, даже те, которые стояли на глубине семь морских саженей, были на мели, и каждая скала и мелководье в заливе стали видны — была замечена огромная волна, движущаяся через западный проход, который отделяет остров Кирикина от материка. Эта ужасная волна прошла быстро вдоль западной стороны залива Консепсьона, смывая с крутых берегов каждый предмет, расположенный в пределах тридцати футов (вертикальных) от высокой отметки уровня воды. Затем волна опрокинулась, выплеснулась вперед и закружила суда, как будто они были легкими лодками; затопила большую часть города и после помчалась назад таким потоком, что все то, что землетрясение не похоронило под руинами, было снесено в море. Через несколько минут суда были снова на мели, и появилась вторая волна, имеющая больший импульс, чем первая; но, хотя она была более сильной, ее эффекты были не столь значительны — просто, потому что почти ничего не осталось, что бы разрушить. Снова море ушло, унося деревянные строения и легкие элементы зданий и оставляя суда на мели.

После нескольких минут ужасного затишья третья огромная волна была замечена между Кирикином и материком, очевидно, большая, чем любая из прежних двух. Взрывая при ударе с непреодолимой силой о препятствия, она двигалась — разрушая и подавляя все — вдоль берега. Быстро отступив, как будто отвергнутая основанием холмов, волна унесла такое количество домашних принадлежностей, заборов и других вещей, что после того, как отлив за-

кончился, море, казалось, было полностью покрыто результатами разрушений. Земля и вода дрожали, как будто полное истощение последовало за прежними гигантскими усилиями.....

.....Без объяснения кажется удивительным, как суда избежали потопления. Там было три больших китобойных судна, барка, два брига и шхуна, расположенные очень близко от города, на глубине от четырех до семи морских саженей: каждое судно держалось на единственном якорю, с достаточной длиной кабеля: только одно было хорошо пришвартовано.

Из-за южного бриза, который был довольно сильным во время землетрясения, эти суда были отнесены в сторону моря относительно их якорей, и их кормовые части смотрели в сторону моря; и они оказались на мели в этом положении. Капитан порта, Д. Пабло Делано, был на борту одного из китобойных судов, на котором закрыли люки и потушили судовые огни. Все это было сделано для обеспечения безопасности. Первая большая волна подошла гладкой выпуклостью к корме судна, опрокинулась и подняла судно, не причинив никакого материального вреда, кроме как омыла его палубу: лишь слабо натянутый кабель, влекомый по грязи, показывал, насколько первый натиск океана ослабевает. Кружа судно, вода убежала в сторону моря, оставив судно на мели почти в его прежнем положении. Таким образом, сначала некоторые суда стояли на глубине двух морских саженей, затем суда оказались на мели, и, наконец, глубина увеличилась до десяти, когда вода в волне была самая высокая. Когда две последующих волны пришли, суда вели себя так же, как и в случае первой волны: они противостояли силе волн, хотя стояли на легких якорях. Однако некоторые из судов сблизилась из-за ярости волн, когда их вращало, как будто в вихре водоворота. До действия волн Полина и Орион, два торговых судна, стояли обособленно на длине полного якорного кабеля; после того, как волны прошли, они оказались рядом, причем имелось три переплетения их кабелей. Каждая волна вращала одно судно относительно другого, нос одного судна был пробит, другой имел незначительные повреждения.

Изложение фактов. Стр. 402–409. Отметка на стене дома капитана Делано позволила установить, что уровень воды оказался на двадцать пять футов выше уровня обычного прилива. Вода проникла всюду, оставив морские водоросли, висящие на остатках крыш или вершинах сломанных стен. Однако эти отметины не определяют общую высоту волны. Масса воды, стремительно накатывающаяся на наклонный берег, естественно, сохраняла в течение некоторого времени свой импульс, достигая на поверхности берега большой высоты. Те, кто со стороны наблюдал набегающие волны, оценивали их высоту как достигающую верхнюю часть корпуса фрегата; или от шестнадцати до двадца-

ти футов выше уровня остальной части воды в заливе. Те части волны, которые встретили противоположное течение, опрокинулись с ужасным шумом, приблизительно в половине мили от берега. Люди, стоящие на высотах и просматривавшие оттуда оба залива, видели, что море прибывало волнами в Сан Висенте в то же самое время, когда волны двигались на Талькауано. Подземный удар в Сан Висенте, и море, надвигающееся с обеих сторон, подвели многих к мысли, что полуостров Тумбес может отделиться от материка, и многие снова побежали, пока не достигли вершин холмов.

Изложение фактов. Стр. 411. Помимо потерь от землетрясения и трех гигантских волн, которые, двигаясь от двух западных пунктов острова, объединились, чтобы затопить низину около деревни, остров Санта Мария был поднят землетрясением на девять футов. А именно, южная оконечность острова была поднята на восемь футов, середина на девять, а северный конец — до десяти футов. *Бигль* посетил этот остров дважды — в конце марта и в начале апреля: при первом посещении было найдено, — из очевидных свидетельств умерших в результате поднятия моллюсков, отметок уровня воды, измерений и из устных показаний местных жителей, — что земля была поднята приблизительно на восемь футов. Однако, при возвращении в Консепсьон, возникли сомнения и, чтобы уладить их, один из владельцев острова, Дон С. Пэлмы, сопровождал нас во второй раз. Внушающий уважение местный житель, который хорошо знал этот остров, жил там два года и отлично знал его берега, так же был пассажиром *Бигля*.

Когда мы высадились, местный житель, которого звали Антни Вогелборг, показал мне место, на котором он имел обыкновение прежде собирать «хорос» (*choros*), ныряя за ними при максимальном отливе. При этом, стоя на уровне «хорос», и держа руки над головой, он не мог до землетрясения достать поверхности воды: его рост составляет шесть футов. Когда я был там, на том месте «хорос» едва только покрывался самым высоким приливом (*spring-tide*).

После, обследуя берега острова вместе с Доном Сэльвэдором и Вогелборгом, я сделал много измерений в местах, где ошибка исключалась. На больших скалах с крутыми склонами, где вертикальные измерения могли быть сделаны точно, слои мертвых моллюсков оказались на десять футов выше недавней высшей точки прилива. Несколько дюймов выше того, что было наивысшей точкой прилива, находились гниющие моллюски и морские водоросли, которые, очевидно, не соприкасались с морской водой после поднятия земли. На один фут ниже, чем самый высокий слой моллюсков, несколько «приставок» (*limpers*) и «хитонов» (*chitons*) (хитоны — это морские моллюски длиной до 0.4 м, которые могут сворачиваться в клубок) удерживались на ска-

ле, где они росли. На два фута ниже те же самые моллюски, хитоны и приставаки были в изобилии.

Обширная скалистая низменность лежит в северных частях Санта Марии. Перед землетрясением она была покрыта морем, только некоторые скалы проявляли себя: после землетрясения вся поверхность начала обозреваться; и квадратные акры (или много квадратных метров) скалистой плоскости были покрыты мертвыми моллюсками, испускающими отвратительное зловоние. Южный порт Санта Марии был почти разрушен указанным возвышением земли: там осталось небольшое убежище и очень плохой причал: глубина прибрежной воды вокруг острова уменьшилась до полторы морских сажени.

Изложение фактов. Стр. 413–414. Хотя как будто бы было бесспорно доказано, к удовлетворению каждого человека в окрестности, что поднятие земли произошло до размеров, упомянутых в предыдущей главе, я сильно подозреваю, что понижение также имело место, начиная с момента поднятия, и оно было значительным, если не эквивалентным прежнему поднятию. Эта идея подтверждается тем фактом, что, когда я был последний раз в Талькауано, в июле 1835, спустя только четыре месяца после большой конвульсии, берега залива Консепсьона возвратились в их прежнее положение относительно уровня моря: тем, что жители Тубула сказали мне, когда я приехал туда верхом, что море, вернулось к его центру (подразумевалось, что оно вернулось к своему обычному уровню), и тем, что жители Санта Марии, сказали мне, что в течение трех или четырех недель немедленно после землетрясения их небольшой порт был намного более мелким, чем он был, когда я оказался там спустя семь недель.

Обоснована ли эта догадка, может показать ближайшее будущее; если она будет подтверждена, то будет объяснено различие мнений о поднятии земли около Вальпараисо, где некоторые утверждают, что она поднялась на несколько футов в течение последних двадцати лет, в то время как другие отрицают это в принципе. Земля, возможно, была поднята, или, как говорят геологи, она приподнялась на какое-то время, но с тех пор, возможно, она постепенно опустилась к ее старому положению. В месте, подобном заливу Вальпараисо, где пыль все время приносится на кромку воды, и даже далее в море; и где много потоков приносят частицы горных пород, трудно сформулировать однозначное мнение относительно поднятия земли, как из-за берега, наступающего на воду, так и ее уменьшающейся глубины.

В поездке вдоль берега залива Консепсьон, с господином Раусом, мы изучили стену старой крепости Пенко и нашли на одной стороне дату 1686, а на другой 1687.

Эта крепость и фундаменты соседних домов располагались настолько близко от моря, что я был удивлен тем, что жители не боялись быть затопленными частыми приливами, только на несколько футов более высокими, чем ежедневные.

Если все это побережье было более или менее поднято в течение сравнительно недавнего времени, то, как фундаменты Пенко все еще стоят на краю воды лишь немного выше уровня наивысшего прилива?

2.3. Извлечения из книги *Журнал Исследований*

20 февраля. — Этот день отмечен в летописях Вальдивии как день самого сильного землетрясения, какое только приходилось пережить местным старожилам. Я случайно находился около берега и, лежа в лесу, отдыхал. Землетрясение произошло внезапно и длилось две минуты; но время это казалось гораздо более долгим. Колебание почвы было весьма ощутимым. Мне и моему спутнику казалось, что колебания шли прямо с востока, тогда как другие считали, что они приходили с юго-запада; это показывает, как трудно часто бывает почувствовать направление вибраций. Устоять прямо на ногах было нетрудно, но движение почвы вызвало у меня чуть ли не головокружение. Это было несколько похоже на покачивание судна при легкой боковой зыби или скорее на то, что ощущает человек, скользя по тонкому льду, который прогибается под тяжестью его тела.

Сильное землетрясение сразу разрушает наиболее привычные ассоциации; земля, этот символ неизбылемости, движется у нас под ногами подобно корке на жидкости; этот миг порождает в нашем сознании какое-то необычное ощущение неуверенности, которого не могли бы вызвать целые часы размышлений. В лесу, где ветерок шевелил деревья, я ощущал только дрожание почвы, но не видел никаких последствий этого. Капитан Фиц-Рой и офицеры находились во время толчка в городе, и там картина была много страшнее: хотя деревянные дома не разрушались, но они сильно тряслись и доски скрипели и трещали. Люди в величайшем смятении ринулись на улицу. Я мало сомневаюсь, что это сопровождение порождает тот ужас перед землетрясениями, который испытывает всякий, кому пришлось видеть и испытать их эффект. В лесу это

JOURNAL OF RESEARCHES
INTO THE
GEOLOGY
AND
NATURAL HISTORY
OF THE
VARIOUS COUNTRIES
VISITED BY H. M. S. BEAGLE,
UNDER THE COMMAND OF CAPTAIN FITZROY, R.N.
FROM 1832 TO 1836.
BY
CHARLES DARWIN, Esq., M.A. F.R.S.
SECRETARY TO THE GEOLOGICAL SOCIETY.
LONDON:
HENRY COLBURN, GREAT MARLBOROUGH STREET.
1839.

было чрезвычайно интересное, но отнюдь не внушающее страха явление. Весьма любопытно проявилось действие землетрясения в море. Самый сильный толчок произошел во время отлива; одна старуха, которая была в то время у моря, рассказывала мне, что вода очень быстро, но небольшими волнами прилила до своей верхней черты при приливе, а затем так же быстро отхлынула до нормального уровня; это было ясно видно и по границе мокрого песка. Такого же рода быстрый, но спокойный прилив произошел несколько лет назад на Чилоэ во время легкого землетрясения и вызвал там понапрасну большое смятение. В продолжение вечера были еще другие более слабые удары, вызвавшие в гавани необыкновенно хаотические течения, а также несколько весьма сильных толчков.

22 декабря. — Мы покинули Вальдивию и 4-го марта вошли в гавань Консепсьона. Пока корабль продвигался против ветра к якорной стоянке, которая находилась в нескольких милях, я высадился на острове Кирикина. Управитель имения поспешно выехал навстречу, чтобы сообщить нам ужасные новости о большом землетрясении 20-го числа: ни в Консепсьоне, ни в Талькауано (порту) не осталось ни одного дома; разрушено семьдесят деревень; огромная волна почти начисто смыла развалины Талькауано. Многочисленные доказательства этого факта я вскоре увидел своими глазами; весь берег был усеян бревнами и мебелью, как будто здесь потерпели крушение тысячи кораблей. Кроме множества стульев, столов, книжных шкафов и т. п., тут было несколько крыш, которые сорвало с маленьких домов и перенесло сюда почти в сохранности. Торговые склады Талькауано были разбиты, и на берегу валялись большие мешки с хлопком, травами и другими ценными товарами. Прогуливаясь по острову, я заметил, что множество обломков камней, которые, судя по облепившим их морским организмам, еще недавно лежали, должно быть, глубоко под водой, теперь были выброшены далеко на берег. Один из них был шести футов в длину, трех в ширину и двух в толщину.

На самом острове столь же ясно заметны были следы сокрушительной силы землетрясения, как на взморье — следы последовавшей за ним огромной волны. Почва во многих местах дала трещины в направлении с севера на юг; это направление может быть объяснено влиянием крутых параллельных берегов этого узкого острова. Некоторые трещины около береговых обрывов были шириной в целый ярд: с обрывов уже упали на берег громадные глыбы; и жители полагали, что с началом дождей произойдут гораздо большие оползни. Действие вибрации на твердый первичный сланец, образующий основу острова, было еще любопытнее: поверхностные слои некоторых узких гребней невысоких гор были до того разбиты, что, казалось, будто их взрывали порохом.

Это действие, проявившееся в свежих изломах и смещении почвы, ограничилось, должно быть, во время землетрясения, поверхностным слоем, ибо в противном случае во всем Чили не осталось бы ни одного сплошного массива горной породы. Впрочем, этого и следовало ожидать, так как известно, что на поверхности любого колеблющегося тела колебания сказываются иначе, чем на его центральной части. Этой же причиной, быть может, объясняется и тот факт, что в глубоких рудниках землетрясения отнюдь не производят таких ужасных разрушений, как можно было бы ожидать с первого взгляда. Я убежден, что это землетрясение сильнее способствовало уменьшению размеров острова Кирикина, чем постоянное разрушающее действие непогоды и моря в течение целого столетия

.....Известно, что почти каждое серьезное землетрясение вызывает волнение прибрежного моря. Волнение, кажется, как в случае Консепсьона, бывает двух видов: во-первых, в момент удара вода обрушивается на берег, и затем как бы спокойно и медленно отступает, во-вторых, некоторое короткое время после этого море быстро отходит от берега, а затем возвращается в виде огромных волн сокрушающей силы.....

.....Это явление, как это представляется мне, определяется общим волновым движением воды, исходящим из некоторой линии или точки, находящихся не очень далеко от берега. Известно, что распространяющиеся от лопастей парохода волны опрокидываются на наклонном берегу спокойной реки. При этом вода сначала отступает на два или три фута, а затем возвращается в виде маленьких бурунов; аналогичная последовательность наблюдается и при землетрясении. Из-за угла между направлением движения парохода и волнами, исходящими от него, судно проходит достаточно длинное расстояние, прежде чем соответствующие волны достигнут берега, и, следовательно, это движение не имеет отношения к смещению воды в результате обтекания самого корпуса судна. Действительно, это кажется общим обстоятельством, что во всех случаях, когда устойчивость волнового движения нарушена, вода наступает на ограничивающую поверхность в виде опрокидывающихся волн. (Я обязан мистеру Ухевел (Whewell), который объяснил мне влияние берега на потерю устойчивости набегающих волн.) Рассматривая затем волну, возбуждаемую землетрясением, как возмущение, истекающее из некоторой точки или линии в море, мы можем видеть, первое, появление возмущения некоторое время после подземного удара; второе, возмущение воздействует на берег материка и далеко расположенные от берега острова одинаково — именно, сначала вода отступает от суши, а затем возвращается как огромная опрокидывающаяся волна и, наконец, ее размер определяется (как, кажется, в этом случае) формой побережья. Например, Талькауано и Кальяо расположены

в глубине обширных мелких бухт, и они всегда страдали от огромных волн; тогда, как город Вальпараисо, стоящий почти на краю очень глубоких океанических вод, хотя часто испытывал сильные землетрясения, никогда не претерпевал эти ужасные наводнения. При таком понимании мы должны только представить, как в случае Консепсьона, точку возмущения на дне моря в юго-западном направлении, откуда волна, как было замечено, пришла, и где земля была поднята на большую высоту, чем любая другая ее часть, — и явление в целом будет объяснено.

По-видимому, около каждого побережья главная линия исходного волнения будет расположена на том значительном расстоянии от берега, где вода, возмущенная колебаниями прибрежного дна, прилегает к глубокому океану, также возмущенному колебаниями дна. Поэтому во всех удаленных частях побережья малые колебания моря, как в момент сильного удара, так и во время более слабых последующих ударов, смешивались бы с волнами, распространяющимися от центра волнения, и, следовательно, эти движения были бы неотличимы.

Самый замечательный эффект (или, возможно, говоря более правильно, причина) этого землетрясения — поднятие земли. Капитан Фиц-Рой, дважды посещавший остров Санта Мария с целью исследования каждого обстоятельства землетрясения с чрезвычайной точностью, обнаружил массу свидетельств в доказательство такого поднятия, гораздо более убедительных, чем те, которые геологи в большинстве других случаев принимают без обсуждений. Это явление имеет необычный интерес, из него следует, что эта часть побережья Чили, ранее была местом нескольких еще более сильных землетрясений. Это почти бесспорно следует и из других измерений, включая то обстоятельство, что каменистое дно залива около Пенко было поднято на четыре морских сажени, начиная со времени известного землетрясения 1751 года. С этим дополнительным обстоятельством, установленным до нас, мы можем принять как вероятные, согласно принципам, установленным господином Лайеллем («Геология» Лайелля, книга II, часть XVI), и другие небольшие последовательные поднятия, и можем без опасений утверждать, что проблема раковин, обнаруженных на суше (я видел эти раковины в очень больших количествах на обрывах острова Кирикина), отмеченная Уллоа, объяснена.

Некоторые последствия, которые следуют из явлений, связанных с этим землетрясением, могут быть самыми важными с геологической точки зрения; но в данной работе я не могу сделать больше, чем просто сослаться на результаты. Хотя известно, что землетрясения охватывают огромные пространства, и странные подземные шумы также слышны почти в этих же областях, все же отмечено немного случаев одновременного извержения вулканов, располо-

женных очень далеко друг от друга. В описываемом случае, однако, в тот же самый час, когда вся область вокруг Консепсьона надолго поднята, последовательность вулканов, расположенных в Андах, перед Чилоэ, мгновенно извергла темный столб дыма, и в течение последующего года продолжала необычную активность. Имеется, кроме того, очень интересное обстоятельство, что в непосредственной их окрестности эти извержения сильно уменьшили колебания земли, хотя на небольшом расстоянии от вулканов, остров Чилоэ испытал сильные колебания. В северном направлении подводный вулкан, примыкающий к острову Хуан-Фернандес, взорвался, и несколько больших кратеров в Кордильерах центрального Чили начали новый период извержений.

Мы, таким образом, видим, что долговременное поднятие земли, возобновление извержений из кратеров и подводные взрывы являются частями одного большого явления. Размеры области, по которой всюду таким недвусмысленным образом проявлялись подземные силы, составляли от 700 до 400 географических миль. Согласно другим наблюдениям, которые я не могу за неимением места представить, и особенно имея в виду указанные вулканы, из которых оживленный материал извергался, мы можем едва ли избежать заключения, хотя ошибка и не исключена, что обширное озеро расплавленного материала, охватывающее область, почти равную удвоенной площади Черного моря, расположено под твердой коркой Земли.

Поднятие земли на несколько футов в течение этих землетрясений, которое проявляется в импульсном движении и в серии менее ощутимых или даже неощутимых подъемов, приводит к тому, что все западное побережье Южной Америки поднято выше уровня моря. Аналогично, даже наиболее ужасное извержение из любого вулкана является просто одним в последовательности извержений; и мы видим, что оба эти явления, которые могут проявляться многими способами, являются составляющими одной общей причины, только модифицированной местными обстоятельствами.

2.4. Извлечения из книги *Автобиография Чарльза Дарвина*

Печатается по тексту: *Чарльз Дарвин. Воспоминания о развитии моего ума и характера (автобиография). Дневник работы и жизни.* Перевод с английского С. Л. Соболя. — Москва, Издательство Академии наук СССР, 1957.

Путешествие на *Бигле* с 27 декабря 1831 до 2 октября 1836

Вернувшись домой после моей непродолжительной геологической поездки по Северному Уэльсу, я нашел письмо Генсло, извещавшее меня, что капи-

тан Фиц-Рой готов уступить часть своей собственной каюты какому-нибудь молодому человеку, который согласился бы добровольно и без всякого вознаграждения отправиться с ним в путешествие на *Бигле* в качестве натуралиста. ...Но мой отец решительно возражал против этого, добавив, впрочем, слова, оказавшиеся счастливыми для меня: «Если ты сумеешь найти хоть одного здравомыслящего человека, который посоветует тебе ехать, я дам свое согласие». Однако я в тот же вечер написал о своем отказе принять предложение, а на другое утро поехал в Мэр, чтобы быть готовым 1 сентября (начать охоту). Я был на охоте, когда за мной прислал мой дядя: он предложил мне поехать с ним в Шрусбери, чтобы поговорить с моим отцом, так как считал, что я поступил бы благоразумно, приняв предложение. Отец всегда утверждал, что мой дядя — один из самых мудрых людей на свете, и поэтому сразу дал свое согласие в самой ласковой форме.

.....Путешествие на *Бигле* было самым значительным событием моей жизни, определившим весь мой дальнейший жизненный путь, а между тем судьба его зависела от столь малого обстоятельства, как предложение моего дяди доставить меня за 30 миль в Шрусбери, — не всякий дядя поступил бы так, — и от такого пустяка, как форма моего носа. Я всегда считал, что именно путешествию я обязан первым подлинным дисциплинированием, т. е. воспитанием моего ума; я был поставлен в необходимость вплотную заняться несколькими разделами естественной истории, и благодаря этому мои способности к наблюдению усовершенствовались, хотя они уже и до того времени были неплохо развиты.

Особенно большое значение имело геологическое исследование всех посещенных мною районов, так как при этом приходилось пускать в ход всю свою способность к рассуждению. ...Я взял с собою первый том «*Principles of Geology*» Лайелля и внимательно изучил эту книгу, которая принесла мне величайшую пользу во многих отношениях. Уже самое первое исследование, произведенное мною в Сант-Яго на островах Зеленого мыса, ясно показало мне изумительное превосходство метода, примененного Лайеллем в трактовке геологии, по сравнению с методами всех других авторов, работы которых я взял с собою или читал когда-либо впоследствии.....

.....Насколько я сам в состоянии судить сам о себе, я работал во время путешествия с величайшим напряжением моих сил просто оттого, что мне доставлял удовольствие процесс исследования, а также потому, что я страстно желал добавить несколько новых фактов к тому великому множеству их, которым владеет естествознание. Но, кроме того у меня было и честолюбивое желание занять известное место среди людей науки, — не берусь судить, был

ли я честолюбив более или менее, чем большинство моих собратьев по науке. Я думаю, что не погрешу против истины, если скажу, что хотя в позднейшие годы одобрение со стороны таких людей, как Лайелль и Гукер, которые были моими друзьями, было для меня в наивысшей степени существенным, мнение широкой публики не очень-то заботило меня. Не хочу этим сказать, что благоприятная рецензия или успешная продажа моих книг не доставляли мне большого удовольствия, но удовольствие это было мимолетным, и я уверен, что ради славы я никогда ни на дюйм не отступил от принятого мною пути.

Со времени возвращения в Англию 2 октября 1836 до моей женитьбы 29 января 1839

...7 марта 1837 г. я поселился в Лондоне на Грейт-Марльборо-стрит и прожил там почти два года, до самой женитьбы. В течение этих двух лет я закончил свой *Дневник путешествий*, сделал несколько докладов в Геологическом обществе, начал готовить к печати рукописи моих *Геологических наблюдений* и организовал публикацию *Зоологических результатов путешествия на Бигле*. В итоге я начал свою первую записную книжку о фактах, относящихся к *Происхождению видов*, — проблеме, над которой я уже давно размышлял и над которой никогда не переставал работать в течение следующих двадцати лет.

Религиозные взгляды

В течение этих двух лет мне пришлось много размышлять о религии. Во время плавания на *Бигле* я был вполне ортодоксален; вспоминаю, как некоторые офицеры (хотя и сами они были людьми ортодоксальными) от души смеялись надо мной, когда по какому-то вопросу морали я сослался на Библию как на непреложный и авторитетный источник. Полагаю, что их рассмешила новизна моей аргументации. Однако в течение этого периода, т.е. с 1836 до 1839 года, я постепенно пришел к сознанию того, что Ветхий завет — с его до очевидности ложной историей мира, с его вавилонской башней, радугой в качестве знамения... (слово неразборчиво — завета?) и с его приписыванием богу чувств мстительного тирана — заслуживает доверия не в большей мере, чем священные книги индусов или верования какого-нибудь дикаря

.....Так понемногу закрадывалось в мою душу неверие, и, в конце концов, я стал совершенно неверующим. Но происходило это настолько медленно, что я не чувствовал никакого огорчения и никогда с тех пор даже на единую секунду не усомнился в правильности моего заключения. И в самом деле, вряд ли я в состоянии понять, каким образом кто бы то ни был, мог бы желать, чтобы христианское учение оказалось истинным; ибо если оно таково, то незамысло-

ватый текст Евангелия показывает, по-видимому, что люди неверующие — а в их число надо было включить моего отца, моего брата и всех моих лучших друзей — в конечном счете, потерпят наказание. Это учение отвратительно.....

.....Существо, столь могущественное и столь исполненное знания, как бог, творящий вселенную, представляется нашему ограниченному уму всемогущим и всезнающим, и предположение, что благожелательность бога не безгранична, отталкивает наше сознание, ибо какое преимущество могли бы представлять страдания миллионов низших животных на протяжении почти бесконечного времени? Этот весьма древний довод против существования некой разумной Первопричины, основанный на наличии в мире страдания, кажется мне очень сильным.

Со времени моей женитьбы, 29 января 1839 года, и проживания на Апшэ Гауэр-стрит до нашего переселения в Даун 14 сентября 1842 года

... Помимо работы над *Коралловыми рифами* прочитал в Геологическом обществе доклады об *Эрратических валунах в Южной Америке*, о *Землетрясениях* и об *Образовании почвенного слоя деятельностью дождевых червей*. Я продолжал также руководить изданием *Зоологических результатов путешествия на Бигле*. Кроме того, я не прекращал все время собирать факты, имеющие отношение к *Происхождению видов*; этим мне удалось подчас заниматься в такие моменты, когда из-за болезни я не мог делать ничего другого...

.....Живя в Лондоне, я по возможности регулярно посещал заседания нескольких научных обществ и исполнял обязанности секретаря Геологического общества. Но и посещения ученых обществ и обычная светская жизнь так плохо отражались на моем здоровье, что мы решили поселиться в деревне, так как оба предпочитали деревенскую жизнь, и в этом решении нам никогда не пришлось раскаиваться.

2.5. Дарвин о землетрясениях, поднятии земной поверхности, вулканических извержениях и катастрофических океанских волнах

20 февраля 1835 года сильное землетрясение ударило по прибрежной части Чили, приблизительно 1000 километров длиной. Совпадение землетрясения с извержением вулканов в Андах привело Дарвина к заключению, что землетрясение и вулканическая деятельность были связаны между собой.

2.5.1. Чилийское землетрясение 1835 г. — часть одного большого явления

Землетрясения распределены по поверхности Земли не случайно. Они имеют тенденцию быть сконцентрированными в узких зонах. Почему это? И почему вулканы также расположены в этих зонах?

Дарвин связал землетрясение и одновременные извержения вулканов с разрушением земной коры (см. рис. 6). В целом, эта точка зрения соответствует современным данным. Дарвин пишет: *...С геологической точки зрения, наибольшую важность имеет то, что три огромных явления, — подводный удар, возобновление деятельности многих вулканических кратеров и поднятие земли, — являются частями одного действия и эффектами одной большой причины, измененной только местными обстоятельствами...* [3, стр. 60] и *...Два вида движений можно, вероятно, объяснить, рассматривая случай, когда земная кора генерирует напряжения растяжения, вызванные постепенным ее поднятием, — в момент разрыва, возникают колебания, и большее движение может быть вызвано поднятием возникших краев слоя коры и прохождением расплавленной магмы между ними. Разве при разрыве длинного стержня стали, вибрации не вызваны разрывом так же, как и вибрации возникших краев стержня?...* [3, стр.73].

Очевидно, Дарвин предполагал, что постепенное возвышение и разрыв части земной коры были определены расширением Земли. Таким образом, Дарвин сформулировал глобальные идеи о разрушении, динамике и колебаниях тонкой коры, когда жидкая магма из глубин Земли поднимается через разрыв. Теперь глобальные разрывы и поднятие земной коры объясняются сдвиговым движением, столкновением или расхождением тектонических плит. В целом, Дарвин описал явление, которое имеет место в третьем случае. Когда плиты расходятся, формируются новые разломы, которые заполняются новым материалом (расплавленной горячей магмой, которая подобна жидкости) из мантии литосферы (рис. 6). Расходящиеся границы могут создать обширные зоны разрушений в океанических горных системах. Они — основной источник подводных землетрясений.

Вместе с тем известно, что большинство сильных землетрясений происходит на сходящихся границах тектонических плит, толщина которых в зонах континентов около 35–45 км. На границах край одной плиты обычно оказывается ниже края другой плиты. Образуется зона, где область погружения одной плиты очень быстро переходит в область поднятия другой плиты. Огромное количество энергии накапливается из-за трения, сдвига и сжатия материалов плит в узкой граничной области. При этом края плит могут плавиться и образовывать магматические камеры. Давление в магме, обычно, очень высокое.

Когда энергии становится слишком много, плиты скачкообразно сдвигаются относительно друг друга в новое устойчивое положение, освобождая энергию, которая реализуется в форме сейсмических волн. Эти волны — землетрясения. Сейсмические волны возмущают магматические камеры, которые часто связаны с поверхностью Земли посредством магматических каналов. Обычно магматическая камера устойчива, однако сейсмические волны могут нарушить равновесие. В этом случае магма может начать подниматься по каналу и извергаться через кратер вулкана. Давление в магме уменьшается, в ней начинают расти газовые пузыри. Этот сложный процесс сопровождается волнами высокого давления, распространяющимися в вулканической системе. Эти волны инициируют колебания прилегающей к вулкану территории.

Обычно вулканы формируются в океанических хребтах и глубоководных трещинах, где поднимается магма; в зонах, где материал плавится, когда одна плита сдвигается относительно другой; и над зонами, где струя расплавленного материала поднимается из глубины Земли. В случаях, когда расплавленный материал изливается в трещинах океанического дна, он создает океаническую кору — тонкий слоистый затвердевший поток магмы приблизительно 6 км толщиной.

Мы подчеркиваем, что чилийское землетрясение 1835 года было большое, но не самое большое чилийское землетрясение. В мае 1960 года, южно-центральные области Чили претерпели гигантское землетрясение, наибольшее

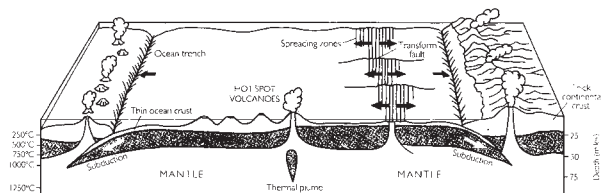


Рис. 6. Границы тектонических плит как источники землетрясений и активности вулканов. Показаны расходящиеся и сходящиеся зоны литосферы. Сильное вертикальное движение возникает, когда тектонические плиты скачкообразно занимают новое положение [28].

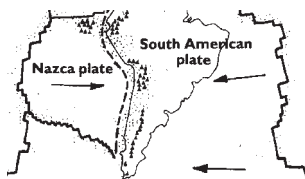


Рис. 7. Схема тектонических плит западного берега Южной Америки. Стрелки показывают направления движения плит [28].

с тех пор, как начались измерения землетрясений (магнитуда 9.5). Энергия, освобожденная землетрясением, накапливалась несколько столетий, аккумулируясь на соответствующем гигантском разломе земной поверхности, поскольку плита Наса (*Nazca*) и южноамериканская тектоническая плита сходятся приблизительно на 8–9 сантиметров ежегодно.

Рис. 7 показывает идеализированные Наса и южноамериканскую плиты. Стрелки указывают направления перемещений плит. Прерывистая линия определяет зону опускания по границе их взаимодействия. Точки показывают зоны землетрясений, треугольники — вулканы. Сжатие земной коры в зоне контакта плиты Наса с южноамериканской плитой объясняет возникновение гор Анд так же, как и разрушительных землетрясений.

Землетрясение 1960 г. привело к появлению зоны трещин, приблизительно 1 000 км длиной и 150 км шириной вдоль разлома север–юг земной поверхности, где плита Наса изгибается, погружаясь под плиту Южная Америка (рис. 7). Зона погружения плиты Наса резко отделяет восточную сторону (континентальный шельф) от глубокого океана. Там глубина океана быстро меняется от нескольких сотен до нескольких тысяч метров. Зона погружения (т. е. очаг землетрясения) расположена на расстоянии приблизительно 100 километров от берега. Дарвин сообщает: *...По-видимому, около каждого побережья главная линия исходного волнения будет расположена на том значительном расстоянии от берега, где вода, возмущенная колебаниями прибрежного дна, прилегает к глубокому океану, также возмущенному колебаниями дна...* [1, стр. 378–379].

Следовательно, Дарвин полагал, что, когда большие землетрясения происходят под водой, ложе океана может подняться или опуститься. Движения ложа и есть механизм, запускающий цунами. Дарвин пишет: *...При таком понимании мы должны только представить, как в случае Консепсьона, точку возмущения на дне моря в юго-западном направлении, откуда волна, как было замечено, пришла, и где земля была поднята на большую высоту, чем любая другая ее часть, — и явление в целом будет объяснено...* [1, стр. 378]. При анализе результатов землетрясения Дарвин имел в виду простую одномерную модель разрыва. Согласно этому, земная кора разрывается как стальной стержень или как сферическая оболочка под действием внутреннего давления.

2.5.2. Земля как глобальная сейсмическая система

Дарвин различал два типа землетрясений. Первый — локализован по границам континентов и связан с поднятием поверхности Земли. Он писал в связи с этим: *...можно заключить, рассматривая землетрясения на западном побе-*

режье Южной Америки, что первичный удар вызван разрывом материала земли, который, кажется, произошел на дне прилегающего моря... [3, стр. 71].

Таким образом, различные катастрофические явления («дрожание» островов и горных хребтов, извержения вулканов и появление цунами) объяснялись разрывом земли и вызванным землетрясением поднятием западного побережья Южной Америки. В целом, эта идея согласуется с тем, что предсказывалась теорией тектонических плит в зоне их расхождения. Однако теория тектонических плит не дает понимания, где и когда землетрясения произойдут внутри плит (континентов) [29, 30].

Согласно Дарвину: *...Часто случается, что одна и та же конвульсия возмущает большие области земного шара... [3, стр. 59].* Говоря о различных видах землетрясений, Дарвин подчеркивает: *...Я ограничиваю предшествующие наблюдения землетрясениями на побережье Южной Америки или подобными, которые, кажется, сопровождаются поднятием земной поверхности. Но, поскольку мы знаем, что это сопровождается понижением в других частях мира, там должны формироваться трещины и, как следствие, условия для землетрясений... Землетрясения в Калабрии и, возможно, в Сирии и в некоторых других странах имеют совсем другой характер, отличный от имевших место на американском побережье... в Чили даже меньшие удары распространяются по всей области в горизонтальном направлении, в то время как... в Болонье имело место местное растяжение, но имеющее мгновенный характер наподобие взрыва... [3, стр. 74].* Анализируя проблему, Дарвин писал там же: *...Если жидкое вещество, на котором, я полагаю, земная кора покоится, постепенно опускалось вместо того, чтобы подниматься, то там появилась бы тенденция возникновения полостей и, следовательно, направленного вниз давления; или полости закрывались бы обрушивавшимися массами земной коры, производящими эффект огромного взрыва. Такие землетрясения... редко сопровождались бы извержениями...*

Из приведенного текста Дарвина следует, что его представления о глобальном строении Земли соответствовали теории знаменитого французского астронома и математика Пьера Лапласа, который предполагал, что земная твердь является коркой над расплавленной массой Земли. Подобное представление о строении Земли, видимо зародившееся в древности и возвращенное в круг научных гипотез благодаря авторитету Декарта и Лейбница, существовало в геологии до первых десятилетий прошлого века. Воображению геологов рисовались картины подземного огненного океана, который колеблет волнами земную кору. Теперь эта теория в прошлом, хотя твердое, в целом, состояние Земли не исключает наличия в ней отдельных очагов расплавления — бассей-

нов магмы и зон межфазных состояний. Таким образом, несмотря на указанную, исторически понятную ограниченность воззрений Дарвина, его мысли о динамике земной коры и причинах сейсмичности являются вполне современными. Они соответствуют результатам последних наблюдений и публикаций. В частности, Тайра (Taira) и др. [32] сообщают: «...Изменение прочности разломов поверхности Земли из-за отдаленного землетрясения Суматра-Андаман (Sumatra-Andaman) 2004 года особенно важно, поскольку из этого следует, что очень большие землетрясения могут иметь глобальное влияние на прочность системы поверхностных разломов Земли. Такие сейсмические возмущения могут продвигать многие зоны разломов ближе к разрушению, что может привести к группированию во времени глобальной сейсмичности...».

Разрушительное землетрясение в Сычуани (Sichuan), Китай, в мае 2008 года (магнитуда 7.9), было неожиданным, потому что оно произошло на разломе, который имел маленький уровень сейсмичности. Такие неожиданности имеют место для землетрясений в пределах континентов, в отличие от границ плит, где большие землетрясения (магнитуда 7) происходят в ожидаемых местах по границам разломов. Континентальные области, такие как Сычуань или центральные и восточные Соединенные Штаты (сейсмические области Нового Мадрида и Чарльстона (*New Madrid and Charleston*)) содержат много старых разломов, большинство которых проявляет малую сейсмичность в течение сотен лет. Следовательно, мы находимся в неопределенности относительно времени и местоположения возможных там в будущем больших землетрясений. Существующая оценка опасности землетрясения обычно предполагает, что недавние локальные землетрясения указывают местоположение больших следующих катастроф. Но что, если некоторые из недавних катастрофических землетрясений есть следствие более ранних больших событий [30]? Вполне возможно, что землетрясение в Сычуани (Китай, 2008) было спровоцировано отдаленным землетрясением Суматра-Андаман (2004 г.) или, близким по силе, другим отдаленным землетрясением.

Теперь признано, что земная кора — очень сложная система разломов со многими неоднородностями и пересекающимися ветвями. Механизмы взаимодействия границ разломов могут быть очень сложными. Предсказание серьезных землетрясений и сильных волновых движений земли требует глубокого понимания фундаментальных физических процессов, протекающих вблизи разломов. Например, накопления энергии трехмерного напряженного состояния в окрестности будущего очага землетрясения, которое управляет иницированием, распространением и завершением подземного удара.

Вообще говоря, системы разломов могут быть неустойчивыми ...*На линии трещины, порождаемой опусканием поверхности земли, искривление и опро-*

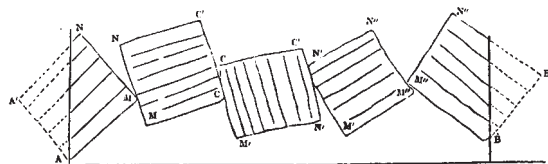


Диаграмма 3. Опрокинутые массы земной коры.

кидывание материала будет, возможно, даже большим, чем это имеет место при поднятии материала в силу того обстоятельства, что как только вес массы преодолевает силу сцепления материала и масса начинает погружаться, там отсутствует противоположенная сила, аналогичная гравитации во время поднятия... [3, стр. 75].

Анализируя проблему далее, Дарвин писал: *...чтобы разбить и опрокинуть части очень толстой земной коры, как показанные на диаграмме 3, там должно было быть большое горизонтальное растяжение, и оно, возникнув внезапно, вызвало бы много непрерывных извержений вулканического вещества... и ...если бы сила действовала внезапно, эти части земной коры были бы выброшены...* [3, стр. 79]. Видно, что Дарвин начал думать о неустойчивости частей земной коры, которые сформированы трещинами: *...большинство землетрясений, на первый взгляд внезапные, являются результатом длительного развития, как свидетельствуют и те события, которые предшествуют, и те, которые следуют за землетрясением...* [3, стр. 66].

Таким образом, приблизительно 200 лет назад Дарвин размышлял над проблемами, которые начали обсуждать только в течение последних лет [29–35]. В настоящее время нет никакого удовлетворительного объяснения с точки зрения теории тектонических плит некоторых больших землетрясений, например, землетрясений 1811–1812 годов в Новом Мадриде, Миссури, США, землетрясения 1886 года в Чарльстоне, Южная Каролина, США и землетрясения 2008 года в Сычуани, Китай. Следовательно, мы должны будем найти альтернативные механизмы. Например, Стейн и Лиу (Stein and Liu) пишут: «...Улучшенные оценки опасности землетрясения требуют рассмотрения комплекса разломов в пределах континентов как сложных систем и развития лучшего понимания того, как такие системы ведут себя во времени и в пространстве...» [30]. Землетрясение проявляет себя многочисленными способами. В некоторых случаях, землетрясения образуют группу событий типа гигантского удара, который потряс северо-западное побережье Суматры в 2004 году и следовал за рядом близко расположенных землетрясений. В других случаях они разрывают большие области разломов, комбинируя участки,

которые, как было известно, не взаимодействовали во время предыдущих сейсмических событий. Землетрясения могут даже как бы прыгать от разлома к разлому, как было замечено при землетрясении, которое ударило город Ландерс (Landers) в пустыне Мохаве (Mojave Desert), Калифорния, и землетрясения в центральной Аляске в 2002 году. Оба эти землетрясения известны также тем, что они вызвали колебания земли, извержения гейзеров и другие проявления сейсмической активности за тысячи километров от них [31].

Исследователи теперь говорят о больших землетрясениях, вызывающих другие сильные землетрясения на соседних и отдаленных разломах земли. Они приходят к выводу, что явление землетрясения настолько сложно, что может быть невозможно, так же как и непрактично, их предсказывать, основываясь только на понимании их физической природы [29–38].

Таким образом, сильные землетрясения могут иметь место на больших расстояниях от границ плит. Некоторые геологи полагают, что эти землетрясения могут происходить вдоль древних разломов, которые похоронены глубоко в континентальной коре. Недавние сейсмические исследования в центральных Соединенных Штатах обнаружили, что такой разлом находится на тысячах метров ниже долины Миссиссипи.

Из сказанного следует, что, в целом, современные сейсмологические результаты согласуются с идеями Дарвина, касающимися природы землетрясений, опубликованными около 200 лет назад.

2.5.3. Поднятие земли, вызванное землетрясением

Землетрясение может оказаться ужасной природной катастрофой. Его результаты зависят от амплитуды землетрясения, расстояния от эпицентра и геологии земной поверхности. У мягких (пористых) верхнележащих осадочных пород есть тенденция увеличивать амплитуду и продолжительность сейсмических волн. В результате объем пор увеличивается, и объем верхне-лежащего слоя тоже. Свободная поверхность Земли поднимается. В частности, *...песчаные берега залива Концепсона...* [39] оказались поднятыми после землетрясения.

Океанские острова, состоящие из материалов, которые содержат много газовых включений органического происхождения, могут подниматься более сильно, чем песчаные берега. Дарвин писал, что *...поднятие острова Санта Мария... было почти в три раза большим, чем побережья около Концепсона...* [3, стр. 72] и *...Самый замечательный эффект (или, возможно, говоря более правильно, причина) этого землетрясения — поднятие земли. Капитан Фиц-Рой, дважды посещавший остров Санта Мария, с целью исследования ка-*

ждого обстоятельства землетрясения с чрезвычайной точностью, обнаружил массу свидетельств в доказательство такого поднятия, гораздо более убедительных, чем те, которые геологи в большинстве других случаев принимают без обсуждений... [1, стр. 379]. В [11, стр. 259] Дарвин дал следующую информацию: ...*Санта Мария был поднят на девять футов. Южная оконечность острова была поднята на восемь футов, середина — на девять, и северная оконечность — до десяти футов...* Теперь поднятие земли, вызванное землетрясением, — хорошо известное явление. Интересно, что обычно поднимается океанское побережье и маленькие острова. Область залива Якутат (Yakutat Bay) юго-восточной Аляски испытала одно из самых значительных землетрясений 19-го столетия (10 сентября 1899 года). Хотя этому удару одной неделей ранее предшествовало землетрясение магнитудой 8.2, большинство эффектов было связано с 10 сентября, когда последовал новый удар, который был оценен магнитудой 8.6.

Исследование этой области было предпринято в 1905 году американской Геологической службой. Она сообщила, что наибольшие подъемы земли оценивались от 30 футов (9 м) до приблизительно 47.5 футов (14.5 м) на западном побережье залива Разочарования (Disenchantment Bay). Поднятия в 17 футов (5 м) или около того затронули большую область, но в нескольких случаях произошло опускание земли от 1 фута до 7 футов (от 0.3 м до 2 м). Большое Аляскинское землетрясение 1964 года было самым сильным зарегистрированным землетрясением в североамериканской истории. Образовались значительные трещины и оползни земли. Некоторые места острова Кадьяк (Kodiak) были подняты на 30 футов (9.1 м). К востоку от Анкориджа (Anchorage), область около Портиджа (Portage) опустилась на 8 футов (2.4 м). Некоторые жители утверждали, что колебания земли составляли более чем 3 фута (1 м) в высоту.

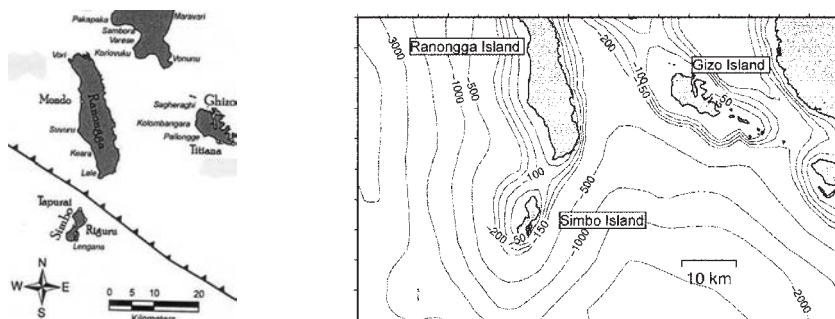


Рис. 8. Образовавшийся разлом (выделенная пирамидками линия) и пораженные землетрясением 2007 года острова (слева). Океанская глубина вокруг островов (справа).

Самое сильное зарегистрированное землетрясение в мире произошло в Вальдивии, Чили, 22 мая 1960 года. Наблюдаемые изменения в поднятии земли оценивались от 6 м подъема до 2 м опускания. Сильное землетрясение магнитудой 8.1 поразило Соломоновы Острова и соседние области в 7:40 утра в понедельник, 2 апреля 2007 года. Разрыв длиной 245 км прошел по дну океана. После землетрясения, остров Симбо (Simbo) (см. рис. 8), площадью 12 кв. км, понизился на 1 м. Поднятие земли произошло на острове Ранонга (Ranonga) (32 км длиной и 8 км шириной), которое оценивалось от 0.9 м до приблизительно 3 м.

Остров Ранонга расположен примерно в 10 км к северу от острова Симбо. Вызванный землетрясением разлом вдоль границы тектонической плиты проходит точно между этими островами. Больше нигде на Земле нет пары островов, расположенных так близко друг к другу через активный разлом.

2.5.4. Топографический эффект

Дарвин [1, стр. 370] сообщает о вызванных землетрясением колебаниях маленького острова Кирикина: *...Действие вибрации на твердый первичный сланец, образующий основу острова, было еще любопытнее: поверхностные слои некоторых узких гребней невысоких гор были до того разбиты, что, казалось, будто их взрывали порохом...* Согласно Дарвину, высота этих гор приблизительно 400 футов (140 м) [39].

Дарвин описал теперь хорошо известный топографический эффект. Измерение движений вершин гор и скал во время землетрясений показывает, что там иногда уровень разрушений может быть более высоким, чем у основания. Усиление колебаний вершин относительно оснований может достигать 10, а в одном случае усиление было тридцатикратным [12]. Как пример, усиление вблизи вершины горы показано на рис. 9. Среднее пиковое ускорение вершины равнялось приблизительно 2.5 среднего ускорения основания. Важно подчеркнуть, что амплитуда ускорения экспоненциально возрастает при приближении к вершине.

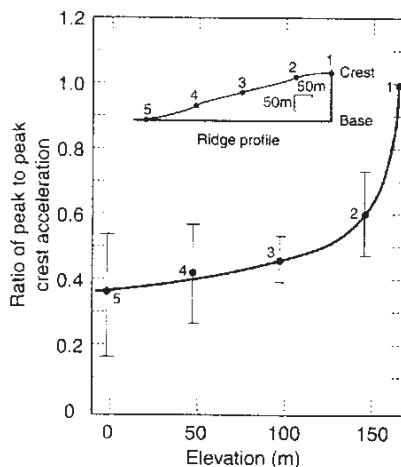


Рис. 9. Безразмерное ускорение, зарегистрированное в различных пунктах вдоль горного хребта в Мацзуки (Matsuzaki), Япония [40].

Отражение сейсмической волны, распространяющейся внутри возвышенности от горного склона, может создать напряжение, достаточное для зарождения поверхностных трещин. Фокусирование сейсмической волны около горной вершины может объяснить разрушения, которые Дарвин наблюдал на острове Кирикин.

Мы рассматриваем ...*эффекты одной большой причины, измененной только местными обстоятельствами...* [3, стр. 60], замеченные Дарвином как определяемые местной геологией и местным рельефом поверхности Земли. Очевидно, эти местные топографические особенности определяют и могут объяснить сообщения Дарвина о результатах землетрясения. В частности, усиление сейсмических волн на вершине вулкана может характеризовать один из возможных запускающих механизмов начала его извержения.

Топографический эффект может определять усиление как поверхностных, так и вертикальных (перпендикулярных поверхности) сейсмических волн. Эти волны могут быть захвачены топографией и резонансно усилены до разрушающих амплитуд. В случае поверхностных волн эффект будет наибольший, если длина волны равна одному из размеров основания топографии. Например, если наименьший размер основания горного хребта соответствует длине волны, то его вершины могут начать колебаться наподобие маятника. При этом резонанс горизонтальных колебаний топографии имеет место, если частота волн соответствует одной из собственных ее частот. Амплитуда подобных колебаний будет наибольшей при точном резонансе.

Вертикальная сейсмическая волна может быть захвачена верхними осадочными породами и резонансно усилена. Именно с подобным усилением связывают разрушение зданий в окрестности старых высушенных озер и гибель 20 тысяч человек во время мексиканского землетрясения 1985 года [5, 40]. Усиление может быть настолько сильным, что осадочный слой начинает периодически отслаиваться от подстилающих жестких пород. Возможно, именно с этим [14] связано усиление сейсмических волн в холме Тарзана во время Калифорнийского землетрясения 1994 года (см. также введение и подразделы 3.1.2 , 3.1.3).

2.5.5. Запускающий механизм вулканических извержений по Дарвину

Дарвин пишет, что ...*поднятие многих сотен квадратных миль территории около Консепсьона — часть того же самого явления, с выплескиванием, если можно так выразиться, вулканического материала через отверстия в Кордильерах в момент удара...* [3, стр. 60] и ...*энергия, я могу заметить, которая проявляется в конвульсных поднятиях, подобных наблюдаемым в Кон-*

сепсьоне и в больших вулканических извержениях... [3, стр. 61]. В частности, Дарвин сообщает о четырех одновременных больших извержениях следующих вулканов: Робинзон Крузо, Минчинмавида, Серро Янтелес и Петероа (Robinson Crusoe, Minchinmavida, Cerro Yanteles и Peteroa). Таким образом, согласно ему, большие землетрясения могут инициировать крупномасштабные извержения вулканов. Дарвин предположил, что мог быть общий механизм, вызывающий извержения вулканов, разделенных большими расстояниями. Этот механизм — «*конвульсивный подъем*» поверхности (импульсное перемещение земной поверхности в вертикальном направлении).

Однако до сих пор точные взаимоотношения между сейсмичностью и магматической деятельностью остаются загадочными [22–25]. Очевидно, невозможно объяснить все зарегистрированные события с помощью единственного механизма. В некоторых случаях землетрясения рассматриваются только как показатель движения магмы и характера вулканической активности. В других случаях прослеживается определенная связь землетрясений с извержениями вулканов.

Чарльз Дарвин сообщает, что *...Если бы землетрясение или дрожание основания (которое, однако, мы видели, было меньше вблизи этих вулканов, чем в других местах), не действовало никаким другим способом, кроме как просто ломая корку на лаве внутри кратеров, то в этом случае, возможно, имело бы место только несколько выбросов дыма, но это, не могло бы дать начало длительному и энергичному периоду активности...* [3, стр. 61]. Следовательно, эффекты колебаний и разрушения поверхности кратера могут быть важными. В целом, это согласуется с результатами, опубликованными недавно [10]. В то же самое время, согласно Дарвину, эффект разлома поверхности кратера может быть важным, но не решающим для начала крупномасштабного извержения. Возможно, он думал о других эффектах дрожания (колебаний) основания вулкана, вызванного землетрясением.

Давайте сравним последнее замечание Дарвина с данными катастрофического извержения вулкана Св. Елены. Процессы, эффекты и продукты этого извержения были интенсивно изучены и фотографически зарегистрированы.

Геологи называют вулкан Св. Елены композитным вулканом (или стратовулканом) — термин, введенный для конусообразных, обычно симметричных, имеющих крутые склоны вулканов, образованных

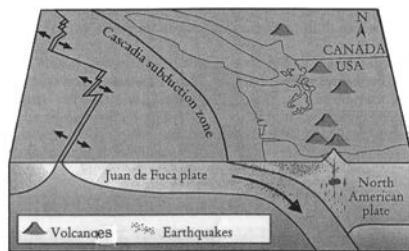


Рис. 10. Граница плит Хуана де Фуки и Северной Америки, где расположен вулкан Св. Елены [22].



Рис. 11. Динамика вулкана
Св. Елены 18 мая 1980.

Хорошо видно, что вызванная
землетрясением магнитудой 5.1
колоссальная лавина предшество-
вала гигантскому извержению.

Серия фотографий сделанных
Гари Розенквистом
(Gary Rosenquist).

перемежающимися слоями застывшей лавы, пепла и других вулканических выбросов. Композитные вулканы имеют склонность к извержениям взрывного типа. В тот роковой день 18 мая 1980 Св. Елена взорвалась после 2 месяцев интенсивных вибраций и неустойчивых, относительно слабых извержений, что привело к наихудшему экологическому бедствию в истории Соединенных Штатов, связанному с вулканами.

Интенсивная сейсмическая активность вулкана продолжалась в течение и между слабыми извержениями. Сейсмографы начали фиксировать всплески сотрясений вулкана, типа непрерывных ритмичных ударов. Удары магнитудой 3.2 или больше происходили со слегка усиливающейся магнитудой в течение апреля и мая, с пятью землетрясениями в день магнитуды 4 или выше в начале апреля и 8 в день в неделю до 18 мая. Первоначально не было никакого прямого признака извержения, но о маленьких, вызванных землетрясением лавинах снега и льда, сообщали воздушные наблюдения. Около 8 часов утра произошло землетрясение силой около 5.1, зародившееся на глубине 2 км под вулканом. Край кратера вулкана начали разрушаться из-за оползня. Давление земли на выходе магматиче-

ского канала упало, газы и магма, не сдерживаемые теперь, начали вырываться в атмосферу. Таким образом, хотя землетрясение, вызвавшее разрушительное извержение, было немного большей магнитуды, чем наиболее сильные предшествующие удары, оно в любом случае не было обычным. То, что случилось далее, было описано геологами Китом и Дороти Стоффель (Keith and Dorothy Stoffel), которые в это время находились в маленьком самолете над вершиной вулкана.

Они засвидетельствовали, «сходы камней и ледяных обломков внутрь кратера... выходящая на юг стена северной стороны главного кратера была особенно активной. В течение, возможно, 15 секунд вся северная сторона вершины кратера начала быстро изменяться... Картина изменения была жуткой... Сначала вся масса начала слегка колебаться и вздуться, практически не перемещаясь как целое. Затем вся северная сторона вершины начала скользить на

север вдоль глубоко простирающейся наклонной равнины. Я (Кит Стоффель) был поражен и взволнован этим оползнем невероятных размеров.... Мы снимали всю последовательность схода, но прежде, чем мы смогли зафиксировать больше, чем несколько картин, огромный взрыв отбросил самолет». Понимая опасность положения, пилот пустил самолет круто вниз, чтобы набрать скорость, и, таким образом, смог опередить быстро образующееся грибовидное извергающееся облако, которое угрожало охватить их. Крах северного склона образовал наибольшую лавину обломков, зарегистрированную в историческое время.



Рис. 12. Гора Св. Елены и прилегающая область, один день после разрушительного извержения. Фотография USGS, сделанная 19 мая 1980 г. Лин Топинкой (Lyn Topinka).

Из описанных наблюдений следует, что вулканическая система (кратер, магматический канал и магматическая камера) может быть весьма устойчивой. В этом случае деформация кратера вулкана и самого вулкана не вызывают крупного извержения, но выбросы газа или лавины камня/снега могут иметь место. В частности, фокусирование лавин камня/снега и соответствующей воздушной ударной волны в центре кратера может сформировать вертикальную струю смеси указанных составляющих. В этих случаях колебания вулкана и деформация кратера не приводят к разрушающему извержению, но могут инициировать кратковременные выбросы из кратера, если состояние вулкана не готово к энергичному периоду активности. С другой стороны, в случае достаточно сильного землетрясения сейсмические процессы могут вызвать обвалы, оползни и разрушение кратера. В результате канал вулкана разгружается, и возникают условия для сильного извержения. Об этих двух возможностях пишет Дарвин (см. начало этого подраздела). Таким образом, землетрясения могут вызвать различные типы извержений вулканов.

Мы думаем, что Дарвин первым подчеркнул, что *...энергия, ...в конвульсивных поднятиях...* может быть запускающим механизмом для одновременных вулканических извержений. Недавно было показано, что есть острый пик в количестве извержений в тот же самый день, что и землетрясение [22]. Сравнение выводов Дарвина с современными данными показывает, что он описал важный механизм, инициирующий вулканические извержения.

2.5.6. Цунами, гигантские океанические волны и резонансное усиление сейсмических волн в слоях осадочных пород

Цунами. Дарвин [1, стр. 377] писал: *...море быстро отходит от берега, а затем возвращается в виде огромных волн сокрушающей силы....* Приблизительно двести лет назад Дарвин не знал, что эти волны именуются в Японии цунами, но данное им их описание дает полное представление о тех катастрофических разрушениях и гигантских человеческих жертвах, которыми они могут сопровождаться. Теперь некоторые строчки из *Путешествия на Бигле* легко могут быть прочитаны как сообщение из Шри-Ланки после цунами от 26 декабря 2004.

Цунами можно рассматривать как подобную приливу волну, которая возбуждается колебаниями морского дна. В результате происходит начальное местное возмущение океанической поверхности, которое затем распространяется в виде кольцевых волн, напоминающих волны от брошенного в воду камня. Далеко от берега длина волны цунами очень большая, а ее амплитуда — маленькая (приблизительно 0.1–1.0 м). В этом случае волна и ее распространение описываются линейной или слабо-нелинейной теорией. Поэтому изучение волн цунами вдали от берега не представляет принципиальных трудностей. Ситуация резко усложняется, когда цунами подходит к берегу. Нелинейные эффекты становятся важными, амплитуда цунами может возрасти до 15–30 м [41–43]. Имеется мало примеров расчета прибрежной эволюции цунами вплоть до таких амплитуд.

Дарвин подчеркнул зависимость вызванной землетрясением волны от формы побережья и прибрежной глубины: *...и, наконец, ее размер определяется (как, кажется, в этом случае) формой побережья...* [1, стр. 378]. Эта

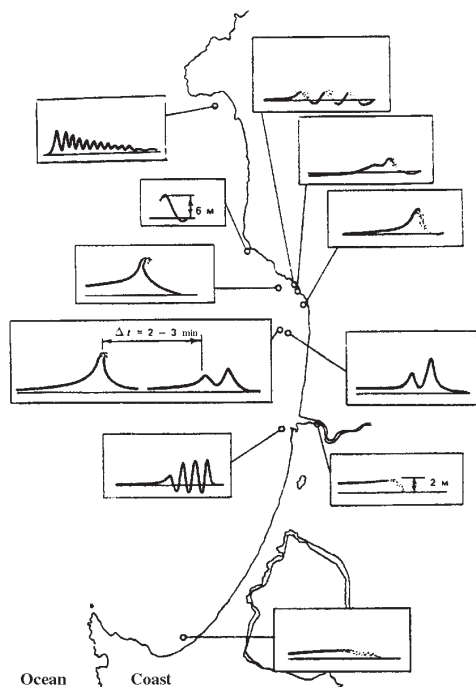


Рис. 13. Формы цунами в различных пунктах Северного побережья Акиты (North Akita Coast), Япония, в течение землетрясения Нихонкай-Тюбу (Nihonkai-Chubu) (26 мая 1933) [42].

фундаментальная идея полностью согласуется с современными наблюдениями (см. рис. 13).

Гигантские океанические волны. Культуры всех морских держав связаны с легендами о волнах невероятных размеров. Эти волны внезапно появляются, топят суда и затем исчезают так же быстро, как и возникают [44]. Однако, когда капитан Думонт Дурвиль (Dumont d'Urville), французский ученый и военно-морской офицер в составе кругосветной экспедиции 1826 года, сообщил о наблюдении волны высотой около 30 метров, он был открыто высмеян.

Возможно, подобную гигантскую волну *Бигль* встретил около мыса Горн. Дарвин писал: *...В полдень на нас обрушилась огромная волна... Если бы за первой волной последовала вторая, наша участь была бы решена скоро и навсегда...* [2, стр. 264–265]. Эти волны — не цунами, вызванные глубоководными геологическими событиями, они также не приливы, вызванные гравитацией луны и солнца. Это скорее волны, вызванные ветром — движением воздуха над поверхностью воды. В океане поверхностные волны, вызванные ветром, могут пробежать тысячи километров от места своего возбуждения. Размеры и частота этих волн определяются скоростью ветра и глубиной океана. Встречные течения и другие обстоятельства могут изменить размер ветровых волн, иногда приводя к формированию катастрофических волн.

Современные теории волнообразования (которые, в общем, работают довольно успешно) предсказывают, что вероятность появления таких волн ничтожно мала. Чем больше волна, тем реже она появляется (если только ее не вызывает какая-то геофизическая катастрофа) — даже при сильном ветре и большом волнении подобные волны должны были бы появляться настолько редко, что люди с ними, скорее всего, на просторах Мирового океана никогда бы не сталкивались. Вместе с тем имеется много свидетельств возникновения этих волн. Теория этих волн будет изложена в части III этой книги (см. также раздел 3.5).

Резонансное усиление сейсмических волн. Вызванные землетрясением сейсмические волны могут быть усилены в слое осадочных поверхностных по-



Рис. 14. Гигантская волна, атаковавшая танкер «Эссо Лангедок» в 1980 году. Мачта справа находится на 25 метров выше уровня моря. Фото первого помощника Филиппа Лижура, воспроизведенное на сайте esa.int.

род наподобие того, как усиливается цунами в прибрежном мелководье. Подобное усиление сейсмических волн — сложный процесс, который связан с геологией и топографией слоя. В частности, процесс концентрации сейсмической энергии зависит от изменения толщины и наклона осадочного поверхностного слоя и происходит около его края.

Концентрация энергии может породить большие и маленькие трещины. Дарвин сообщает [11, стр.256]: *...Город Консепсьон стоит на равнине, незначительно выше уровня реки Био Био. Почва рыхлая и состоит из наносных пород. В западном и северном направлениях находятся скалистые нерегулярные холмы, у основания которых везде было видно разрушающее действие сильных конвульсий, в частности, большие трещины....* Это усиление конвульсий зависит от изменения толщины верхнего слоя почвы, от пространственного изменения характера движения (горизонтальное движение преобразовывается частично в вертикальное движение) и контрастности импеданса между жестким глубоколежащим материалом и верхними отложениями.

Все рассмотренные в этом подразделе волны вызваны различными причинами и возникают при различных физических условиях, однако, автор полагает, что их усиление связано с тем или иным резонансным явлением. В некоторых случаях особенно опасно усиление вертикального движения.

Таким образом, следуя за некоторыми публикациями Дарвина, мы можем сформулировать следующие его идеи, связанные с Чилийским землетрясением 1835 года и его результатами. Источник землетрясения находится на дне Тихого океана, прилегающего к побережью Чили. Землетрясение — сложное явление, которое определяется предыдущим развитием земной коры и определяет в значительной мере ее последующую динамику. Из-за вертикальных колебаний, вызванных землетрясением, может иметь место поднятие океанских островов и поверхности суши. Вертикальное движение может быть усилено у вершин гор и может пробудить вулканы. Движение ложа океана может произвести цунами и моретрясения. Аналогичное явление может иметь место в слоях осадочных пород переменной толщины. В основном, эти идеи полностью согласуются с данными современной науки, хотя некоторые поднятые Дарвином проблемы еще весьма далеки от их решения.

3. Сообщения Дарвина о катастрофических природных волновых явлениях и современные научные данные

...Подавляющее большинство действующих вулканов либо расположены поблизости от морских берегов, либо представляют собой острова, лежащие в середине океана ...большие материка являются преимущественно областями, поднимающимися, а, судя по характеру коралловых рифов, центральные части великих океанов являются областями опускающимися... по-видимому, вулканы приходят в действие и угасают на одних и тех же местах в зависимости от того, преобладают ли там движения поднятия или опускания...

Дарвин

3.1. Введение

Эффекты сильного землетрясения, извержения вулканов, связь сейсмических и вулканических процессов — все эти явления стоят в ряду наисильнейших впечатлений Дарвина от кругосветного путешествия, которые позволили ему как бы увидеть скоростную фоторазвертку много более длительной эволюции поверхности Земли. Он много размышлял над этими процессами и их связью, что нашло отражение в книгах [1, 2, 27] и большой статье [3]. В частности, Дарвин видел воочию результаты сильного землетрясения. Теперь известно, что эти результаты могут зависеть от трех главных причин: расстояния от источника землетрясения, пути прохождения сейсмических волн от источника к определенному участку местности и от геологии участка и его рельефа [3, 12, 28]. Очевидно, Дарвин наблюдал влияние именно последних условий на местное усиление колебаний почвы, вызванных землетрясением.

3.2. Поднятие земли и сильно-нелинейный топографический эффект

Дарвин полагал, что имеется ...одна большая причина, измененная только местными обстоятельствами... [3, стр. 60]. Эффекты местных условий часто столь велики, что предрасположенность к разрушениям от землетрясения в некоторых местах может более зависеть от этих условий, чем от близости или интенсивности источника землетрясения. Дополнительно к этому отметим,

что конфигурация и геология поверхностного материала сильно воздействуют на амплитуду сейсмической волны. В частности, волновые свойства поверхностного слоя зависят от его толщины. Когда толщина изменяется, также изменяются дисперсионные свойства слоя [45–49].

В этом разделе мы рассмотрим влияние местных обстоятельств.

3.2.1. Некоторые физические механизмы опускания и поднятия земли

Во время сильного землетрясения могут измениться свойства участка почв. Первые сейсмические волны (в частности, продольные волны) могут перевести почву в новое, оживенное состояние и таким образом резко и сильно изменить ее механические свойства. Сейсмические удары могут увеличить объем пор в верхележащих слоях осадка (см. рисунки 1, 2 и 5). В результате там возникают внутренние и поверхностные трещины. Все это приводит к тому, что последующие волны (например, волны сдвига) приходят в области, которые обладают новыми неожиданными механическими свойствами.

Уплотнение и оживение поверхностного материала. Деформация слабосвязных материалов всегда сопровождается соответствующими изменениями объема. В частности, хорошо известен эффект уплотнения гранулированных материалов при колебаниях маленькой амплитуды. То же самое явление может иметь место в результате умеренных землетрясений [45, 46]. Возмущенные сейсмическими волнами маленькой амплитуды частицы почвы могут скапываться на новый (более низкий) уровень энергии. Другими словами, под действием сейсмических волн и силы тяжести свободно упакованные отдельные частицы почвы собираются в более плотную конфигурацию (см. рис. 15). Это явление может частично объяснить вызванное землетрясением понижение поверхности Земли. В случае почвы, содержащей воду, подобное уплотнение может увеличить гидростатическое давление. В предельном случае гидростатическое давление может оказаться намного большим, чем сдвиговые напряжения. В таких случаях поведение почвы определяется давлением (как для воды). Это явление известно как «оживение» (или «разжижение»). Оживение часто наблюдается в низменных областях около рек, озер, заливов и океанов.

Однако гранулированные материалы, подобные песку, могут перейти в оживенность и в сухом состоянии. Эти материалы могут стать оживенными, если они приведены в интенсивное движение. Например, колебания или импульсное воздействие (см. рис. 1, 2 и 5), которые отделяют зерна друг от друга, преобразовывают слабосвязные материалы в оживенное состояние. Конечно, амплитуда колебаний или воздействий должна быть достаточно большой.

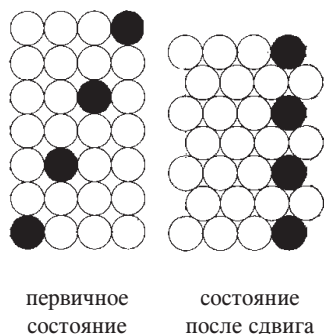


Рис. 15. Сдвиг сфер может привести к уменьшению объема [48].

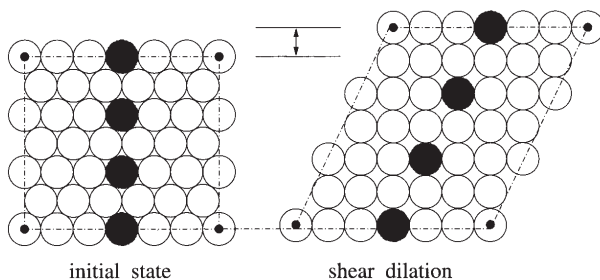


Рис. 16. Сдвиг слоев плотно упакованных сфер относительно друг друга может увеличить их объем [48].

Поднятие поверхностного материала. Частицы почвы могут быть подняты на новый (более высокий) уровень энергии, когда они возмущены сейсмическими волнами большой амплитуды. Другими словами, при действии сейсмических волн свободно упакованные отдельные частицы почвы могут сформировать более свободную конфигурацию (см. рис. 16).

Экспериментальные данные показывают, что здесь существует механическая и геометрическая связь между прикладываемым напряжением и порами, заполненными жидкостью или газом. Одно из самых интересных и фундаментальных наблюдений за такой связью впервые было представлено Рейнольдсом (Reynolds) в 1885 году [49], когда он обнаружил явление *дилатансии*. Если множество идентичных сферических зерен при самой плотной упаковке подвергается сдвиговой нагрузке, то из чисто геометрического рассмотрения следует, что частицы могут взгромоздиться одна на другую и, следовательно, произойдет увеличение объема всего материала. Рейнольдс использовал это явление, чтобы объяснить хорошо известное всем наблюдение того, что во время прогулки около края воды поверхность песка вокруг ноги пешехода высыхивается мгновенно. Это связано с тем, что поверхность песка вокруг ноги слегка приподнимается над уровнем прилегающих участков, а вода оттуда уходит.

Пример новой более свободной структуры гранулированного материала, которая сформирована сдвиговым напряжением, дан на рис. 17. Подобные структуры могут формироваться под действием сейсмических волн.

Отметим, что город Консепсьон располагается на осадочных песчаных почвах. Дарвин сообщает [11, стр. 256], что ...*город Консепсьон стоит на рав-*

нине немного выше, чем уровень реки Био Био. Почва — свободная и аллювиальная... и ...песчаные берега большого залива Консепсьона... [39]. Сейсмические поверхностные волны, распространяющиеся в слабосвязных почвах, перемещают частицы в вертикальном и горизонтальном направлениях. В результате после прохождения сейсмической волны частицы формируют новую сеть контактов (скелет).

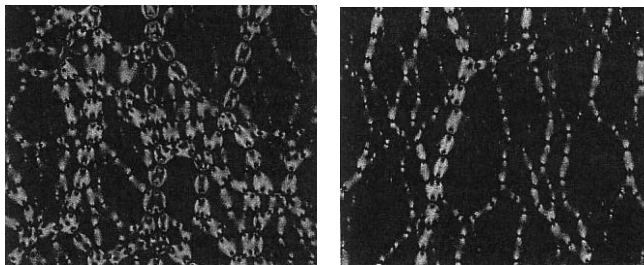


Рис. 17. Типичные сети контактов (скелеты) для всесторонне сжатого гранулированного материала (слева) и для того же материала после сдвига (справа) [50].

Конечно, это вызванное сейсмической волной разрыхление (подъем) песчаной почвы не может иметь место в течение долгого времени. Действительно, хорошо известно, что поднятая поверхность может возвращаться к начальному состоянию в течение относительно короткого промежутка времени (неделя или несколько недель) после землетрясения. Дарвин сообщил [11, стр. 260]: *...когда я был последний раз в Талькауано, в июле 1835, спустя только четыре месяца после большой конвульсии, берега залива Консепсьона, возвратились к их прежнему положению относительно уровня моря...* По-видимому, это результат разрушения структуры песчаной почвы (произведенной сейсмической волной) под действием дренажа и силы тяжести.

Подчеркнем, что этот механизм подъема полностью определяется взаимодействием почвы с сейсмическими волнами. Этот механизм весьма отличается от вертикального поднятия верхних слоев Земли при динамическом взаимодействии границ тектонических плит, приводящем к землетрясению. Именно последнее поднятие формирует горные цепи на границах плит. И это поднятие, конечно, не возвращается к *...прежнему положению...*, о котором пишет Дарвин.

Поднятие поверхностных материалов в волнах разрежения. Дарвин писал: *...они объясняются взбалтыванием на дне моря ила, содержащего распадающиеся органические вещества. Когда наш корабль в ясную погоду волочил в бухте Калья по дну якорную цепь, я заметил, что путь ее обозначался ря-*

дом пузырьков... [1, стр. 374]. Таким образом, в морских отложениях и почвах вокруг Консепсьона содержался большой объем газа. Мы можем назвать подобные почвы загазованными. Здесь мы должны напомнить, что сильные землетрясения могут возбудить вертикальное ускорение, которое превышает g . В этих случаях острый контраст между поверхностными рыхлыми слоями и основной подстилающей скальной породой начинает играть важную роль. Если вызванное землетрясением отрицательное давление (растяжение) на границе осадочные породы/скальная порода превышает величину ρgh (ρ — плотность отложения, h — толщина отложения), то на какое-то мгновение на границе может образоваться полость. В результате последующего уничтожения этой полости (столкновения верхних слоев со скальным подстилающим основанием) образуется сильно-нелинейная разрушающая волна. Эта волна отражается от свободной поверхности как волна растяжения. Пример подобной волны представлен на рис. 5. Эта волна фрагментирует материал слоев, в котором формируются трещины и поры. С другой стороны, в силу острого импедансного контраста может иметь место резонанс, так как сейсмические волны, попавшие в верхние осадочные слои, оказываются пойманными и начинают переотражаться. Если резонансное усиление волн будет достаточно велико, то материал фрагментируется. Результат отмеченных выше процессов показан на рис. 18.

Образуются новый скелет материала, а объем пор и сжимаемость материала сильно увеличиваются. Прочность материала падает вплоть до нуля. Описанный процесс иллюстрирован рис. 19, где представлена труба, содержащая газ, твердые частицы и поршень. Газ сильно сжат поршнем. Показаны три положения поршня. Когда поршень очень быстро переходит в новое состояние, возникает волна разрежения. При этом расширяющийся газ перемещает частицы в новые положения, и формируются новые скелеты, имеющие все мень-

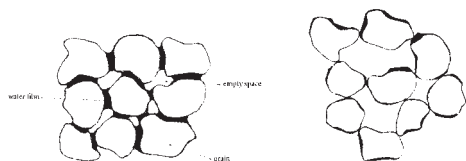


Рис. 18. Невозмущенное (слева) и возмущенное (справа) состояния материала. Невозмущенный материал состоит из воды, пор и гранул. Вызванные землетрясением сильно-нелинейные волны могут ослаблять материал, фрагментировать его и увеличивать объем пор.

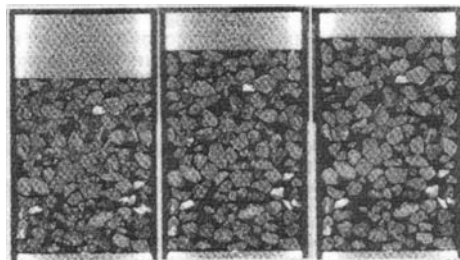


Рис. 19. Схема расширения высокосжатого объема, содержащего газ и гранулированный материал, во время быстрой декомпрессии.

шую и меньшую прочность. Подобное явление может иметь место во время отражения сейсмической волны сжатия от свободной поверхности осадочного слоя.

Таким образом, вызванное землетрясением сильное движение частиц может преобразовать слабосвязные материалы в оживенное состояние. Объем материала сильно увеличивается. Возможно, подъем островов и прибрежных районов во время серьезных землетрясений связан с отмеченным явлением. Очевидно, в этом случае подъем не может сохраняться в течение долгого времени. Из сказанного следует, что поднятие верхних слоев почвы может быть результатом действия как горизонтальных, так и вертикальных ускорений. Однако величина вертикального ускорения должна быть достаточно большой, порядка величины g .

3.2.2. Разрыхление верхних слоев из-за сильно-нелинейных волновых явлений

Многие слабосвязные почвы — трехмерные совокупности твердых зерен и сложный набор дефектов, таких как поры, границы зерен и трещины, которые часто содержат газ и/или жидкость. Эти материалы часто моделируются гранулированными материалами. Поведение гранулированных материалов в различных ситуациях может быть совершенно разным. В частности, при вибрационном воздействии их поведение может походить на поведение твердого тела, жидкости или газа в зависимости от уровня вибраций и нормы рассеивания вибрационной энергии [21, 51]. С помощью вибрационного эксперимента с гранулированным материалом Мюджика и Мело (Mujica и Melo) [21] изучали эффект столкновения слоя гранул с твердым основанием на давление, поверхностные волны и процесс оживления слоя. В эксперименте тонкий слой частиц бронзы диаметром 0.106–0.125 мм, содержащий 15 частиц в глубину, располагался на дне цилиндрического контейнера 25 мм высотой и 40 мм в диаметре. Контейнер подвергался вертикальным синусоидальным колебаниям. Поверхность слоя была освещена. Отраженный от поверхностного слоя свет фокусировался. Интенсивность света, измеряемая фотодиодом, позволяла наблюдателю исследовать плотность и расширение материала поверхности. Давление измерялось на дне контейнера. Было найдено, что для амплитуды вынуждающего ускорения большей, чем g , эффективная сила тяжести становится отрицательной и слой гранул теряет контакт с основанием. Периодически образуется полость между основанием и слоем. После столкновения слой приобретает скорость основания и остается в контакте с контейнером до следующего цикла, где процесс повторяется.

Некоторые результаты этих экспериментов показаны на рис. 20. Приведены кривые изменения давления и интенсивности светового потока. Сигнал давления составлен из синусоидальной компоненты, соответствующей ускорению контейнера и пика, который соответствует появлению и схлапыванию полости u . Было найдено, что в случае $G > g$ (G — вынуждающее вертикальное ускорение) на кривой давления всегда имеется пик, соответствующий появлению полости.

Напротив, никакого пика не наблюдается в отраженном свете до $G \approx 2g$. Таким образом, в интервале $g < G < 2g$ слой сохраняет свое начальное состояние, и его плотность не меняется. Для $G > 2g$ средняя величина отраженного света существенно уменьшается, что соответствует переходу слоя в ожизненное состояние. Немедленно после того, как возникает пик давления, увеличение отраженного света указывает на то, что после свободного полета слоя имеет место его сжатие в результате столкновения с дном контейнера.

Автор подчеркивает, что обсужденный сильно-нелинейный эффект столкновения слоя с основанием не ограничен экспериментами малой размерности. Чтобы качественно понять крупномасштабное явление, которое может иметь место во время сильного землетрясения, рассмотрим результаты экспериментов Натансона [14, 19, 45].

Рис. 21 показывает эскиз экспериментального аппарата, который использовал Натансон. Эксперименты проводились с использованием вертикальной металлической трубы, имеющей внутренний диаметр 240 мм. Толщина стенки трубы составляла 2.5 мм. Столб жидкости ограничен сверху резервуаром с постоянным уровнем и давлением, а снизу — поршнем, совершающим гармонические колебания. Поршень обеспечивает вертикальные колебания воды. Частота и амплитуда гармонических колебаний поршня могли плавно меняться от 0.5 гц до 50 гц и от 0 мм до 15 мм. Давление на свободную поверхность воды было равно атмосферному. Скорость звука в трубе составляла 750 м/сек. Длина водяного столба менялась от 4 м до 7.5 м. При этом фундаментальная частота столба менялась приблизительно

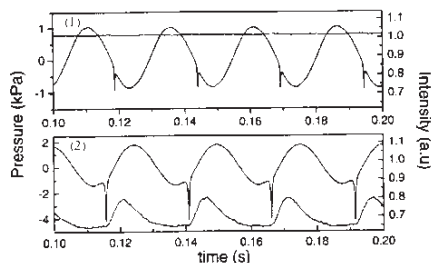


Рис. 20. Колебания, зафиксированные датчиками давления и интенсивности света для частоты 40 гц: (1) $G=1.2g$ и (2) $G=2.3g$ [21].

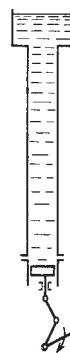


Рис. 21. Эскиз экспериментального аппарата [19, 45].

от 300 гц до 160 гц. Во время экспериментов измерялись поршневое смещение и давление около поршня. Эксперименты показали, что, когда ускорение поршня превысило g , в трубе начали образовываться волны большой амплитуды (ударные волны), имеющие крутой фронт. Эти волны возникают в результате столкновения столба жидкости с поршнем.

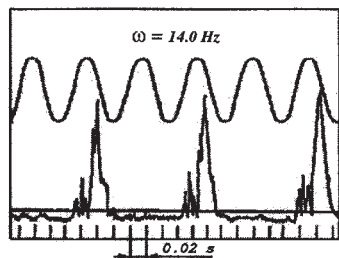


Рис. 22. Сильно-нелинейные колебания столба воды (возбуждающая амплитуда 0.004 м, длина столба — 6 м, вынуждающая частота — 14 гц) [14, 19].

На рис. 3 и 22 представлены осциллограммы гидродинамического давления. Они состоят из пиков и участков постоянного давления. Синусоидальные кривые показывают положения поршня. Гладкие участки между пиками на осциллограмме объясняются периодическим образованием кавитационной полости в воде около поршня. Таким образом, расстояние между пиками определяет время свободного полета столба. Пики давления — результат схлapyивания кавитационной полости и столкновения столба жидкости с поршнем.

Время полета столба воды определяется амплитудой и частотой вынуждающих колебаний.

Простые вычисления показывают, что кавитационная полость образуется, если частота поршня равна 11 гц, а амплитуда колебаний равна 0.002 м. Если амплитуда равна 0.0011 м, то полость возникает, когда частота равна 15 гц. На рис. 22 представлен случай, когда время полета является настолько большим, что возбуждаются субгармонические колебания столба воды. В целом, эти колебания столба напоминают прыжки (колебания) шара на вибрирующей основе.

Во время сильных землетрясений объем пор в геоматериалах может увеличиться, и их свойства начинают напоминать жидкость. В частности, сильно-нелинейные волны могут быть возбуждены на поверхности гранулированного материала. Примеры таких явлений показаны на рис. 23. Подобные

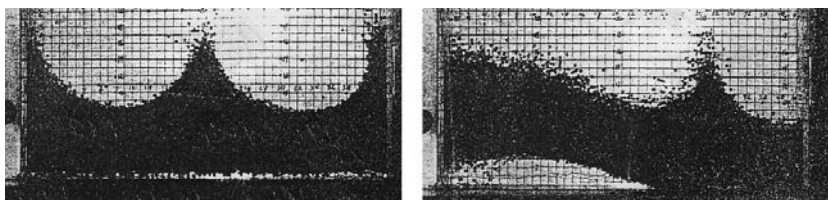


Рис. 23. Две фотографии возбужденных в контейнере поверхностных волн большой амплитуды; вынуждающее вертикальное ускорение $G = 6.2g$ [18].

сильно-нелинейные волновые явления могут возбуждаться в верхних слоях осадочных пород, когда вызванное землетрясением вертикальное ускорение твердого основания существенно превышает g .

Мы думаем, что во время сильных вертикальных движений, вызванных землетрясением, верхележащий материал может отделиться от твердой основы. В результате между этими материалами образуется полость (см. рис. 2 и 23). Схлапывание полости и соударение верхнего материала и твердой основы могут произвести сильно-нелинейную волну. Возможно, катастрофическое ускорение более $4g$, измеренное недавно в Японии [9], является результатом подобного столкновения.

Пик ускорения на поверхности был $3.866g$ в вертикальном направлении (левая сторона рис. 24) и $1.435g$ в горизонтальном. Эти данные не вписываются ни в какие, известные до сих пор, рамки. Не только величины ускорений, но и их величины относительно друг друга, являются больше, чем аномальными. Ведь горизонтальное ускорение обычно значительно больше, чем вертикальное. Ускорение замерялось также на глубине 260 м в слое твердых пород. Там горизонтальное и вертикальное ускорения давали более привычные результаты, а именно, $1.036g$ и $0.683g$ (правая сторона рис. 24). Отсюда следует, что катастрофическое усиление волн связано с поверхностными эффектами.

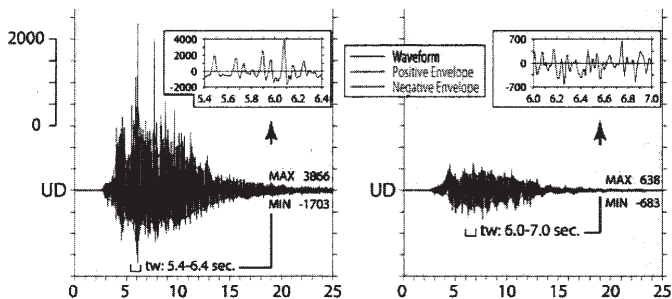


Рис. 24. Акселерограммы вертикального (слева) и горизонтального (справа) ускорений, замеренных во время землетрясения Ивате-Мияги (2008, Япония) [9].

Из рис. 24 (левая сторона) видно, что формы волн вертикального поверхностного ускорения существенно несимметричны относительно нулевой линии (см. также рис. 4): положительные пики выше и острее, чем отрицательные пики. Этим они принципиально отличаются от горизонтальной поверхностной компоненты и от измерений на глубине 260 м (правая сторона). Важно отметить, что длительность отрицательных пиков в интервале от 5 до 7 секунд приблизительно в 2 раза превосходит длительность положительных

пиков. Таким образом, рассмотренные сейсмические колебания поверхности Земли, показанные на рис. 4 и 24, качественно соответствуют колебаниям столба воды и осциллограмме, представленной на рис. 22, и поэтому мы можем предположить, что во время землетрясения Ивате-Мияги имели место низкочастотные колебания сильно-нелинейных волн в верхних слоях осадочных пород.

Описанные выше эксперименты продемонстрировали множество сильно-нелинейных волновых эффектов. В частности, они показали, что поведение материалов поверхностных слоев в волнах сжатия и разрежения может быть весьма различным. В пределах волны сжатия у материалов сохраняется прочность. Однако в пределах волны разрежения поведение материалов может напоминать свойства газа или пузырьковой жидкости. В результате возбуждаемые землетрясением вертикальные колебания верхних осадочных пород могут напоминать гистерезисную динамику (как бы прыжков) столба воды на вибрирующей основе.

3.2.3. Топографический эффект: экстремальные колебания холма Тарзана

Анализ сообщения Дарвина о взрывном поведении вершин гор (см. подраздел 2.5.4) затрудняется тем, что имеется не много достоверных измерений сильных ускорений на вершинах гор во время землетрясений. Поэтому результаты измерений в различных точках холма Тарзана [13, 14] до сих пор вызывают большой интерес.

Калифорнийское землетрясение (17 января 1994 года) вызвало обширные разрушения в долине Сан Фернандо (Fernando's Dignity) и прилегающих районах. Во многих местах движение земли было усилено или сильно изменено локальными эффектами, но наиболее локализованный и экстремальный местный эффект был зафиксирован на Тарзане, маленьком холме плавных очертаний, расположенным в 6 км к югу и в 18.7 км над эпицентром землетрясения. На вершине холма пик горизонтального ускорения варьировался от 1.78g до



Рис. 25. Вид холма Тарзана [54].

1.92g. Это один из наибольших когда-либо замеренных пиков. Он значительно выше, чем давали эмпирические кривые ускорения и численные расчеты. Пиковое вертикальное ускорение было 1.14g.

Холм имеет 500 м в длину, 130 м в ширину и около 15–20 м в высоту относительно окружающей местности [52–54]. Характерно то, что экстремальное движение поверхности было зафиксировано в радиусе 50 м вокруг вершины холма, за пределами которого движение поверхности соответствовало теоретически ожидаемому уровню. Имело место сильное различие механических свойств материала холма и подстилающего жесткого основания.

Толщина почвы холма приблизительно 4 м. Измерения показали, что она обладает низкой прочностью, осредненная скорость сдвиговых волн в ней была около 200 м/сек. Ниже располагается мягкий глинистый сланец, который содержит много включений. Этот слой располагается на глубине от 4–5 м до 12 м. Ниже от 12 м до 100 м идет более твердый сланец, который местами перемежается еще более твердыми слоями, типа гранита. Встречаются также слои глины. Вода появляется на глубине около 17–18 м. Подчеркнем, что она появляется как раз на поверхности раздела материала холма и жесткого основания. Видимо, с появлением воды связано резкое изменение скорости волн, наблюдаемое на этой границе. В частности, там осредненная скорость волн сжатия увеличивается от 640 м/сек до 1600 м/сек. Следовательно, на указанной границе имеется очень резкое импедансное различие материалов. Все авторы [52–54] сходятся на том, что усиление сейсмических волн в Тарзане связано с топографическим и резонансным эффектами. Галиев [14] дополнительно ввел в рассмотрение столб материала холма, локализованный в окрестности вершины и имеющий радиус приблизительно 50 м (рис. 26). Он учел то, что холм располагается практически над центром землетрясения, поэтому вертикальная сейсмическая волна сжатия достигла основания указанного выше столба под очень малым углом (около 5 градусов), была им захвачена и начала резонансно переотражаться от свободной поверхности и основания. При этом могли возникнуть ускорения, большие, чем g, и могла иметь место некоторая последовательность отделений подошвы центральной части холма от жесткого основания.

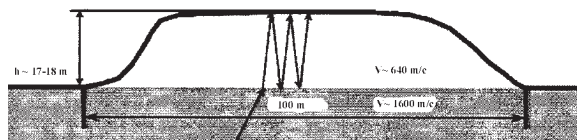


Рис. 26. Схема сечения холма Тарзана и резонансных колебаний захваченной холмом вертикальной волны [54].

Сейсмограмма колебаний одной из точек вершины холма Тарзана во время главного сейсмического удара представлена на рис. 27. Видно, что формы волн поверхностного ускорения существенно несимметричны относительно нулевой линии. Положительный пик выше отрицательных пиков. Возможно, это результат отрыва центральной части холма от жесткого основания.

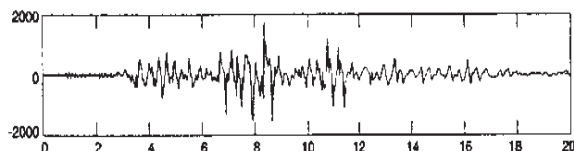


Рис. 27. Сейсмограмма колебаний одной из точек вершины холма Тарзана во время главного сейсмического удара [52]. Ускорение дано в 0.001g, время в секундах.

В [14] подчеркивается, что все сказанное объясняет неожиданную динамику центральной части холма Тарзана. В какой-то мере ее демонстрируют сейсмограммы сейсмических ударов, следующих за основным ударом. Они представлены на рис. 28. Для горизонтального движения, перпендикулярного к оси холма, усиление колебаний его вершины относительно основания было равно 4.5 на частоте 4.5 гц. Усиление в направлении оси холма равнялось 2 (рис. 28).

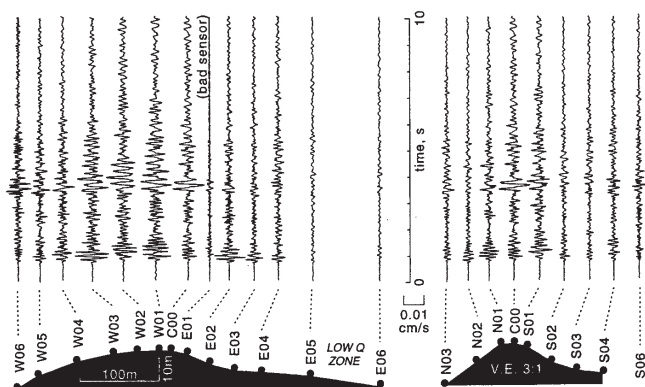


Рис. 28. Север-юг сейсмограммы, измеренные в различных точках поверхности холма Тарзана [52].

К сожалению, аналогичных по количеству информации сейсмограмм для главного удара не получено. Рассмотрим более внимательно то, что у нас есть, а именно, сейсмограммы W02 и S01 из приведенных на рис. 28. Видно, что формы волн поверхностного ускорения в этих точках существенно несиммет-

ричны относительно нулевой линии. Положительные пики выше и острее, чем отрицательные пики. В целом, в своей центральной части кривые W02 и S01 напоминают акселерограммы землетрясения Ивате-Мияги в Японии (рис. 4 и 24) и разрывные колебания столба воды в экспериментах Натансона (рис. 3 и 22).

Таким образом, колебания некоторых возвышенностей во время сильных землетрясений могут напоминать прыжки шара на вибрирующем основании. Собственно говоря, эта идея обобщает замечание Дарвина: *...Маленькие тела подбрасывались на несколько дюймов от земли...* [1, стр. 256].

3.2.4. Топографические эффекты: подъем и разрушение вершин горных хребтов

Выше мы объяснили подъем земли разрыхлением слоев поверхностных осадочных пород. Из экспериментов следует, что разрыхление и разрушение могут иметь место только, если ускорение верхних слоев является достаточно большим. Поэтому мы должны спросить себя о величинах поверхностных ускорений и как часто они возникают во время землетрясений. К настоящему времени известны приблизительно 25 акселерограмм с пиковым ускорением, большим, чем g . Причем даже умеренно сильные землетрясения могут вызвать пиковое ускорение земли выше g , например, землетрясение в Сан Фернандо (San Fernando) 1971 года, M . 6.6 (магнитуда 6.6) (пиковое ускорение земли (PGA) 1.25g); землетрясение в Имперской Долине (Imperial Valley) 1979 года, M . 6.4 (PGA=1.25g); землетрясение Моргана Хилла (Morgan Hill) 1984 года, M . 6.1 (PGA=1.29g); землетрясение Нахани (Nahanni), Канада, 1985 года, M . 6.8 (PGA > 2g вертикальное; PGA=1.25g горизонтальное); землетрясение Петролиа (Petrolia) 1992 года, M . 7 (PGA > 1.85 g) и землетрясение Нортридж (Northridge) 1994 года M . 6.7 (PGA=1.78 g) [6]. Недавно было зафиксировано поверхностное вертикальное пиковое ускорение 3.8g [9, 55]. Это катастрофическое вертикальное ускорение поверхности Земли более чем в два раза превышало горизонтальное ускорение.

Мы не знаем, как высоки могли бы быть ускорения, которые возбуждались во время землетрясения в 1835 году. По-видимому, они превышали величину g , так как маленькие тела подбрасывались на несколько дюймов от земли. Мы отметили выше, что, согласно полевым наблюдениям [12], усиление ускорения вершин гор по отношению к основанию может достигнуть величины 10 и больше. Согласно этому, если ускорение основания составляет 0.5g, то ускорение вершины может достигнуть 5g. В целом, этот удивительный ре-

зультат согласуется с данными измерений [9, 10]. Следовательно, вертикальное ускорение вершин гор в 1835 году могло быть много больше g .

В литературе, начиная с древнейших времен, можно найти много описаний катастрофических землетрясений. В частности, интересные для нас сведения содержатся в японских источниках. Известно, что Япония находится в зоне наиболее сильных землетрясений. В книге «Записки из кельи» один из классиков японской литературы Камо-но Темэй вспоминает: «Во втором году Гэнряку (1185 год) случилось сильное землетрясение. Вид его был необыкновенный: горы распадались и погребали под себя реки... скалы расщелились и скатывались в долину». Землетрясение Мино-Овари (Mino-Owari) 1891 года было самым большим зарегистрированным землетрясением, поразившим внутреннюю Японию. Сейсмолог Джон Милн (John Milne) сообщил об искривлениях, произведенных вдоль линий железной дороги, растрескивании земли, сползании горных склонов и обрушении их пиков, сжатии долин и других необычайных явлениях [28, стр. 76]. Хартцель и др. [4] обнаружили серьезные вызванные землетрясением разрушения вершин горного хребта Робинвуд (Robinwood), Лома Прита (Loma Prieta), Калифорния, 1989. Они объяснили разрушения топографическим эффектом.

Чтобы изучать эту проблему далее, мы теперь рассмотрим некоторые теоретические и экспериментальные результаты. Во-первых, мы смоделируем аналитически топографические эффекты вытянутых горных хребтов и конических возвышенностей.

Известно, что упругие волны распространяются вдоль цилиндрического стержня однородного поперечного сечения без изменения формы. Однако, если поперечное сечение не однородно, то форма распространяющейся волны, так же как ее амплитуда, меняется. Чтобы проиллюстрировать этот факт, рассмотрим распространение волны сжатия, описываемое следующим выражением для перемещения u :

$$u = r^{-n} F(r + c_0 t). \quad (1)$$

Здесь функция $F(r + c_0 t)$ описывает распространение волны, r — радиальная координата, t — время, c_0 — скорость волны и n — константа. Мы предполагаем, что случай $n = 0.5$ (цилиндрическая волна) приближенно описывает движение волны к вершине длинного вытянутого хребта, а случай $n = 1$ (сферическая волна) описывает движение к вершине конического вулкана.

Ускорение волны определяют следующим образом:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = r^{-n} c_0^2 \partial^2 F / \partial (r + c_0 t)^2. \quad (2)$$

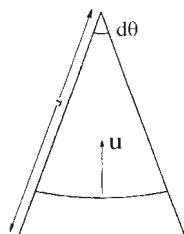


Рис. 29. Схема конической возвышенности, имеющей крутой склон ($d\theta$ является маленьким) и подвергнутой воздействию вертикального смещения u .

Здесь $F = F(r + c_0 t)$. Из (2) следует, что ускорение сильно увеличивается около вершины, где $r \rightarrow 0$ (см. рис. 29). Ускорение зависит также от крутизны волны. Чем круче фронт волны, тем выше ускорение.

Этот результат хорошо согласуется со значительным усилением эффектов землетрясения, наблюдаемых у вершин гор. Таким образом, мы качественно показали, что вызванное землетрясением ускорение горных вершин может быть очень большим. Если ускорение основания имеет порядок g , то ускорение вершины может быть много большим g . В реальных ситуациях вдоль склона горы имеют место сложные эффекты отражения волн, которые могут быть настолько значительными, что порождают внутренние трещины и разломы, если горный хребет или вулкан сформирован слабосвязными геоматериалами. Рис. 30 иллюстрирует очень приблизительно волновые процессы, которые могут быть вызваны землетрясением в горных хребтах и вулканах.

Зарождение внутренних трещин определяется склоном горы. Волна сжатия, движущаяся от основания, частично отражается от склонов как волна растяжения, в то же самое время продолжая движение к вершине в своей центральной части. Отраженные от склонов волны пересекаются на оси хребта (вулкана), суммируются, и там возникает область сильного растяжения. Это — причина возможного осевого разлома (рис. 30). Не трудно видеть, что, если

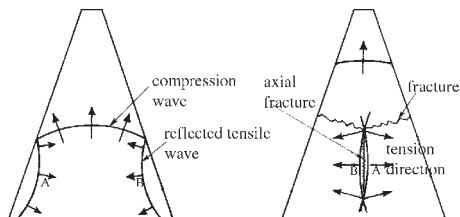


Рис. 30. Пример образования трещины в пластине, имеющей форму клина. Волна сжатия и отраженные волны (слева), образование трещины в результате взаимодействия сходящихся волн растяжения (справа).



Рис. 31. Разломы пластин в форме клина в результате взрыва заряда, распределенного на их основаниях [56].

волна растяжения имеет достаточную интенсивность, то осевой разлом должен начинаться с точки начального столкновения сходящихся волн растяжения и затем распространиться вверх и вниз от этой точки. Рис. 30 не показывает картину отражения волны сжатия от вершины. Мы отмечаем только, что волна сжатия отражается от вершины как волна растяжения и после нужно рассмотреть сложные эффекты взаимодействия многих волн.

Теперь, мы рассмотрим некоторые экспериментальные данные. Рис. 31 показывает эффект наклона боковых границ образца относительно его основания на

трещины. Волна сжатия создавалась в результате взрыва заряда, распределенного по основанию. Из-за отражения от склонов и взаимодействия возникающих волн в клиновидных пластинах (образцах) возникали трещины. В частности, они концентрировались вблизи вершины образцов. Это справедливо даже для образцов с относительно малым углом склона. Аналогичные результаты были получены при испытаниях других образцов.

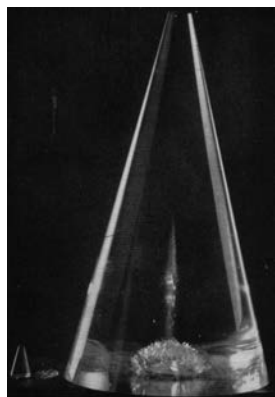


Рис. 32. Разломы в конусе из прозрачного материала, образованные в результате взрыва заряда на его нижней стороне. У вершины возникает трещина, после чего ее наконечник отлетает с высокой скоростью. Наконечник расположен слева [57].

Если заряд взрывался в центре основания конуса из прозрачного материала (рис. 32), то наблюдались два эффекта. Первый определяется схождением волн, отраженных от боковой поверхности. При этом на оси конуса возникает зона разрушения, состоящая из пор (пузырьков), которая более напоминает кавитационную полость в жидкости, чем трещину в твердом теле. Во-вторых, вершина конуса разрушается. Таким образом, эксперименты качественно подтверждают результаты аналитического исследования и графическое построение рис. 30.

Эксперименты и теоретический анализ показывают, что разломы могут группироваться около вершины и оси горного хребта и вулканов. Нужно подчеркнуть, что рассмотренные вертикальное движение и поверхностные разломы фиксировались и при натурных экспериментах. Локализация разломов в возвышенности конической формы наблюдалась после подземного ядерного взрыва в 1.7 килотонны [58]. Около вершины волна напряжения образовала три плиты, равные по

толщине (≈ 35 м). Плиты переместились вверх с начальными скоростями приблизительно 2.4, 1.5 и 0.7 м/сек, соответственно. Верхняя плита из материала типа туфа, отстоящая приблизительно 230 м от точки взрыва, поднялась на высоту 225 мм.

Разлом скальных пород и камнепад в результате подземного ядерного взрыва показан на рис. 33. Разломы были вызваны пиковой скоростью 2 м/сек и пиковым ускорением 5–6g поверхности земли от двух подземных ядерных взрывов вдоль Утесов Рики (*Rickey Cliffs*) на Столовой горе Пахуте Меса (*Pahute Mesa*).



Рис. 33. Разлом скальных пород и камнепад как результат подземных ядерных взрывов.

В целом, представленные результаты согласуются со следующими замечаниями Дарвина *...поверхностные слои некоторых узких гребней невысоких гор были до того разбиты, что, казалось, будто их взрывали порохом...* [1, стр. 370] и *...Я сильно заинтересовался, найдя на самом высоком пике одного хребта (приблизительно 700 футов выше уровня моря) большой арочный фрагмент, лежащий на его выпуклой или верхней поверхности. Должны ли мы полагать, что он был ранее подброшен в воздух, и там перевернут?...* [1, стр. 255].

Представленные в последних разделах результаты очень важны для нас. Они позволяют объяснить многие рассматриваемые в этой книге наблюдения Дарвина.

3.2.5. Топографический эффект: подъем и разрушение поверхности островов

Подъем островов. Острова — вершины горных хребтов и гор, почти полностью погруженных в воду океана (рис. 34). Поэтому подъем их может быть объяснен концентрацией сейсмической энергии около вершин, ростом вертикального ускорения материала вершины из-за топографического эффекта и разрыхлением этого материала. Подобный подъем земли после чилийского землетрясения 1835 года был установлен Дарвином и капитаном Фиц-Роем.

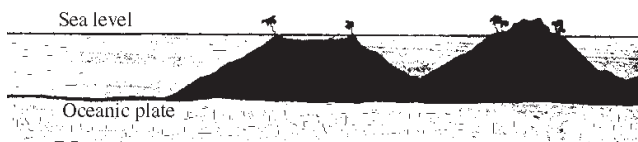


Рис. 34. Океанские острова.

Самый сильный подъем произошел на острове Санта Мария (рис. 35), в 35 милях к юго-западу от Консепсьона (до 3 м). Мы думаем, что это — результат топографического усиления сейсмических волн. На острове Моша (Mocha) (в 120 милях к юго-западу от Консепсьона), согласно наблюдателю, точности которого капитан Фиц-Рой был склонен доверять, земля поднялась приблизительно на 2 фута (0.6 м).

Мы подчеркиваем снова, что величина подъема в последующем менялась. Капитан Фиц-Рой отмечает, что в течение нескольких дней после землетрясения море не поднималось к своему обычному уровню, отмеченному на суше. Различие уровней до и после землетрясения по вертикали составляло 4 или 5 футов. Но это расстояние постепенно уменьшалось. Дарвин заметил, что по-

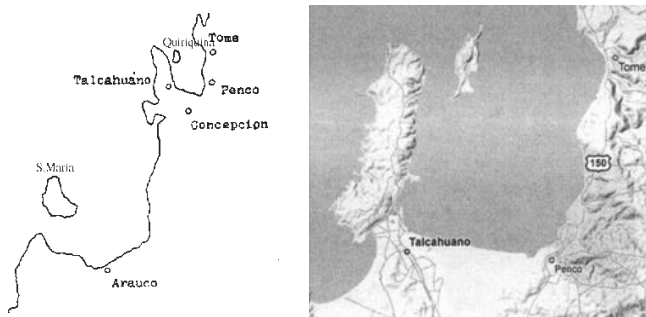


Рис. 35. Местоположение островов Санта Марии и Кирикина (слева). Современная форма острова Кирикина (справа).

сле нескольких недель земля оказалась ниже, чем она была сразу после землетрясения, и он предположил, что еще большее понижение может быть, и это связано с оседанием почвы.

Топографический эффект может объяснить подъем острова Ранонга во время землетрясения 1 апреля 2007 на Соломоновых островах. Вспомним, что подъем морского дна у этого острова очень крутой (см. карту на рис. 8). Следовательно, этот остров — вершина подводного вытянутого горного хребта. Источник сейсмических волн (разлом морского дна) расположен очень близко (около 5 км) от конца острова и деревни Лэйл (Lale) (рис. 8). Подъем земли там был самым высоким на острове. Согласно рассказу очевидцев — жителей Лэйла — земля поднялась примерно на 7 м сразу после землетрясения. Затем уровень моря начал постепенно подниматься.

Две международные команды по наблюдению за цунами изучили результаты землетрясения. Первая [60] была послана в течение недели после этого события. Эта команда нашла, что южная часть острова Ранонга поднялась на 3.6 м. Подъем уменьшился к северу до 1.5 м. Подъем на меньше, чем 1 м был определен на северо-западной оконечности Велла Лавелла (Vella Lavella) и островов Вонавона (Vonavona). Максимальная высота цунами 8.6 м была измерена в деревне Тапураи (Tapurai) на острове Симбо.

Трещины в земле были обнаружены около деревни Лэйл (рис. 36). Максимальная деформация земли при землетрясении произошла между островом Ранонга и островом Симбо (рис. 8). Острова поднялись перед прибытием цунами, значительно уменьшив их воздействие. Таким образом, высота цунами была больше, чем максимальный подъем земли.

Вторая команда прибыла 16 апреля [61]. Было найдено, что самый большой подъем 2.46 ± 0.14 м. был в южной части Ранонга. Таким образом, мы можем думать, что в течение недели подъем земли уменьшился от 3.6 м до 2.6 м.

Прибрежные отложения и почва островов часто содержат пузырьки газа, обычно метана, образовавшегося при биологических и термических процессах. Присутствие газовых пузырьков может оказать существенный эффект на поведение морского дна, прибрежных материалов и маленьких океанских островов во время землетрясений.



Рис. 36. Пример вызванных землетрясением трещин около деревни Лэйл [*].

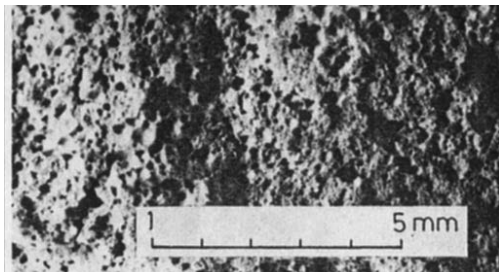
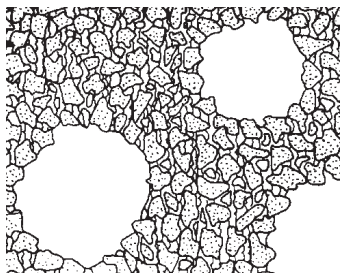


Рис. 37. Схематическое представление газированной почвы как влажной почвы, содержащей газовые пузырьки (слева) и образец почвы (справа) [62].

Разлом острова. Вызванные землетрясением изменения формы маленького острова Кирикина привлекли внимание Дарвина. Ширина острова составляет приблизительно 500 м, а длина около 4000 м. В течение прошедших двух столетий форма острова, конечно, изменилась. Поэтому на рис. 35 остров представлен согласно старой карте из [63] (слева) и новой (справа) карте. Высота холмов (хребта) на острове составляет приблизительно 140 м.

Дарвин [1, стр. 370] описал результат вызванных землетрясением колебаний маленького острова Кирикина: *...Почва во многих местах дала трещины в направлении с севера на юг; это направление может быть объяснено влиянием крутых параллельных берегов этого узкого острова. Некоторые трещины около береговых обрывов были шириной в целый ярд...* Были также разрушены вершины возвышенностей острова. Землетрясения могут изменить форму острова. Дарвин отметил: *...с обрывов уже упали на берег громадные глыбы...*

Я убежден, что это землетрясение сильнее способствовало уменьшению размеров острова Кирикана, чем постоянное разрушающее действие непогоды и моря в течение целого столетия... [1, стр. 370–371].

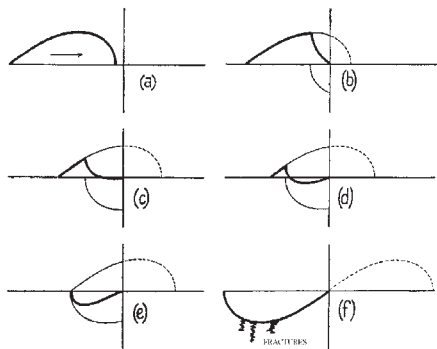


Рис. 38. Отражение поверхностной волны от свободной границы и образование поверхностных трещин [57].

Известно, что разломы и трещины могут образоваться, когда волна отражается от свободной поверхности (см. рис. 38). В случае острова, если имеется сильное импедансное различие между его материалом и водой, вызванная землетрясением волна теряет только маленькую часть энергии при отражении от крутого

берега. Таким образом, отражение от таких берегов напоминает отражение волны от свободных границ, при котором возникает растягивающее напряжение и, как следствие, возможность появления трещины.

Рис. 38 иллюстрирует качественное распределение смещения на различных стадиях отражения плоской поверхностной волны сжатия произвольной формы от крутого обрыва берега острова. Результирующее смещение является суммой падающей и отраженной волн, которые показаны тонкими линиями на рис. 38. Результирующее смещение показано толстой линией: (а) показывает волну, приближающуюся к свободной границе; (b) показывает распределение, когда часть волны была отражена, но смещение все еще соответствует сжатию поверхностного материала; (с) — немного более поздняя стадия, когда зона растяжения образовалась около границы; эта зона расширилась в (d) и в (e). В (f) — отражение завершено, и трещины образовались там, где растягивающее напряжение превысило некоторый критический уровень.

Конечно, возможность описанного возникновения трещин зависит от начальной прочности почв острова, другими словами, от их начальной газированности. Во время землетрясения объем пузырьков увеличивается, почва разрывается и ее поверхность поднимается. Свойства почв до и после землетрясения могут стать весьма различными. После землетрясения объем пузырьков медленно уменьшается и поверхность почвы опускается. Все сказанное определяет динамику поверхности островов, описанную Дарвином.

Вызванное землетрясением поднятие земной поверхности, свойства слабосвязных почв и топографический эффект — вот что, по мнению Дарвина, объясняет некоторые результаты катастрофического чилийского землетрясения 1835 года.

3.3. Обсуждение идеи Дарвина о близкой связи между вулканическими и сейсмическими силами

Много лет назад Дарвин подчеркнул *...близкую связь между вулканическими и поднимающими силами...* [3, стр. 54]. Теперь хорошо известно, что землетрясения могут вызывать колебания земли, извержения гейзеров и другие проявления сейсмической активности за тысячи километров от них [31]. В настоящее время предложены несколько интересных механизмов такой связи [10, 15, 22, 24, 25, 64–69]. Линд и Сакс [22] ясно показали, что сильное землетрясение может быть запускающим механизмом для больших извержений. В частности, они нашли острый пик в количестве извержений в тот же самый день, что и землетрясение.

Вместе с тем имеется и обратное воздействие. Дарвин написал, что *...большие столбы дыма изверглись из высоких кратеров Анд, уменьшив колебания земли, которые в тот момент сотрясали всю окружающую местность...* [3, стр. 58]. Таким образом, он полагал, что взаимодействие сейсмической волны большой амплитуды с извержениями вулканов может вызвать локальное изменение характера сейсмических колебаний.

Землетрясения, сопровождаемые извержениями далеко расположенных вулканов, — редчайшее событие. Дарвин пишет: *...Хотя известно, что землетрясения охватывают огромные пространства... все же немного случаев отмечено одновременного извержения вулканов, расположенных очень далеко друг от друга...* В связи землетрясений и извержений он увидел важную причину эволюции лика Земли. Мы уже привели некоторые его суждения по этой проблеме во введении и в подразделе 2.4.5. Здесь продолжим их рассмотрение.

3.3.1. Разрушение кратера — механизм, инициирующий крупномасштабные вулканические извержения

Мы цитировали неоднократно строки Дарвина, посвященные разрушению материала на вершинах возвышенностей, чтобы подчеркнуть его интерес к этому феномену. Здесь приводится еще одно: *...утром мы поднялись вверх по массе зеленой породы, которая покрывала вершину. Эта порода, ...была раздроблена на огромные угловатые фрагменты. Я заметил, между прочим, одно замечательное обстоятельство, а именно, что многие разломы имели разную степень свежести — некоторые, казалось, были образованы лишь вчера, ...я полагал, что это следствие частых землетрясений...* [1, стр. 313]. Подобные разломы в случае вулканов могут привести к крупномасштабным извержениям. В настоящее время подобный процесс хорошо документирован для случая взрывного извержения вулкана Св. Елена.

27 марта 1980 года первый выброс газа появился над вулканом. Следовательно, давление газа и магмы внутри вулкана начало приближаться к критической точке. Зародившиеся землетрясения указывали, что магма начала двигаться по магматическому каналу. Затем северный склон вулкана начал раздаваться со скоростью более, чем 1 м в день. Последовательность землетрясений усиливалась до 28 апреля. Затем сила землетрясений уменьшилась. 18 мая землетрясение силой 5.1 вызвало гигантский оползень, во время которого вершина вулкана начала разрушаться (рис. 11). Газы и магма взорвали вершину. Джонинтз-Трислер (Jonientz–Trisler, USGS) отмечает: «18 мая магма и газы не взорвались сами по себе. Только после землетрясения и последовав-

шего оползня внешнее давление упало настолько, что магма и газы начали извергаться из канала вулкана».

Таким образом, очень быстрая разгрузка вершины вулкана Св. Елены инициировала начало извержения. Нечто подобное происходит и при отражении вертикальной сейсмической волны сжатия от вершины вулкана. Вулкан часто образован продуктами предыдущих извержений и растет вверх в результате извержений. Если вулкан периодически извергает то лаву, то пепел, то он образован слоями этих материалов. Таким образом, эти вулканы образованы пористыми материалами, состоящими из шлаков и туфов, которые имеют низкую прочность на растяжение.

Имея в виду сказанное, мы рассмотрим одновременные извержения четырех вулканов во время чилийского землетрясения 1835 года [64]. Дарвин [1, стр. 380] сообщает, что *...несколько больших кратеров в Кордильерах центрального Чили начали новый период извержений...* Рассмотрим эти извержения, приняв во внимание форму вулкана. Три из вулканов (Минчинмавида (2404 м), Серро Янтелес (2050 м) и Петероа (3603 м)) сформированы в виде симметрических конусов с крутыми сторонами. Робинзон Крузо (922 м) является конусом со слабоскошенными сторонами. Эти вулканы не очень активны. Последнее большое извержение Минчинмавида, Серро Янтелес и Робинзон Крузо были в 1835 году. Петероа извергался также в 1837 и 1937 годах. Дарвин сообщает, что кратеры Минчинмавида, Серро Янтелес были покрыты снегом [1, стр. 276].

Конические вулканы часто имеют центральный канал, ведущий к поверхности от магматической камеры. У недействующих вулканов канал обычно закрыт осадочными породами или застывшей магмой. Если магма вязкая, то над каналом часто возникает купол. Застывшая магма и осадочные породы закрывают канал подобно «пробке», что приводит к извержениям взрывного типа, когда поток газов и магмы буквально вышибает пробку из канала. Конические вулканы обычно увенчаны воронкообразным кратером. Во время сильных взрывных извержений кратер может быть разрушен (см. рис. 12).

Четыре рассматриваемых вулкана являются коническими. Мы можем предположить, что их каналы были закрыты пробками в 1835 году. Эти общие черты важны для модели, которая обсуждается ниже. Пробка обычно имеет высокий уровень пористости и очень низкий предел прочности на разрыв. Например, пористость лавы купола вулкана Холмы Суфриера (Soufriere Hills) в Монтсеррате (Montserrat), Вест-Индия, составляет 33%. Пористость материала кратера и пробки имеет тот же самый уровень, поэтому пробка может легко быть фрагментирована сильными сейсмическими волнами.

Действие сильного землетрясения на основание вулкана может быть сравнимо с действием ядерного взрыва. Выше отмечалось, что после подземных ядерных взрывов [58, 59] наблюдались вертикальные движения и поверхностные разломы на вершинах гор (см. также рис. 33). Аналогичные явления могут произойти в результате сильного землетрясения. При этом основание вулкана получает большое, вызванное землетрясением, вертикальное ускорение, и волна сжатия начинает распространяться через тело вулкана (рис. 39 а). Так как мы рассматриваем конический вулкан, взаимодействие этой волны со свободной поверхностью вулкана приблизительно соответствует показанному на рис. 30–32. Отражение волны от склона вулкана создает зону растяжения в окрестности канала вулкана (рис. 39 а). Давление магмы канала сдерживается весом и прочностью пробки (купола). Пробка может быть разрушена (рис. 39 б) и выброшена (рис. 39 с), когда восходящая сейсмическая волна отражается от кратера вулкана.

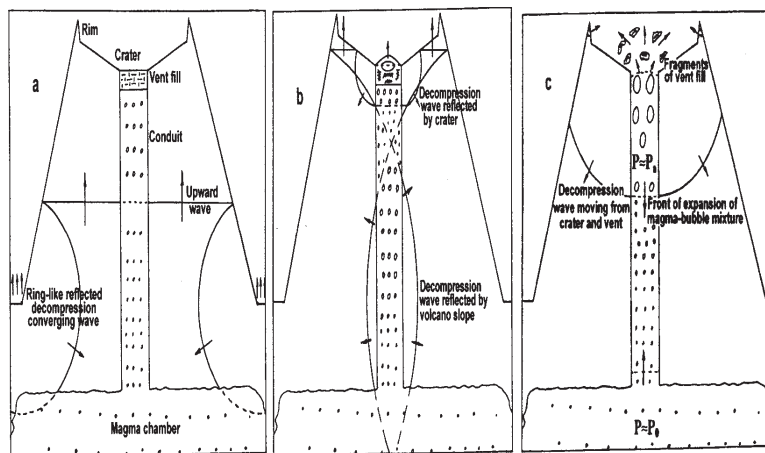


Рис. 39. Динамика взаимодействия конического вулкана, увенчанного кратером, с распространяющейся вверх сейсмической волной. (а) — Схема взаимодействия вулкана (гора, кратер, пробка, канал и магматическая камера) и волны. (б) — Отражение волны сжатия от поверхности кратера, начало разрушения пробки и рост пузырьков в магме. (с) — Волновая динамика начала крупномасштабного извержения. P_0 — давление в камере магмы [15].

После разрушения пробки давление на поверхности магмы падает до атмосферного P_a , и фронт декомпрессии начинает двигаться вниз по каналу (рис. 39 с). За фронтом большие газовые пузыри начинают формироваться в магме (см. рис. 5). Последующий рост пузырей, особенно быстрый у вершины, объясняет выброс газа и магмы из кратера и взрывной характер изверже-

ний некоторых вулканов [70–81]. Таким образом, вызванные землетрясением сильно-нелинейные волны в вулканах могут качественно объяснить одновременность больших извержений после сильных землетрясений.

Разрушение пробки магматического канала. Возможные процессы и результаты разрушения иллюстрируют рис. 40–42. Пробка моделируется как короткий цилиндр или пластина. Поверхностный взрыв моделирует действие подземного удара.

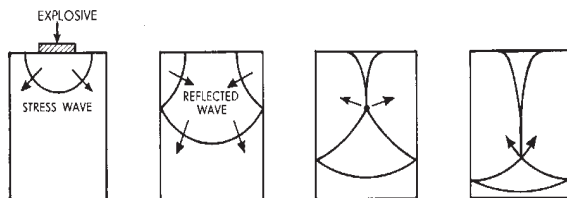


Рис. 40. Распространение и отражение волны от поверхностного взрыва. Центральный разлом сформируется из-за взаимодействия волн, отраженных от боковых поверхностей [56].

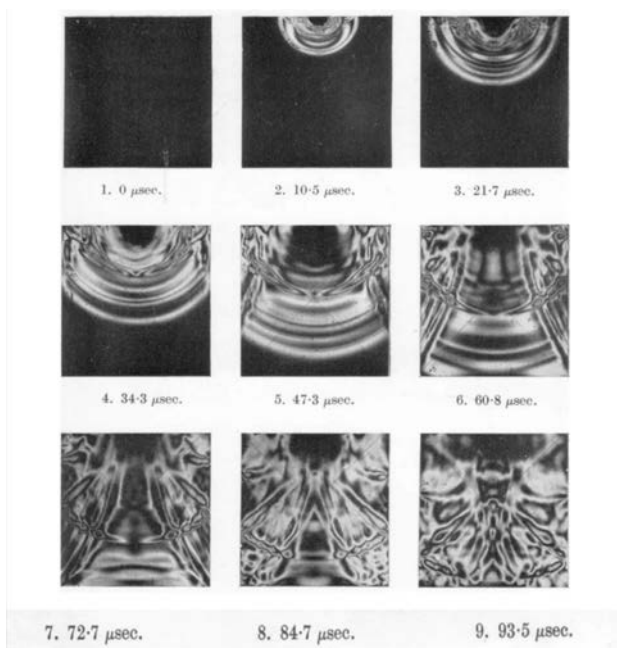


Рис. 41. Волны напряжения, произведенные в пластине «Perrex» с размерами дюймов, 0.12-граммовым зарядом свинцовой окиси, взорванным в центре верхней поверхности образца. Моменты времени указаны с момента взрыва заряда [57].

Волновая динамика пробки на рис. 39 b соответствует качественно схеме рис. 40. Последний рисунок дает упрощенную схему распространения и наложения волн, произведенных поверхностным взрывом. Согласно рис. 40, на оси симметрии образцов (и пробки) могут возникнуть трещины (см. также рис. 30–32).

Более детально образование, распространение и отражение волн, отмеченных выше, иллюстрировано photographиями, представленными на рис. 41.

Аналогично тому, как показано на рис. 40, 41, волна растяжения возникает и в материале пробки канала вулкана. Этот материал имеет низкую прочность на растяжение, поэтому он может быть разрушен во время отражения сейсмической волны сжатия от поверхности вершины вулкана. Действительно, подобные волны растяжения могут создать напряжения, достаточно большие, чтобы вызвать разломы, даже если амплитуда инициирующей волны сжатия была слишком маленькой, чтобы вызвать какие-либо разрушения. Примеры вызванных динамическим растяжением разломов (трещин) показаны на рис. 42.

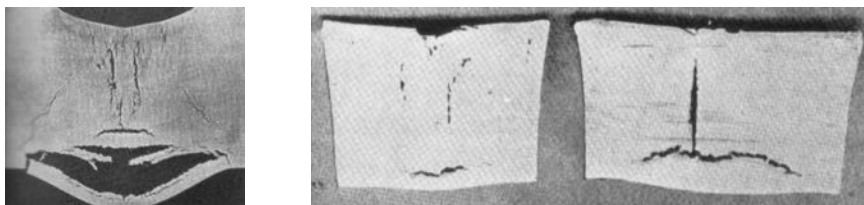


Рис. 42. Поперечные сечения пластины из мягкой стали (слева) и сечения стальных цилиндров (справа) после взрыва на верхней поверхности образцов [56].

Эксперименты показывают, что сначала образуется крупный разлом, который ослабляет материал и облегчает появление следующих разрушающих пробку трещин. Местоположение трещин и также их направления зависят от многих параметров. Однако ясно, что любое ослабление материала вершины вулкана, вызванное трещинами, способствует началу крупномасштабного извержения.

Начало извержения и нелинейные волны в магме канала. Мы рассматриваем вулканы в форме усеченного конуса с кратером на вершине. Поверхность кратера сформирована слабосвязными средами (снег, лед, гранулированные материалы, вода и застывшая или жидкая лава). Центр кратера связан с основанием вулкана каналом, содержащим магму, свойства которой напоминают жидкость с растворенными пузырьками газа. Например, вулкан Холмы Суфриера в Монтсеррате, Вест-Индия, имеет канал диаметром 30 м и кратер диа-

метром 300 м и глубиной 100 м. Толщина пробки канала около 20 м. Таким образом, осесимметричный кратер (наклон склонов 22 градуса) [69] окружает выход канала.

Джим Золвег из геологической службы США (Jim Zollweg, USGS), описывая вулкан Св. Елены, сообщает: «...если бы мы заглянули внутрь вулкана, то увидели бы вертикальную большую трубу. Ширина трубы — несколько десятков ярдов (метров). Мы знаем, что чем тоньше труба, тем меньше она может пропустить жидкости. Если трубу пытаются заставить пропустить слишком большое количество жидкости, то она разрушается. Нечто подобное имеет место и с каналом вулкана. Только в последнем случае разрушается материал стенок магматического канала».

В целом, конический вулкан можно схематизировать как вертикальный трубопровод, увенчанный воронкой с пробкой, связывающий области низкого (атмосфера) и высокого (магматическая камера) давления. По-видимому, геометрия канала — основной параметр, управляющий движением магмы и генерированием вулканических сейсмических волн [79].

После разрушения пробки фронт декомпрессии начинает двигаться в канале (рис. 39 с). Амплитуда декомпрессионной волны равна приблизительно атмосферному давлению P_a . Эта волна отражается от магматической камеры как волна сжатия с амплитудой, близкой к давлению в камере P_0 (рис. 39 с). Когда эта волна достигает поверхности, то может иметь место взрывообразное усиление извержения. В последующем описанный процесс может повторяться. В частности, из-за этого извержение может стать пульсирующим [75–79]. Этот случай можно приблизительно рассчитать, рассматривая канал как резонансную трубу в органе.

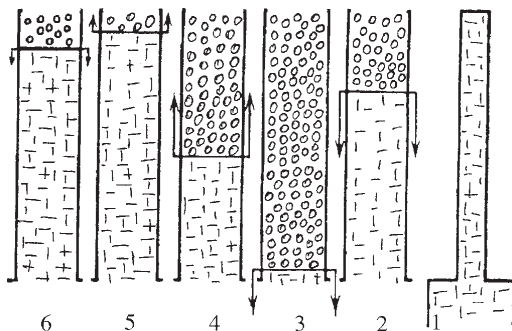


Рис. 43. Простая схема волнового процесса в канале, который может быть инициирован разрушением пробки канала. 1) Закрытый трубопровод; (2–5) Сильно-нелинейная волна, вызванная разрушением пробки (см. также рис. 39).

Сильно-нелинейные волны (рис. 43), распространяющиеся в канале и отражающиеся попеременно от атмосферы и магматической камеры, могут объяснить колебания вулкана. Подобные свободные колебания волн в канале вулкана могут продолжаться в течение долгого времени, пока они подпитываются давлением в магматической камере. Эта динамика сильно зависит от вязкости магмы. В случае слабвязкой магмы рост и схлапывание газовых пузырей в магме происходит на значительной длине канала, что дает почти гармонические колебания вулкана. Однако если магма является очень вязкой, газовые пузыри растут, в основном, у выхода из канала. Там результат быстрого локального роста газовых пузырей может напомнить взрыв [74, 80].

Таким образом, разрушение пробки канала вулкана сейсмическим ударом может вызвать крупномасштабное извержение. Последующие периодические или импульсные дрожания вулкана определяются свойствами магмы, канала и магматической камеры и практически не зависят от инициирующего сейсмического удара.

Давайте оценим период пульсаций. Магма канала может содержать много газа. В этих условиях скорость волны может меняться от порядка 1000 метров в секунду до нескольких десятков метров в секунду [73]. Если длина канала порядка 10 км, то период пульсирующих взрывов может лежать в диапазоне от минут до часов. Например, если скорость звука в магме $C_m \approx 20$ м/сек и длина канала 20 км, то период составляет приблизительно 0.5 часа.

3.3.2. Поверхностные волны в кратере и кратковременные вулканические извержения

Дарвин сообщил, что *...последовательность вулканов, расположенных в Андах, ...мгновенно извергнула темный столб дыма...* [1, стр. 380]. Приняв во внимание это замечание, Галиев [15] предположил, что там мог быть импульсный механизм, фокусирующий поверхностный материал кратера вдоль оси симметрии и формирующий «темный столб дыма». Этот механизм — взаимодействие кратера с волнами, распространяющимися от основания вулкана (рис. 39). В результате взаимодействия на вершине вулкана формируются сходящиеся и расходящиеся радиальные поверхностные волны. Сходящиеся волны фокусируются в центре кратера и могут сформировать вертикальный «темный столб дыма» из поверхностного материала кратера. Описанный процесс качественно проиллюстрирован рис. 44.

Другой механизм выброса «темного столба дыма» можно связать с разрушением лавовой пробки. Например, это может быть, если сейсмический удар создает в пробке разлом, который тут же «залечивается» после выброса газа из

магматического канала. Если сейсмический удар не повторяется, то следующего выброса нет.

Часто пробка канала очень тонкая, наподобие пластины или мембраны (корка на лаве), или она отсутствует. Тогда магма вулкана непосредственно граничит с атмосферой. Конечно, интенсивность сейсмической волны, необходимой для начала извержения, в случае открытого и закрытого канала будет разной. Например, в Руапеху (Ruapehu) (Национальный парк Тонгариро (Tongariro), Новая Зеландия), извержения имели место при землетрясениях магнитудой 2 в случае открытого канала и магнитудой 3.4 в случае закрытого канала [82].

Дарвин пишет также: *...Если бы землетрясение или дрожание земли (которое, однако, мы видели, было менее близким к этим вулканам, чем в другом месте) не действовало никаким другим способом, кроме как просто ломая корку на лаве внутри кратеров, то в этом случае, возможно, имело бы место только несколько выбросов дыма, но это не было бы началом длительного и энергичного периода активности...* [3, стр. 61]. Чтобы обсудить эти явления, представим пробку, закрывающую магматический канал как некоторый аналог крышки, закрывающей отверстие в цилиндрическом сосуде давления. Когда газовое и магматическое давление в канале превышает некоторый критический уровень, крышка поднимается и происходит кратковременное кольцеобразное извержение (рис. 45). Давление в канале уменьшается. Крышка падает на выход канала и закрывает его. При этом возникают волны деформации, распространяющиеся от кругового контура выхода канала. Таким образом, возникают сходящиеся и расходящиеся радиальные волны атмосферного давления и поверхностной деформации.

Подобные волновые процессы наблюдаются на вершине вулкана Сантьягито, Гватемала (рис. 45). Столб дыма извергается, когда газовое давление в канале вулкана превышает некоторый критический уровень и пробка канала (20–80 м толщиной и около 200 м радиусом) поднимается. Этот быстрый подъем сопровождается взрывным извержением смеси газа и пепла, образующим кольцо по контуру канала. Затем давление газа в канале уменьшается и пробка

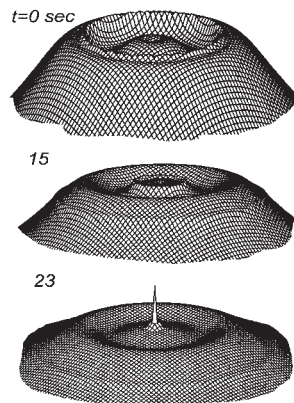


Рис. 44. Моделирование результатов взаимодействия сейсмической волны и кратера вулкана. $t=0$: образование поверхностной волны на круговой границе кратера. $t=15$: сходящиеся и расходящиеся радиальные волны. $t=23$: колонна материала, образованная фокусированием в кратере сходящейся радиальной волны [15].



Рис. 45. Этапы кратковременного периодического извержения вулкана Сантьягито, Гватемала.
(<http://www.photovolcanica.com/VolcanoInfo/Santiaguito/Santiaguito.html>).

процесса представлена на рис. 47, где p — давление, и P — критическое значение давления. Пробка взлетает, когда давление p достигает критического значения P . Магма закипает и извергается. В результате около входа канала формирует-

опускается. Описанные импульсные процессы образуют сходящиеся и расходящиеся радиальные волны поверхностной деформации (рис. 46) и атмосферного давления. Поверхностные волны распространяются со скоростью 30–50 м/сек, которая является слишком малой для упругих волн в твердой или жидкой среде.

Кольцеобразное, а затем центральное извержения показаны на рис. 45. Нижнее фото показывает вершину вулкана Сантьягито между извержениями. Таким образом, на вершине имеют место сложные процессы взаимодействия атмосферы, поверхностных волн и вулканических газов, приводящие к появлению поверхностных волн, но не к длительному извержению. Позволим себе думать, что в чем-то эти процессы схематично описываются последним замечанием Дарвина, приведенным в этом подразделе.

Длительность интервала между извержениями составляет 20–40 минут. Учитывая это и замечание, приведенное в конце предыдущего раздела, можно предположить, что осредненная скорость волн в магме вулкана Сантьяго порядка 10 м/сек, а длина магматического канала порядка 10 км. Из-за периодического открывания канала вулкана в нем возникают сильно-нелинейные вертикальные волны. Самая простая схема возникающего при этом про-

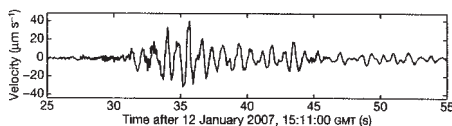


Рис. 46. Сейсмограмма вертикальной скорости, которая была зарегистрирована в 3 км от купола вулкана Сантьягито [10]. Время в секундах.

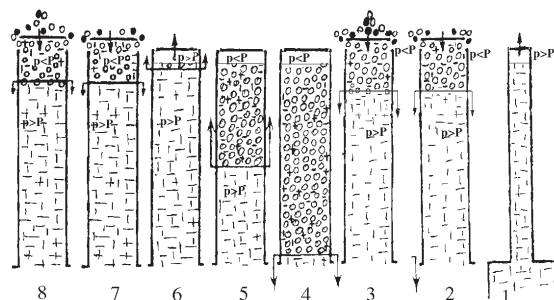


Рис. 47. Простейшая схема сильно-нелинейного волнового процесса, вызванного периодическим разрушением и «залечиванием» входа в магматический канал вулкана. (2, 3, 7, 8) — частично открытый канал, когда пробка отделяется от кратера. (1, 4–6) — закрытый канал (см. также рис. 43).

ся волна расширения (разрежения) и давление падает ниже P . В результате этого пробка закрывает канал. Процесс повторяется, когда p под куполом поднимается выше P .

В целом, процесс напоминает кипение воды в чайнике. Когда давление пара увеличивается до некоторого критического значения, крышка чайника поднимается. Давление пара уменьшается. В результате вода в чайнике начинает сильно кипеть. Пар и пена выбрасываются из чайника. Когда давление падает ниже критического значения, чайник закрывается. Затем процесс повторяется.

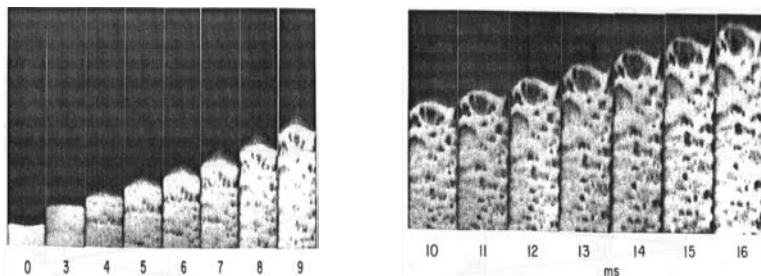


Рис. 48. Явления при быстрой разгерметизации трубы высокого давления, содержащей гранулированный материал. Расширение и поднятие поверхности слоя 0.25-мм стеклянных

Из сказанного выше следует, что колебания вулканов сильно зависят от поведения магмы в волнах расширения (разрежения), поэтому моделирование поведения магмы в этих волнах проводилось во многих исследованиях. Здесь мы остановимся на результатах, приведенных в [20]. В [20] использовалась труба высокого давления. Труба моделирует канал вулкана и содержит слабо-связный сильно сжатый материал (рис. 48). Когда труба открывается, образу-

ется волна разрежения, которая движется вниз. В пределах этой волны материал расширяется, как магма у вершины канала вулкана перед большим извержением. На рис. 48 можно видеть образование больших пузырей в волне расширения (см. также рис. 5 и 19). Подобный быстрый рост пузырей происходит в магме канала вулкана, что качественно объясняет взрывные извержения вулканов [20, 74].

3.3.3. Кратковременные выбросы из кратеров

Лавины в кратере. Выбросы из кратера вулкана могут быть вызваны лавинами в кратере. Известно, что снеговые лавины случаются на территориях с очень холодным, сухим климатом (в частности, на Кавказе, в Андах Южной Америки, в Гималаях и Скалистых горах Северной Америки) (рис. 49). Легкие порошкообразные зерна снега слабо связаны. Лавина зарождается, когда направленная вниз сила тяжести превышает силу сцепления между собой кристаллов снега или снежного покрова со склоном. Приблизительно 90 процентов всех лавин начинаются на склонах 30° – 45° (это также лучший угол для того, чтобы кататься на лыжах с гор). Есть четыре составляющие, требуемые для образования снежной лавины: снег, крутой склон, прочность снежного покрова и спусковой механизм. Спусковым механизмом зарождения лавины может служить землетрясение.

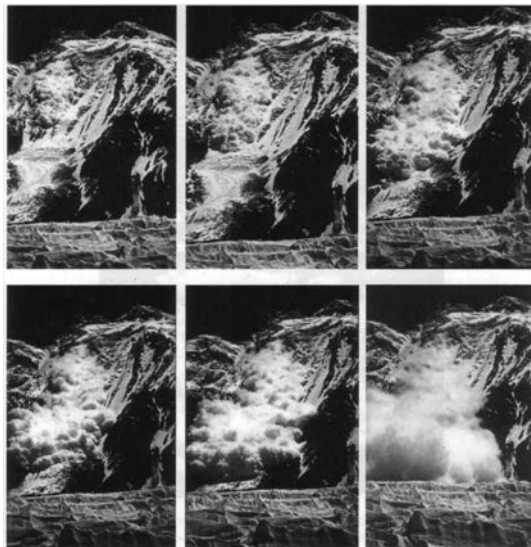


Рис. 49. Последовательность снимков лавины снега в Гималаях [47].

В случае конического вулкана землетрясение может вызвать лавину, сходящую к центру кратера. Сильный поток сжатого воздуха создает воздушную волну. На дне кратера воздушная волна, а затем и сама лавина фокусируются. Возникает направленный вверх поток воздуха, крупинки снега и твердых частиц. Они могут образовать над кратером султаны, напоминающие выброс при слабом извержении. Возможно, подобные, вызванные обвалами, султаны Дарвин описал как «темные столбы дыма».

Дарвин лично не наблюдал одновременные выбросы из кра-

теров многих вулканов. Обвалы и сходы камней внутри кратеров — также редко наблюдаемые явления. В частности, выбросы и извержения не наблюдались во время катастрофического чилийского землетрясения 27 февраля 2010 года. Возможно, это определяется очевидными опасностями и трудностями, которые связаны с пребыванием на вершине вулкана и наблюдениями за динамикой кратера вулкана во время землетрясения. В какой-то мере, проведение наблюдений упрощается в случае вулкана Св. Елены. Мы уже отмечали, что там была зафиксирована связь начала катастрофического извержения 1980 года с локальным землетрясением магнитудой 5.1. Однако последние наблюдения за кратером вулкана Св. Елены показывают, что землетрясение может вызвать обвалы и снежную пыль, поднимающуюся из кратера. В настоящее время в центре кратера вулкана Св. Елены находится довольно высокий лавовый купол, покрытый обычно снегом. Во время схода каменных лавин с купола образующаяся снеговая пыль поднимается над куполом и видна над кратером (рис. 50 и 51). Читатель может проследить этот процесс, если откроет в Интернете следующий адрес — <http://www.youtube.com/watch?v=Zwga-NdU8-8>. Нечто подобное могло иметь место в 1835 году, в Чили, и наблюдатели могли принять эти столбы пыли за «темный столб дыма», о чем и сообщил нам Дарвин.

Мы нашли также описание лавины и выброса гранулированного материала из кратера вулкана Килауэа (Kilauea), Гавайя. В кратере Халемаумау (Halema'uma'u) был сильный удар 20.03.2008 года. Частицы лавины долетали до смотровой площадки. Это были частицы старой лавы, частицы новой лавы не были замечены.

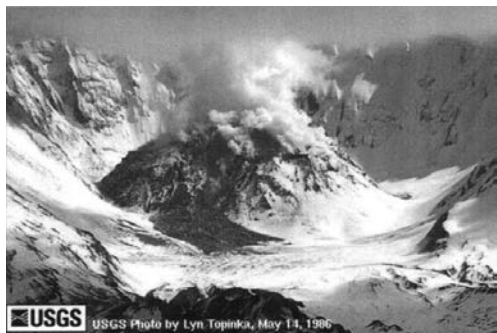


Рис. 50. Пример «темного столба дыма» из кратера. Выброс возникает при сходе лавины с лавового купола, расположенного в центре кратера вулкана Св. Елены (см. также рис. 12 и 45).



Рис. 51. Другой пример выброса «темного столба дыма» из кратера вулкана Св. Елены (24.07.06).

Отметим, что динамика гранулированных материалов может быть весьма удивительной [83–87]. В частности, имеются данные, которые, пусть косвенно, но подтверждают возможность выброса «темного столба дыма» из кратера.

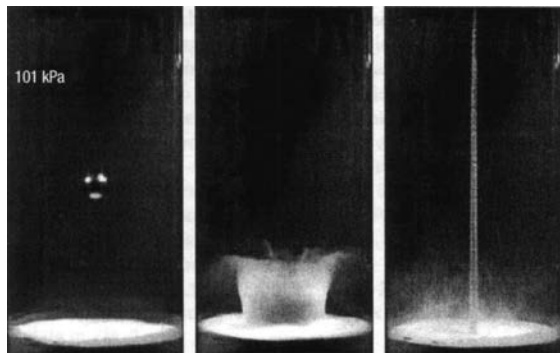


Рис. 52. Образование выброса гранулированного материала после удара тяжелой сферы по слою сыпучего мелкого песка. После формирования кратера и окружающего его гребня (короны) струя (султан) гранулированного материала извергается из кратера [86].

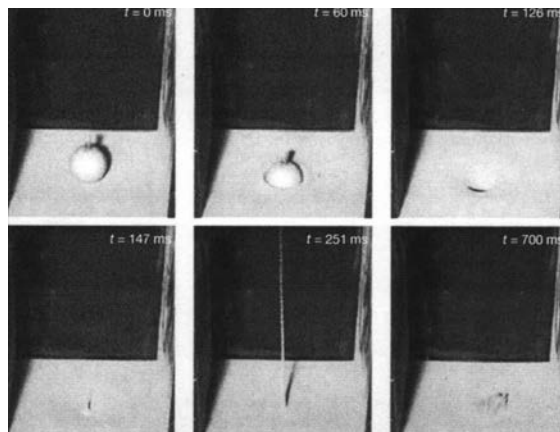


Рис. 53. Снимки эксперимента с погружающимся шаром. В момент $t=0$ шар (масса = 133g) начинает внедряться в песок; при $t \approx 120$ мсек формируется кратер; в $t \approx 140$ мсек появляется струя песка, которая достигает максимальной высоты при $t \approx 180$ мсек [87].

Интересные примеры извержения песка. Когда твердое тело внедряется в поверхность мелкого сыпучего песка, то может возникнуть удивительно высокий султан. В частности, в [86, 87] изучалось высокоскоростное внедрение твердой сферы в толстый слой гранулированной среды. Наблюдалось формирование кратеров, короны и последующее извержение гранулированной среды из кратера.

В случае высокоскоростного удара сначала образуется нестационарная осесимметричная волна разрежения в атмосфере, а затем кратер и корона. Эта корона показана на рис. 52 (середина). Мы можем, весьма грубо, предположить, что эта корона — аналог сыпучего материала на внутренней поверхности кратера вулкана. Фокусировка нестационарных радиальных движений воздуха, материала кратера и короны дает струю, направленную вверх вдоль оси симметрии явления (крайне правое изображение). Нечто подобное может иметь место во время обрушения сыпучего материала с внутренней поверхности кратера вулкана.

Эффект удара и движения воздуха в описанном эксперименте был исключен в [87]. Пинг-понговый шар радиуса $=2.0$ см, частично заполненный бронзовыми гранулами, был установлен над слоем очень мелкого сухого песка так, чтобы он только касался поверхности. Чтобы погрузить шар, не производя никаких нестационарных вибраций, тонкая веревка, поддерживающая шар, сжигалась. В результате шар мгновенно уходил в песок. В отличие от рис. 52, в этом случае корона не возникала, однако, это не мешало возникновению струи песка приблизительно 100 мсек после начала процесса (рис. 53).

Таким образом, формирование струи (волны, султана, всплеска) из кратера может зависеть от многих обстоятельств, в частности, от кривизны поверхности кратера, начального вертикального и радиального ускорений, силы инерции и свойств взаимодействующих сред.

Интересные примеры извержения струй воды криволинейными границами. Эксперименты с кратерами на поверхности жидкости и подводными ударными волнами показали [88], что скорость струи (султана) увеличивается с поверхностной кривизной и/или интенсивностью ударной волны. Форма кратера очень важна. Рис. 54 показывает результат взаимодействия ударной волны с водной поверхностью, имеющей овальную форму. В этом случае образуется одна волна (струя, всплеск).

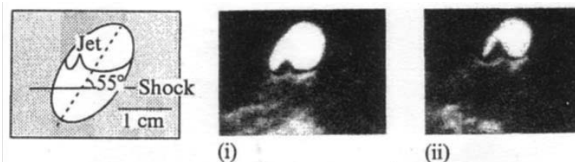


Рис. 54. Эллиптическая полость (схлопывающаяся под действием ударной волны) в желатине. Ось полости составляет 55° с направлением ударной волны, как показано на схеме (слева). Всплеск перпендикулярен к фронту ударной волны [88].

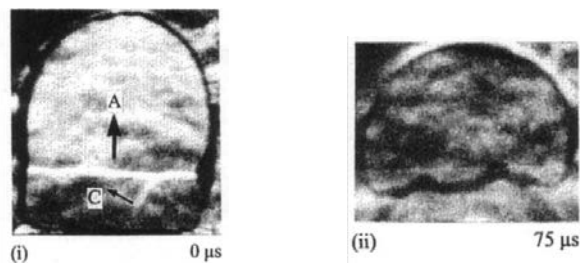


Рис. 55. Схлопывание полукруглой полости. (i) — Образование ударной волны А в газе и поверхностной волны С у одной из границ полости. (ii) — Две сходящихся волны, перемещающиеся от границ к центру полости [88].

Эксперименты с полукруглыми и квадратными кратерами демонстрируют, что волны могут быть образованы около границ кратера (см. рис. 55 и 56). Эти волны двигаются навстречу друг другу. Одновременно в результате вертикального перемещения жидкой поверхности образуются воздушные ударные волны.

Возникновение и движение волн, и затем их соударение наблюдались во время схлapyивания квадратного кратера под действием ударной волны. Схема движения волновых фронтов и всплесков, возникающих при этом, показана на рис. 56.

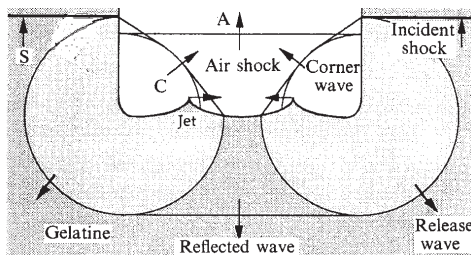


Рис. 56. Схема взаимодействия прямоугольного кратера с ударной волной S . Представлены также волна A , прошедшая в воздух, и отраженные волны. Показаны всплески, перемещающиеся от углов кратера [88].

Образование вертикальной струи из кратера может быть продемонстрировано с помощью трубы, заполненной водой. Когда столб воды падает с высоты 10–20 см и его основание получает импульс, центр верхней поверхности воды выбрасывает тонкую вертикальную струю [89]. Это результат взаимодействия вогнутой поверхности воды кратера с импульсом. Высота выброшенной струи может превышать 1 м. Деформация вогнутой поверхности кратера и формирование струи во время подобных экспериментов показаны на рис. 57.

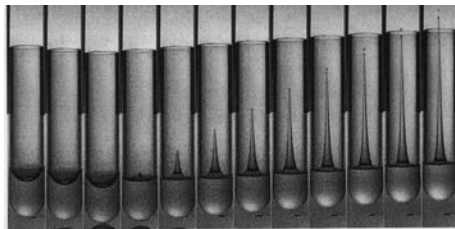


Рис. 57. Осевой удар цилиндрической трубы, падающей под действием гравитации и содержащей жидкость, с полусферическим мениском (кратером) на поверхности жидкости. Взаимодействие мениска с возникшим импульсом меняет кривизну мениска и генерирует осевую струю [90, 91].

Эксперименты, описанные здесь, продемонстрировали, что выброс материалов из кратера может произойти, если есть достаточно сильное, вызванное землетрясением, вертикальное ускорение основания вулкана. В результате могут образоваться сильно-нелинейные поверхностные волны и лавины в кратере. Они фокусируются в центре кратера и могут вызвать явление типа кратковременного извержения, т.е. *«темный столб дыма»*, о котором писал Дарвин.

Таким образом, согласно очень идеализированным моделям, представленным выше, цепь вулканов могла мгновенно и одновременно извергнуть *«темные столбы»* вещества сразу после действия сейсмического удара.

3.3.4. Обсуждение вызванных землетрясением вулканических извержений

Мы привели выше много данных наблюдений и экспериментов. В этом подразделе кратко суммируем сказанное.

Модель подраздела 3.2.1. В настоящее время связь сейсмических и вулканических явлений — предмет продолжающихся исследований. Видимо, имеется много механизмов этой связи. Однако уже ясно, что сильные землетрясения могут быть запускающим механизмом для больших извержений [22–24].

Следуя Дарвину [1, 2], мы объяснили начало крупномасштабных извержений резким вертикальным поднятием земли. Модель инициирования извержения принимает во внимание усиление сейсмической волны, движущейся к вершине конического вулкана, и взаимодействие этой волны с поверхностью кратера. Элементы модели: фрагментация лавового купола (пробки), открытие магматического канала, рост пузырей (кавитация) в магме канала, приводящий к извержению. Видимо, состояние четырех вулканов во время чилийского землетрясения 1835 года было таким, что лавовые пробки были разрушены. В результате каналы и камеры магмы были открыты и магма начала извергаться.

Ожижение материала поверхности кратера, трещины и подобные фонтану извержения поглощают значительную сейсмическую энергию, поэтому немедленно после начала извержения поверхностные колебания земли около вулкана уменьшились.

Интересно, что большинство вулканов, представленных в списке «разбуженных» землетрясением [20], увенчаны кальдерами (большой кратер с ровным дном). Это наблюдение согласуется с замечанием Дарвина [1, стр. 380] о *«больших кратерах»*.

Модели подразделов 3.2.2 и 3.2.3. Главный сейсмический удар может разрушить пробку канала, однако, если давление в магматической системе не достаточно для продолжительного извержения, то может иметь место только

кратковременный выброс газа из кратера. Этот случай напоминает динамику вулкана Сантьяго, Гватемала. Быстрый подъем его купола сопровождался взрывной дегазацией и формированием потока газа, направленного от периферии купола к его центру (см. рис. 44, 45 и 47). Вместе с тем, кратковременный выброс из кратера может быть, даже если разрушения пробки не происходит. «Темный столб дыма» может мгновенно образоваться в кратерах конических вулканов после сейсмического удара, если он сопровождается сходом лавины внутри кратера и фокусированием поверхностных волновых явлений в центре кратера.

Аналогия с подводным взрывом. В [15, 45] отмечалась аналогия параметров, характерных для подводного взрыва, и параметров описанной выше модели взаимодействия сейсмической волны с кратером вулкана. В частности, мощность взрыва соответствует силе землетрясения. Толщина слоя воды между точкой взрыва и свободной поверхностью соответствует толщине пробки канала вулкана. Ударная волна от взрыва соответствует сейсмической волне, движущейся к вершине вулкана. В случае взрыва около поверхности указан-

ный слой жидкости разрушается полностью и происходит выброс продуктов взрыва в атмосферу (рис. 58), которому можно поставить в соответствие начало сильного извержения.

В случае глубокого и мощного взрыва взаимодействие волн сжатия, порожденных взрывом со свободной поверхностью воды, приводит к формированию приповерхностной нестационарной кавитации и последующему развитию нелинейных поверхностных волн [92], подобных возникающим после высокоскоростного удара дождевой капли или метеорита по свободной поверхности воды [15, 93]. Фокусировка этих волн может привести к генерированию султана воды. Этот султан соответствует кратковре-

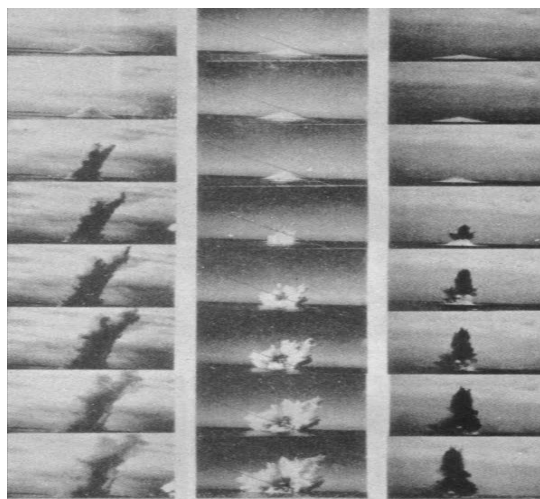


Рис. 58. Формирование водяных куполов и выбросов смеси воды и продуктов взрыва при подводных взрывах. Взрывы зарядов одинаковой мощности проводились на глубинах 8 м (левый столбец), 12 м (центр) и 19.5 м (правый столбец). Строки соответствуют следующим моментам

времени после взрыва (сверху вниз):
0.5, 0.9, 1.3, 1.7, 2.1, 2.5, 2.9 и 3.3 сек [92].

менному «темному столбу дыма», извергаемому вулканом во время обвалов со склонов кратера или в результате процессов, аналогичных представленным в подсекции 3.2.3.

3.4. Цунами от прибрежного землетрясения и их описание Дарвином

В этом разделе мы изучаем эффект изменения глубины океана на прибрежную эволюцию цунами.

Цунами генерируется колебаниями океанического дна, вызванными землетрясением. Дарвин пишет: *...Первичный удар вызван разрывом материала земли, который, кажется, произошел на дне прилегающего моря...* [3, стр. 71]. Рассмотрим волну цунами, возникшую в открытом океане. Как волна эволюционирует, продвигаясь к берегу? В частности, мы интересуемся влиянием прибрежного дна на формирование крутого фронта цунами и отлива воды перед ним. Описание этих явлений было дано Дарвином [1, стр. 377]. Он подчеркнул зависимость вызванных землетрясением волн от формы побережья и прибрежной глубины: *...и, наконец, ее размер определяется (как, кажется, в этом случае) формой побережья. Например, Талькауано и Кальяо расположены в глубине обширных мелких бухт, и они всегда страдали от огромных волн; тогда как город Вальпараисо, стоящий почти на краю очень глубоких океанических вод, хотя часто испытывал сильные землетрясения, никогда не претерпевал эти ужасные наводнения...* [1, стр. 378]. Во времена Дарвина был также неясен вопрос о причинах отступления воды от берега при землетрясениях. Последнее наблюдение этого произошло во время катастрофического землетрясения 11 марта 2011 года в Японии. Дарвин достаточно ясно высказался по этому вопросу: *...Установлено, что во время большей части землетрясений, особенно на западном побережье Америки, первым движением массы воды является отступление. Некоторые авторы пытались объяснить это при помощи предположения, что вода сохраняет свой уровень, в то время как суша колеблется вертикально вверх; но скорее всего, воды, лежащие у берега, даже если этот берег довольно крут, разделили бы движение морского дна...* [2]. Дарвин пишет об аналогии между отступлением воды от берега при набегании цунами и отступлением воды на 2–3 фута при набегании на пологий берег опрокидывающейся волны, бегущей от парохода [1, с. 378], когда ни о каком поднятии дна говорить не приходится. Согласно нашей теории, описанные Дарвином явления связаны в первую очередь с нелинейной прибрежной динамикой цунами, хотя отлив воды можно также связать с поднятием прибрежной зоны во время сейсмических ударов.

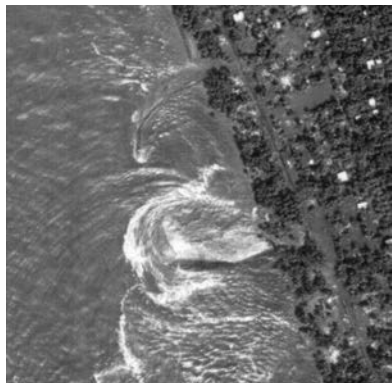


Рис. 59. Различные формы цунами в Индийском океане около побережья Шри-Ланки в 2004 году: форма изменяется от подобной стене из воды (нижняя часть этого рисунка) к опрокидывающейся волне и локализованной струе (верхняя часть рисунка) [96].

Теперь эти явления хорошо документированы. В частности, это относится к результатам землетрясения на Суматре 2004 года. Замеренные высоты цунами на острове Суматра были большими, чем 20 м, с максимумом выше 30 м [94, 95].

Иногда цунами, состоящие из глубокой впадины и последующей возвышенности с крутым фронтом, генерируются землетрясением. Они наблюдались и документированы во время Большого Аляскинского землетрясения 1964 года на острове Кадьяк, никарагуанского землетрясения 1992 года около северо-восточной области острова Флорес (Flores), Индонезия, землетрясения 2004 года на Суматре [99] и землетрясения 2007 года на Соломоновых островах [60, 61]. Читатель может видеть, что подобные цунами вызываются прибрежными подводными землетрясениями. В этих случаях у возникшей волны нет достаточной дистанции, чтобы развиться в уединенную волну чистого возвышения или в ряд уединенных волн возвышений.

3.4.1. Эффект прибрежного дна на образование катастрофического цунами

Высота цунами измеряется от наибольшей глубины впадины на фронте волны до последующего пика. Амплитуда измеряется от нулевого уровня океана до максимального любого, положительного или отрицательного пика. В некоторых случаях впадина отсутствует, и амплитуда равняется высоте цу-

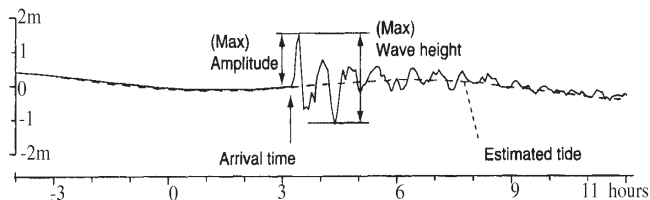


Рис. 60. Форма волны цунами (землетрясение 2004 года на Суматре), зарегистрированная в Мэйле, Мальдивы (Male, Maldives) [99, 100]. Время дано в часах, амплитуда волны в метрах.

нами, как в случае цунами 2004 года в Индийском океане около Мальдивских островов (рис. 60).

Динамика океанических поверхностных волн очень сложна, поэтому теперь широко используются [41, 95, 99–102] трехмерные модели и численные решения соответствующих уравнений. В то же самое время до настоящего момента нелинейные волновые уравнения теории длинных волн и их аналитические решения [94–103] используются для описания цунами. Несмотря на их серьезные ограничения, эти уравнения и решения дают реалистическое описание нелинейной динамики прибрежных волн, которое часто согласуется с лабораторными данными [99]. Здесь мы используем уравнения теории длинных волн. Так как длина волн цунами много больше прибрежной глубины, эти уравнения, при условии их правильного решения, должны описывать прибрежную эволюцию цунами.

Моделирование данного Дарвином описания эволюции цунами выполнено в [45]. Здесь мы следуем [45] и представляем некоторые результаты новых вычислений. Предполагается, что около побережья имеют место падение дисперсионного эффекта до нуля и резонансное усиление цунами. Результаты показаны на рис. 61–63. Сплошные линии определяют результаты нелинейной теории, прерывистые линии определяют результаты линейной теории. Прибрежное изменение глубины учитывается законом Грина [104]. Далеко от побережья прерывистые линии соответствуют начальной волне, порождаемой землетрясением. Начальная волна (цунами) моделируется как волна, подобная солитону.

Развитие цунами на большом расстоянии от берега показано на рис. 61. Читатель может видеть, что длина цунами уменьшается. Максимальная высота волны составляет приблизительно 3 м или приблизительно три высоты начальной волны. В целом, этот результат согласуется с численными вычислениями, которые дали увеличение, почти равное трем [41].

Рис. 62 показывает, что прибрежное развитие цунами сильно зависит от профиля дна и расстояния от береговой линии. Далеко от берега профиль волны гладкий. Он начинает быстро изменяться с уменьшением глубины воды. Возле самого берега возникает скачок уровня воды,

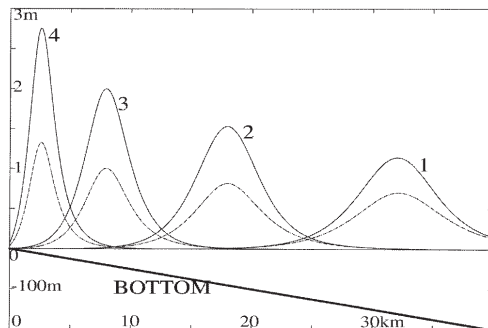


Рис. 61. Профили 1, 2, 3, 4, и 5 вычислены для $t = -800$ (кривые 1), -600 (2), -400 (3), -230 сек (4), соответственно.

Волны усиливаются около побережья.

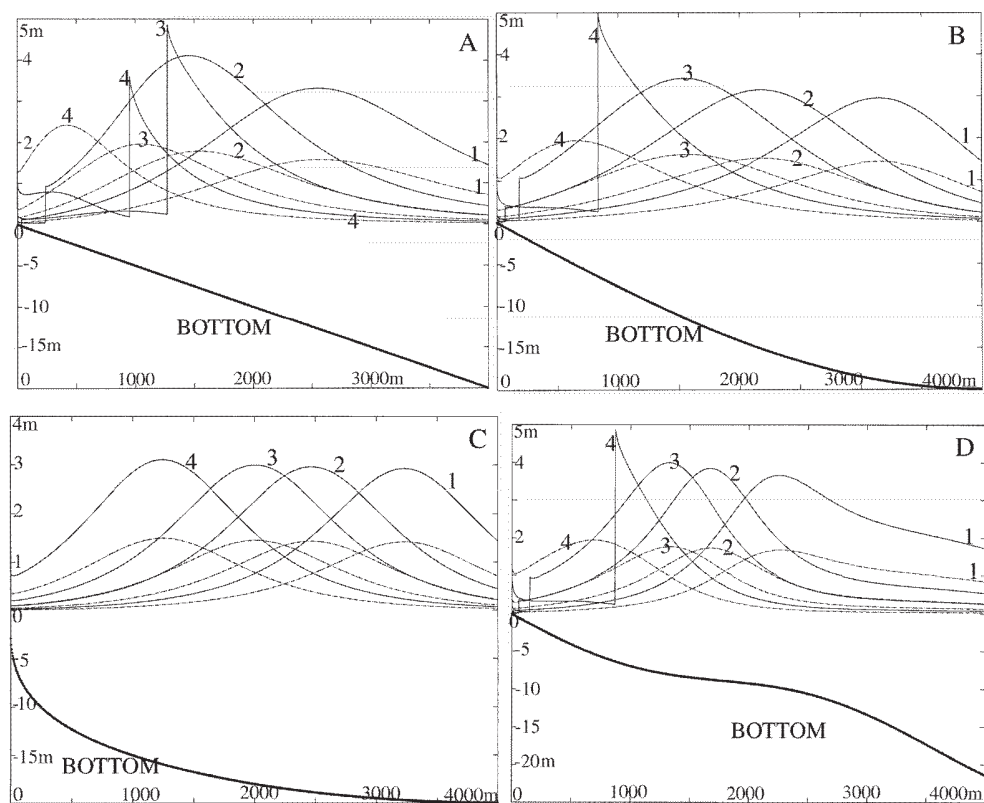


Рис. 62. Воздействие наклона дна и изменения глубины на развитие волны: А — линейный наклон, В, С, D — нелинейный наклон. Кривые вычислены для следующих моментов времени: -230 (1), -180 (2), -150 (3) и -100 сек (4).

который начинает двигаться в сторону глубокой воды. В результате образуется крутой фронт цунами (рис. 62 А, В, D). Если глубина прибрежной воды большая и она почти не меняется (рис. 62 С), то цунами фактически также не изменяется.

Затем мы изучаем влияние очень малой прибрежной глубины на развитие цунами. Результаты вычислений представлены на рис. 63. В этом случае, усиление цунами может быть очень большим — до 20 м.

В целом, изменение прибрежной глубины определяет прибрежную эволюцию цунами. В частности, если глубина мала и плавно меняется, то цунами эволюционирует в катастрофическую волну. В случае большой прибрежной глубины угроза такой волны отсутствует. Приведенные данные согласуются с

сообщениями Дарвина о цунами. Кривые А, В и D (рис. 62) и рис. 63 иллюстрируют катастрофический эффект образования водной стены. В частности, около побережья может быть образована волна, имеющая два или три пика (см. рис. 63 и 13).

Результаты линейных и нелинейных расчетов начинают принципиально отличаться вблизи берега. Особенно это характерно для области, примыкающей к берегу. Там, согласно нелинейной теории, уровень воды может не увеличиваться вплоть до прихода крутого фронта волны (рис. 62, А, В, D).

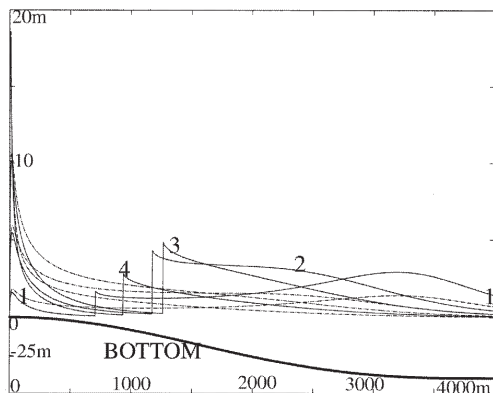


Рис. 63. Катастрофическое усиление цунами на очень мелкой воде. Кривые найдены для следующих моментов времени: -230 (1), -180 (2), -150 (3) и -100 сек (4).

3.4.2. Эффект прибрежного дна на отлив океана и крутой фронт цунами

Иногда образуются цунами, имеющие глубокую впадину перед фронтом (рис. 64). Об этом, в частности, сообщает Дарвин. Чтобы моделировать подобную прибрежную эволюцию цунами, мы изменяем форму начальной уединенной волны. Теперь она имеет центральный пик и впадины на фронте и позади пика (см. прерывистые линии 1 на рис. 65, которые качественно описывают форму цунами). Следуя [98], мы назовем эту волну как *N*-волну. Наша цель состоит в том, чтобы моделировать развитие впадины перед пиком. Мы изучили этот процесс, следуя [45]. Некоторые результаты вычислений представлены на рис. 65.

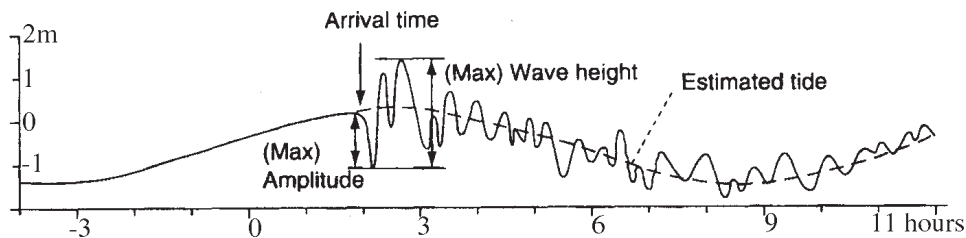


Рис. 64. Форма волны цунами (землетрясение 2004 года на Суматре), зарегистрированная в Пхукете (Phuket), Тайланд [99, 100].

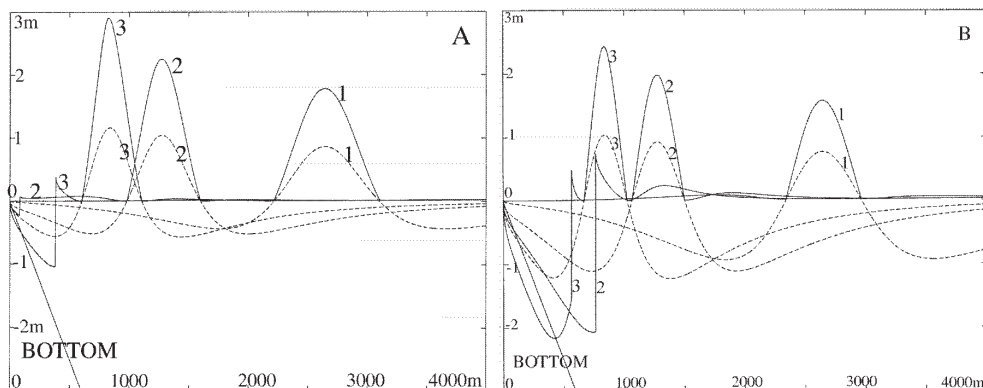


Рис. 65. Два примера (А и В) прибрежного развития N -волны и формирования отлива перед цунами. Кривые найдены для следующих моментов времени: -230 (1), -160 (2) и -130 сек (3).

Согласно рис. 65, перед пиком формируется отлив, который обнажает дно на расстоянии до 500 м. Иными словами можно говорить о волне депрессии, которая формируется у кромки воды и крутой фронт которой начинает двигаться в сторону глубокого океана. Непосредственно за этим фронтом депрессии находится пик волны.

Таким образом, расчеты показывают, что прибрежное развитие цунами зависит от глубины. Крутой (разрывной) фронт цунами может быть образован в мелкой прибрежной воде. Уровень воды уменьшается перед фронтом (рис. 62), или там может начаться отлив (рис. 65). Затем фронт начинает двигаться от побережья в океан (рис. 62 и 65). Это направление противоположно движению всей волны. По-видимому, это связано с влиянием отлива на фронт цунами. В результате пик цунами начинает двигаться медленнее (как бы останавливается). Амплитуда фронта увеличивается, и образуется стена воды. Этот процесс объясняет катастрофический эффект цунами, когда водная стена появляется мгновенно вместо медленного повышения уровня океана, которое имеет место в случае глубокой прибрежной воды [45]. В целом, выводы согласуются с сообщениями Дарвина [1, стр. 377–378] и его следующими комментариями: *...Вскоре после толчка милья в трех-четырёх показалась огромная волна; в середине бухты она имела гладкие очертания,...* В глубине бухты она разбилась на ряд страшных белых бурунов, взлетающих на 23 фута выше высоты обычных приливов. Они надвигались с неимоверной силой... Как-то шхуна очутилась посреди развалин, в 200 ярдах от берега... В другом месте закрутило два судна... в течение нескольких минут они находились на обнажившемся дне, хотя бросили якорь на глубине 36 футов. Огромная волна

надвигалась, должно быть, медленно, потому что жители Талькауано успели убежать на холмы, расположенные за городом, а несколько моряков направились на лодке в открытое море, надеясь, что в безопасности пройдут над волной, если только достигнут ее прежде, чем она разобьется, — и надежды их действительно оправдались... [2, стр. 369–370].

Конечно, сложное развитие фронта цунами около береговой линии очень чувствительно к любому изменению параметров. В частности, изменения амплитуды начальной волны, наклона дна или формы побережья могут изменить описанный процесс. Волна цунами может потерять свою стабильность в некоторых пунктах прибрежной зоны. В результате у цунами могут быть различные формы в различных пунктах этой зоны (см. также рис. 13 и раздел 10.5).

3.4.3. Дарвин об обрушениях и лавинах, вызывающих цунами

Дарвин следующим образом описал потрясающие волны, зарождение которых он наблюдал в Магеллановом проливе: *...С ледяных круч часто срываются огромные глыбы льда, и тогда по уединенным каналам разносится грохот, подобный бортовому залпу военного корабля. Такое падение, как уже отмечалось в предыдущей главе, рождает огромные волны, разбивающиеся о соседние берега. Известно, что часто вследствие землетрясений с обрывов на морском берегу срываются земляные глыбы; какое же ужасное действие должен оказать сильный толчок (а они здесь случаются) на такое тело, как ледник, уже находящийся в движении и изборозженный трещинами! Я легко могу поверить, что при этом в самом глубоком канале резко поднимается вода, которая затем, возвращаясь на прежнее место, будет с сокрушительной силой кружить громадные каменные глыбы, точно соломинки... [2, стр. 298–299] и ...время от времени жестокие землетрясения сбрасывают громадные ледяные глыбы в воду... [2, стр. 304].*

Сейчас описанные волны хорошо известны. Их определяют — как вызванные лавиной местные цунами. Как отмечает Дарвин, они обычно возникают при землетрясениях. Ночью 9 июля 1958 произошло землетрясение на Аляске под океаническим заливом Литуйа (Lituya). При этом имели место колебания почвы высокой интенсивности, которые привели к очень высокому ускорению земли около вершины залива. У землетрясения была магнитуда 7.9, хотя некоторые источники сообщили о приблизительно 8.3. На поверхности были зафиксированы значительные вертикальные (1.05 м) и горизонтальные (6.3 м) смещения земли. Колебания почвы привели к вертикальному ускорению до 0.75g и горизонтальному ускорению до 1.0g. Наблюдалось большое разнообра-

зие геологических эффектов, — кроме разломов, — среди них были земляные, каменные, снежные и ледяные лавины, резкие провалы земной поверхности и множество других вторичных явлений.

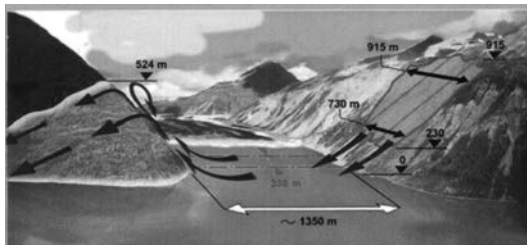


Рис. 66. Гильберт Инлет (Gilbert Inlet), который расположен в вершине залива Литуйа. Склон, где образовался гигантский оползень, находится на правой стороне Гильберта Инлета. Противоположная сторона испытала всю силу цунами. Деревья и почва были снесены до высоты в 524 м выше уровня залива.

Землетрясение разрыхлило приблизительно 30.6 миллиона кубических метров скальных пород высоко над северо-восточным берегом залива Литуйа. Эта масса обрушилась с высоты приблизительно до 914 метров вниз в воды Гильберта Инлета. Обвал вызвал местный цунами, который обрушился на юго-западную береговую линию Гильберта Инлета (рис. 66).



Рис. 67. Залив Литуйа спустя несколько недель после цунами 1958 года. Область смытого леса вдоль береговой линии ясно различима как светлый контур, окружающий залив. Фотография Миллера (D.J. Miller), Геологическая служба Соединенных Штатов.

Волна снесла все деревья и всю растительность с возвышенностей до 524 метра выше уровня моря. Миллионы деревьев были вырваны с корнем. Это — самая высокая волна, которая когда-либо была известна. Возможно, природная катастрофа, подобная описанной (рис. 66 и 67), стояла перед мысленным взором Дарвина, когда *Бигль* плыл по лабиринтам Магелланова пролива.

3.5. Катастрофические океанские волны, моретрясение и нестационарная кавитация

Катастрофические (экстремальные) океанские волны. Эти волны отличаются от цунами. Цунами становятся опасными, только когда они приближаются к береговой линии. Катастрофические океанские волны наиболее часто встречаются далеко от берега.

Бигль встретил катастрофическую волну около мыса Горн. Дарвин записал: ...13-го буря бушевала со всей яростью; видимость была ограничена сплошной завесой брызг, поднимаемых ветром... В полдень на нас обрушилась огромная волна... Бедный *Бигль* задрожал от удара и несколько минут не слушался руля, но вскоре, как и подобает такому хорошему кораблю, каким он был, выпрямился и снова стал против ветра. Если бы за первой волной последовала вторая, наша участь была бы решена скоро и навсегда... [2, стр. 264–265].

Из этого описания следует, что *Бигль* встретил жестокий шторм, переходящий в ураган. Согласно общепринятой шкале сэра Фрэнсиса Бофорта, во время жестокого шторма возникают исключительно высокие волны, гребни которых сдуваются в пену. Максимальная высота волн — до 16 м, средняя — 11.5 м. Ветер 28.5–32.6 м/сек. Во время урагана скорость ветра — еще выше. Воздух наполнен пеной и брызгами. Видимость очень плохая. Крайне опасная ситуация для судов небольших размеров (заметим, что именно таким и был *Бигль*). Таким образом, согласно шкале, буря, описанная Дарвином, очень напоминает ураганы, которыми славится океан в районе мыса Горн. Огромные волны, достигающие 16 м, держали всех в постоянном напряжении. Однако и на таком фоне, к которому, видимо, как-то притерпелись, судно потрясла одиночная гигантская волна. Из описания Дарвина следует, что ее с полным правом можно назвать катастрофической. Только в последние годы эти волны привлекли внимание общественности и ученых. В литературе эти волны часто называют также волнами-убийцами.

Вместе с тем, до последнего времени большинство исследователей не верили в существование этих волн и рассматривали упоминания о них как составляющие легенд и мифов моряков. Первым надежно зарегистрированным свидетельством катастрофической волны считаются показания приборов на нефтяной платформе «Дропнер», расположенной в Северном море. Первого января 1995 года при высоте волн до 12 метров (что не мало, но вполне обычно) вдруг возникла 26-метровая волна, обрушившаяся на платформу [44]. Характер повреждений оборудования соответствовал указанной высоте волны.

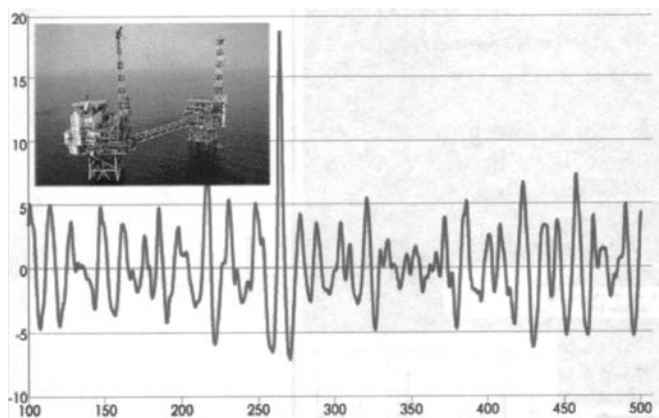


Рис. 68. Показания прибора на нефтяной платформе «Дропнер». Высота волны в метрах, время в секундах.

Фронт таких волн часто образован почти вертикальной стеной воды. В «столкновении» между волной и судном результат зависит, главным образом, от размеров и массы судна, параметров волны и, особенно, от крутизны фронта волны. Крутизна волны определяет давление «столкновения» на корпус. В 1980 году с волной-убийцей столкнулся советский танкер «Таганрогский залив» (рис. 69). Интересно, что в этом случае, судя по описанию, волна пришлась ровно на корабль (вообще говоря, ширина гигантских волн может достигать нескольких сот метров) [105].

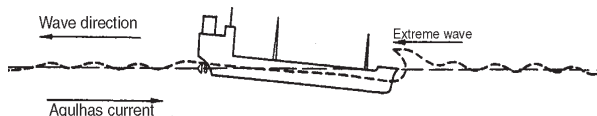


Рис. 69. Схема столкновения катастрофической волны с судном *Таганрогский залив* [105].

Инженеры, проектируя суда и строя нефтяные платформы, которые уходят все более далеко от земли, очевидно, нуждаются в точном описании этих волн и возникающих при их действии нагрузок [105–107]. Мы рассмотрим эти волны более детально в части III этой книги.

Моретрясение и нестационарная кавитация. Описывая результаты землетрясения Дарвин пишет: *...два взрыва, один, подобный столбу дыма, и другой, как от выдоха гигантского кита, были замечены в заливе Консепсьона. Вода как бы закипела; она «стала черной и начала издавать самый неприят-*

ный серный запах»... Два больших взрыва в первом случае должны быть без сомнения связаны с изменениями, произошедшими в глубине моря; но пузырьковое закипание воды, ее черный цвет и зловонный запах, обычно сопровождающие сильные землетрясения, я думаю, могут быть объяснены возмущениями придонной грязи, содержащей гниющие органические частицы... [1]. Таким образом, Дарвин описал поведение поверхности воды, которое характерно для моретрясения — колебаний толщи воды, вызванных вертикальными вибрациями дна [8, 103]. В Мировом океане ежедневно происходят землетрясения, которые вызывают локальные поднятия поверхности воды. Если глубина большая, то подобные поднятия могут проявить себя только у берега в виде цунами. Однако возможны ситуации, когда амплитуда колебаний дна сопоставима с глубиной или ускорения дна заметно превышают гравитационное ускорение, или имеет место резонанс вертикальных волн (рис. 3). Тогда на поверхности и в глубине воды возникают сильно-нелинейные волновые явления, которые в определенной мере иллюстрируются рисунками 1–5, 21–23, 43, 58, 191, 201. Им можно, в частности, поставить в соответствие эволюцию поверхности капли при сильных резонансных вертикальных вибрациях (рис. 207). Конечно, весьма важным является зарождение огромных пузырей (взрывов), о чем пишет Дарвин. Пузыри возникают в результате разрушения жидкости в волнах разрежения (нестационарная кавитация), что имеет место вблизи колеблющегося дна и поверхности моря (см. рис. 2, 3, 5 и 187). По-видимому, Дарвин был первым исследователем, описавшим эти явления, хотя уже в эпоху великих географических открытий испанские и португальские мореплаватели определяли подобное состояние поверхности как «море ходуном», а голландские капитаны как «ужасное море». Левин [8, 103] описывает это явление следующим образом: «Зеркально ровная поверхность моря при полном безветрии внезапно покрылась буграми. Они стремительно нарастали до высоты примерно 8 метров и потом стремительно опадали, образуя глубокие воронки... Люди стали метаться по судну охваченные паническим страхом; некоторые, потеряв рассудок, стали выпрыгивать за борт... Внезапно судно потряс сильнейший удар, и несколько человек выбросило за борт. Удары со стороны днища посыпались один за другим. Казалось, что судно колотило о скальное дно. ...Грохот прекратился мгновенно». Подобное состояние моря определяется тем, что на него локально начинает действовать переменная гравитация. В результате в воде возникают пузыри, а на поверхности жидкости каверны и струи. Эти явления будут рассмотрены в части IV, главах 20, 21 и разделах 23.4, 23.5 этой книги.

3.6. Усиление конвульсии землетрясения. Влияние геологии и рельефа

Конфигурация и геология поверхностного материала сильно воздействуют на амплитуду сейсмических волн. В то же самое время механические свойства поверхностного материала зависят от амплитуды и продолжительности землетрясения. Продолжительность землетрясения обычно достаточна для значительных изменений в механических свойствах почв. Например, первые движения почувствовали в Консепсьоне в 11:40 утра. Небольшие сначала они быстро усиливались, пока через половину минуты конвульсивные движения не были настолько сильны, что было трудно стоять и здания колебались и шатались. Затем, внезапно, произошел мощный удар, и меньше, чем за 6 секунд, город был в руинах. Эта часть землетрясения продлилась в течение почти 2 минут, так что, включая заключительные колебания, полная продолжительность не могла быть меньше, чем 4 минуты [63]. Этого времени достаточно для оживления и разрушения поверхности земли.

Чарльз Дарвин сообщает [11, стр. 256], что *...Город Консепсьон стоит на равнине, незначительно выше уровня реки Био Био. Почва рыхлая и состоит из наносных пород. В западном и северном направлениях находятся скалистые нерегулярные холмы, у основания которых везде было видно разрушающее действие сильных конвульсий, в частности, большие трещины, от дюйма до больше, чем фут шириной. Казалось, как будто земля основания холмов отделена от них, и подверглась более сильному удару... и ...В Талькауано большое землетрясение 20-го февраля было ощутимо так же сильно, как и в городе Консепсьоне. Оно имело место в то же самое время, и эффект его был аналогичный: только три здания, стоявшие на скалистом основании, избежали судьбы всех тех, которые стояли на рыхлой песчаной почве, которая простиралась между берегом моря и холмами...* [11, стр. 257]. Таким образом, Дарвин хорошо понимал эффекты геологии и свойств почвы на сейсмические эффекты. Он писал о *...земле основания холмов... и ...область, разрушенная таким образом, распространяется параллельно, или приблизительно так, прилегающим прибрежным горам...* [3, стр. 71].

Пример влияния геологии и рельефа на сейсмические волны в поверхностном слое был дан Педерсеном и др. [108].

Сейсмометры были помещены на линии, перпендикулярной горному хребту 300 м высотой во Франции (рис. 70). Датчики S2 и S3 были установлены на твердом известняке, тогда как оставшиеся три датчика были помещены на рыхлые отложения. Самое большое усиление волн имело место в S5, рядом, но не очень близко, с краем поверхностного слоя. Это результат концентрации

сейсмической энергии у края слоя. Усиление зависит от изменения толщины слоя и характера его движения (горизонтальное движение преобразовывается частично в вертикальное движение), контрастности импеданса между известняком и слоем, и механических свойств осадочного слоя.

В частности, из-за вызванных землетрясением колебаний сдвиговые напряжения в слое могут упасть до нуля, и материал слоя фактически преобразуется в жидкость. В этом случае возникает аналогия между развитием сейсмических волн около края слоя уменьшающейся толщины и цунами у береговой линии. Эта аналогия, а также рост пор в осадочном материале объясняют поднятие побережья у залива Разочарования на 14.5 м в результате землетрясения 1899 года на Аляске. 10 сентября там произошло более чем 50 подземных ударов. Первое землетрясение продлилось 90 секунд. Этого вполне достаточно для оживления поверхностного осадочного материала. Главный удар, который вызвал большие топографические изменения, произошел в 21:41 UTC (см. http://neic.usgs.gov/neis/eqlists/USA/1899_09_10.html). Автор думает, что имел место резонанс сейсмических волн в оживленном прибрежном слое осадочных пород, который породил волну, подобную цунами, которая подняла указанный участок побережья.

Известно, что скорость сдвиговой волны в поверхностном слое осадочных пород может уменьшиться с 160 м/сек до менее чем 10 м/сек (до 2–5 м/сек) за 16 секунд в результате вызванных землетрясением колебаний [109]. Материал слоя переходит в оживленное состояние. Когда волна движется к краю слоя (рис. 71), эффект дисперсии уменьшается и имеет место резонанс.

Результат, представленный на рис. 71, качественно описывает широкий диапазон явлений, которые могут иметь место из-за концентрации энергии волны. Из-за концентрации сейсмической энергии на конце слоя уменьшающейся толщины ускорение конца слоя начинает напоминать ускорение конца хлыста кнута, который может произвести звуковой удар, если кнут находится

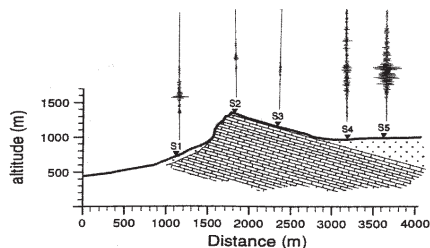


Рис. 70. Эволюция и усиление сейсмической волны, распространяющейся в осадочном слое, на краю слоя и в пределах склона горного хребта [15, 108].

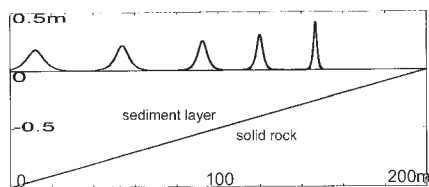


Рис. 71. Резонанс уединенной волны у края слоя оживленного материала (наклон 1:100) [41].

в достаточно умелых руках. Известно, что иногда имеющие разрывной фронт волны возбуждаются в гранулированных слоях при сильном вертикальном возбуждении [110].

Таким образом, образование «больших трещин» может быть объяснено резонансным усилением сейсмических волн в «земле основания холмов» (см. рис. 70). Этот резонансный процесс напоминает нам процесс формирования крутых фронтов океанских волн и цунами,двигающихся к береговой линии.

3.7. Дарвин и одна из теорий горообразования

Приблизительно 200 лет назад Дарвин подчеркнул связь вулканических и сейсмических сил с формированием гор: *... частые землетрясения ... вызывают разрывом земных пластов, ... и инъекцией в образовавшиеся промежулки расплавленных пород. Эти разрыв и инъекция, если они повторяются достаточно часто (а мы знаем, что землетрясения неоднократно постигают одни и те же области и протекают там одинаковым образом), образуют цепи холмов...* [2, стр. 376–377]. Таким образом, он допускал быстрое изменение лика Земли в результате воздействия вулканических и сейсмических сил. Сейчас такая точка зрения широко распространена. Гигантские землетрясения и мощнейшие вулканические извержения могли, в буквальном смысле в течение немногих лет, менять поверхность Земли, ее животный и растительный мир.

Над связью вулканических и сейсмических сил задумывались ученые в течение тысячелетий. Среди первых, кто рассмотрел возможность подобной связи, были выдающиеся ученые древней Греции и Рима. Например, мнение Аристотеля о том, что землетрясения вызывают извержения, было очень распространенным в течение столетий. Знаменитый поэт и ученый древнего Рима Лукреций связывал землетрясения с опусканием (погружением) массивных горных хребтов, в результате чего по поверхности Земли распространяются колебания. Географ Страбон отмечал случаи опускания поверхности Земли и подъема дна моря [111, стр. 207].

Таким образом, еще в античные времена было известно, что земная поверхность не находится в покое, а подвержена поднятию и опусканию. В эпоху Возрождения Леонардо да Винчи пришел к выводу, что нахождение окаменелых морских раковин на значительной высоте над уровнем моря представляет результат поднятия суши. Он полагал, что катастрофы наподобие библейского потопа не могут объяснить их появление на вершинах гор. Возражая против других схоластических объяснений, да Винчи пишет не без сарказма: «И если вы желаете сказать, что раковины произведены Природой в этих горах посред-

ством влияния звезд, то каким образом, по вашему, это влияние порождает в том же самом месте раковины различных размеров, возрастов и видов?» [111]. В те далекие годы да Винчи пришел к совершенно правильному выводу: современные горы могли быть некогда морем. После того, как море ушло, белые толщи известняков оказались на вершинах гор.

Вопрос о причинах появления морских раковин в горах, далеко от какой-либо воды в те столетия был далеко не праздный, так как он не соответствовал библейской версии о создании живых существ на Земле в течение одного дня шесть тысяч лет тому назад и неизменности этих существ. Во время путешествия Дарвина этот вопрос оставался злободневным. Этим объясняется то, что Дарвин неоднократно привлекает внимание читателя к своим находкам морских раковин в горах. Но общественное мнение не было благоприятно в отношении таких представлений. Тогда геологическая история базировалась на представлении, что, хотя уровень моря повышался и опускался, поверхность Земли была стационарна. Например, Эдуард Сюсс (Eduard Suess), автор авторитетной книги, *Antlitz der Erde*, отрицал, что побережья Чили подверглись подъему во время чилийских землетрясений 1835 и 1822 годов [112].

С современной точки зрения, это мнение выглядит странным. Действительно, в 1688 году в своей книге *Lectures and Discourses of Earthquakes* гениальный Роберт Гук (Robert Hooke) описал подъем и понижение уровня поверхности Земли, морского дна и вершин гор. Он связал эти явления с действием землетрясений.

Морские раковины в горах подтверждают связь эволюции поверхности Земли и жизни на Земле. Видимо, мысль Дарвина постоянно возвращалась к этой связи. Множество других наблюдений убеждали его в связи землетрясений, извержений вулканов и эволюции Земли, — в том, что возраст Земли составляет многие сотни миллионов лет. Он пишет: *...Одинокую избушку... упоминают все путешественники, переходившие здесь через Анды,.... Геология окрестных мест очень интересна. Хребет Успальята отделен от главных Кордильер длинной, узкой равниной, или котловиной, подобной тем, которые так часто упоминались мной в описании Чили, только лежащие выше, на высоте 6000 футов над уровнем моря. ...он состоит из различного рода подводных лав, перемежающихся с вулканическими песчаниками и другими замечательными осадочными отложениями; все это вместе очень похоже на третичные пласты на берегах Тихого океана. Исходя из такого сходства, я ожидал найти здесь окаменелые деревья, которые, вообще, характерны для этих формаций. Ожидания мои оправдались самым необыкновенным образом. В средней части хребта, на высоте около 7000 футов, я заметил на обыкновенном склоне выступающие белоснежные столбы. То были окамене-*

лые деревья... Немного нужно было иметь опыта в геологии, чтобы понять ту удивительную историю, какую раскрывала вся эта картина, хотя, сознаюсь, в первый момент я был до того изумлен, что едва верил несомненной очевидности. Я видел перед собой то место, где некогда группа красивых деревьев качала свои ветви на берегах Атлантического океана в ту пору, когда океан этот (ныне отступивший на 700 миль) подходил к подножью Анд. Я видел, что они выросли из вулканической почвы, которая поднялась над уровнем моря, и что впоследствии эта суша вместе с еще стоявшими деревьями опустилась в глубины моря. В этих глубинах прежняя суша покрылась осадочными слоями, которые в свою очередь были залиты громадными потоками подводной лавы, — один такой массив достигал тысячи футов в толщину; потоки расплавленного камня и водные отложения пять раз поочередно покрывали друг друга. Океан, вмещавший такие высокие массивы, был, должно быть, очень глубок; но снова пришли в действие подземные силы, и теперь я видел перед собой дно этого океана, образовавшее горную цепь вышиной более 7000 футов. Не дремали, однако, и те противодействующие силы, которые постоянно нарушают поверхность Земли: огромные толщи пластов были пересечены множеством широких долин, а деревья, ныне обратившиеся в камень, выступали теперь обнаженные из обратившейся ныне в камень вулканической почвы, откуда некогда, зеленые и цветущие, поднимали они свои высокие кроны... [1, стр. 405–407].

Каменная кора нашей планеты нигде и никогда не остается спокойной. Глубоко в недрах Земли, как в гигантском котле, происходят непрерывные изменения. И дыхание планеты, то приглушенное и спокойное, то спазматическое, ощущается постоянно. В результате, как и полагал Дарвин, участки коры поднимаются или опускаются, а их толщины меняются. Например, скорость поднятия некоторых участков Русской равнины составляет до нескольких миллиметров в год. Некоторые горные районы, особенно там, где хребты образуют морской берег, поднимаются до десяти сантиметров в год. В результате некоторые участки Земли за миллион лет могут подняться на несколько километров, а лик Земли за десятки миллионов лет кардинально меняется (см. рис. 72).

Из рис. 72 видно, что огромные территории, которые посетил Дарвин (см. Предисловие к настоящей книге) и где он совершил свои палеонтологические и геологические открытия, были в далеком прошлом покрыты океаном. Читатель, обратившись к картам, помещенным в Интернете, может найти и другие карты, которые показывают, что южная оконечность Южной Америки испытывала неоднократные поднятия и опускания относительно уровня мирового океана в течение третичного периода (около последних 70 миллионов

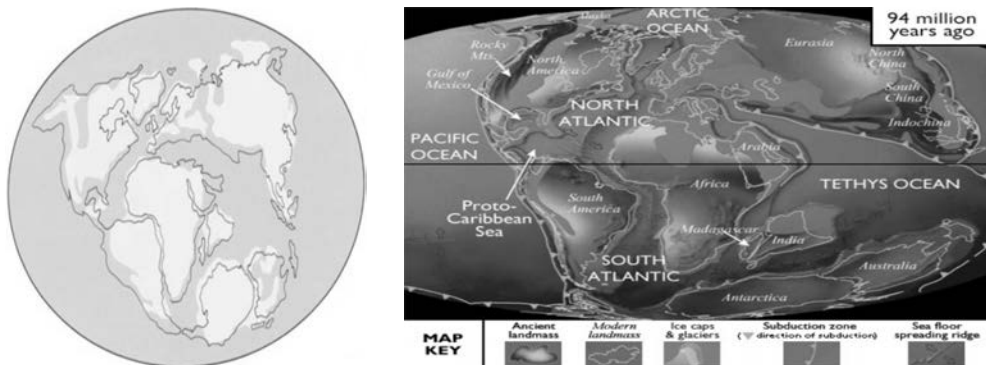


Рис. 72. Карты земной суши, существовавшей 144 (слева) и 94 (справа) миллионов лет назад. Тонкие черные линии определяют современные контуры материков, белые области определяют сушу, которая существовала 144 миллионов лет назад (слева). Тонкие белые линии определяют современные контуры материков (справа).

лет). Сказанное соответствует картине, нарисованной Дарвином в плане медленной эволюции поверхности Земли. Однако картина должна быть уточнена, так как окаменелые деревья, по-видимому, возникают только после очень быстрого — буквально в течение нескольких дней — погружения их в морскую воду. Это могло произойти в результате сильного землетрясения. Мы уже отмечали, что при Аляскинском 1899 года землетрясении некоторые участки побережья поднялись на 10–16 метров. Не меньшей амплитуды может быть прибрежное опускание дна, хотя бы потому, что там земная кора тоньше. Около 250 миллионов лет назад почти моментально погибли 95% живых существ в море и 70% на суше. Теперь есть данные, что виной тому мощнейшие вулканические извержения и землетрясения. Возможно, они раскололи праматерик Пангею.

Удивительные данные, в которые трудно поверить, приводятся в [113]. Во время моретрясения в Адриатическом море в 1873 году телеграфный кабель порвался в 10 км от острова Занте (этот остров располагается недалеко от острова Итака — родины Одиссея). Кабель, проложенный на глубине около 400 м, был обнаружен на глубине свыше 600 м, он был засыпан камнями. В 1886 году произошел новый разрыв кабеля, он был найден на глубине 400 м. После Токийского 1923 землетрясения было установлено 27 поднятий и опусканий дна до 100 м и шесть — до 200 м. Эти данные можно объяснить гигантскими оползнями и течениями, возникающими у дна во время землетрясений. Последние, обычно, поднимают или опускают океанское ложе не более чем на несколько метров.

Таким образом, данные наблюдений вполне согласуются с картиной эволюции участка земной поверхности, которая определяет, согласно Дарвину, возникновение окаменелых деревьев. Чтобы проиллюстрировать читателю некоторые элементы приведенного описания, мы воспроизвели на рис. 73 одну из схем эволюции участка земной коры в горы.



Рис. 73. Схема разлома земной коры, накопления осадочных пород и формирования гор. Схема взята из Интернета (географический словарь; Геосинклиналь — www.ecosystema.ru).

Анализируя проблему формирования горных хребтов и вулканов, Дарвин писал: *...чтобы разбить и опрокинуть части очень толстой земной коры, показанные на Диаграмме 3, там должно было быть большое горизонтальное растяжение, и оно, если внезапно, вызвало бы много непрерывных извержений вулканического вещества... и ...если бы сила действовала внезапно, эти части земной коры были бы выброшены...* [3, стр. 79].

Таким образом, приведенные в этом разделе строки Дарвина показывают, что в своей книге он сформулировал схему формирования горных хребтов на месте разрыва и обрушения части земной коры. В частности, такими частями могут быть толстые морские осадочные породы. Основные элементы этой схемы были положены в 1857 году шотландским геологом Джеймсом Холлом (James Hall) в основу теории происхождения гор. Идея, позже развитая Джеймсом Дуайтом Даном (J. D. Dana), состояла в том, что толщина подобного линзе океанского слоя растет во времени до тех

пор, пока слой не потеряет устойчивость (см. подраздел 2.5.2 и диаграмму 3). В результате последующего смятия и складывания слоя и действия вулканических сил происходит быстрое (в геологическом масштабе) формирование горной цепи. Эта теория как существенный элемент включает в себя динамический вертикальный подъем длинного и узкого участка поверхности Земли.

Отметим, что Дж. Д. Дан был знаком с Дарвином и его книгой *Путешествие на Бигле*. Они обменивались письмами, и в 1859 году Дарвин послал ему

копию своей книги *О происхождении видов путем естественного отбора* [114]. Однако мы не знаем, ссылались ли Джеймс Холл и Дж. Д. Дан в своих публикациях на результаты Дарвина, представленные в [1–3].

Сейчас специалистам хорошо известно, что в течение сотен миллионов лет различные участки земной поверхности претерпевали поднятия и опускания. Известно, что около 250 миллионов лет назад все континенты нашей планеты были объединены в составе единого праматерика Пангеи. Затем этот материк раскололся и его отдельные части (континенты) начали движение к современным расположениям (см. рис. 72). Все это объясняет то, что на дне океана не найдено пород с возрастом более 180 миллионов лет. Между тем возраст Земли определяется около 4.7 миллиардов лет, а океана около 3 миллиардов лет [8]. Отсутствие на дне старых пород объясняется также непрерывным обновлением земной коры в процессе подъема, опускания и движения участков земной коры, а кроме этого выходом магматических пород из расходящихся зон литосферы (см. замечание Дарвина, помещенное в начале раздела, и рис. 6). В частности, около 80 миллионов лет назад уровень моря был в среднем на 170 м выше, чем сейчас, так что под водой находились большая часть Северной Европы, огромные площади восточных побережий Южной и Северной Америк и часть Австралии (см. рис. 72). Все это согласуется с той грандиозной динамической картиной, которую нарисовал Дарвин в строках, которые мы привели в этом разделе, а также с геофизическими замечаниями Дарвина, представленными в его публикациях за 1839–1844 годы. Многие из этих замечаний мы привели в книге.

Во время путешествия перед мысленным взором Дарвина открылась очень сложная и длительная история поверхности Земли. Видно, что, хотя, в целом, он был согласен с Чарльзом Лайелем в том, что изменение лика Земли происходило очень медленно, он не исключал возможность в прошлом быстрых, назовем даже катастрофических, изменений. Он пишет: *...снова пришли в действие подземные силы...*, которые действовали *...внезапно...* Во время Чилийского 1835 года землетрясения он увидел (конечно, в много уменьшенном масштабе) действие этих сил, что привело его к далеко идущим выводам: *...по-видимому, вулканы приходят в действие и угасают на одних и тех же местах в зависимости от того, преобладают ли там движения поднятия или опускания...* [2, стр. 575].

В принципе под земной корой могут возникать огромные пустоты. Например, за счет перехода кристаллических пород в новую фазу под действием высокого давления и температур. Часть материи Земли может остывать и сжиматься в результате тепловой конвекции. Наконец, вулканы выбрасывают огромные массы материала и газов. В образовавшиеся пустоты могут внезапно

оседать огромные участки земной поверхности. Как пишет Дарвин:... *полости закрывались бы обрушивавшимися массами земной коры, производящими эффект огромного взрыва*.... Отметим также, что под тектоническими плитами существуют огромные тепловые источники («плюмы», см. рис. 6). Иногда они могут достигать земной коры и поднимать ее на значительную высоту (километр и более). В последующем кора оседает. Процесс может повторяться с периодом порядка миллиона лет. Еще большее влияние на изменение географии земной поверхности оказывает изменение климата. Сказанное показывает, что поверхность Земли находится в постоянной динамике и соответствует изложенным выше взглядам Дарвина.

3.8. Катастрофические землетрясения и цунами последних двух лет

Многие города мира построены на осадочных породах (например, Лос-Анджелес, Токио, Нью-Дели, Нью-Йорк, Шанхай, Калькутта и Джакарта) или на возвышенностях. Однако, с точки зрения последствий землетрясения, эти места из-за топографического эффекта являются наименее пригодными для строительства. Горные вершины и холмы, прибрежные зоны и осадочные бассейны, осушенные озера и континентальный шельф — природные резонаторы, где сейсмические волны могут быть усилены [5, 115]. Резонанс сейсмических волн в осадочном слое высохшего озера был причиной разрушения приблизительно 300 зданий, причем больше чем 20 000 человек погибли во время землетрясения 1985 года в Мехико [5]. На одной из частот было зафиксировано 55-кратное усиление ускорения поверхности Земли в районе высохшего озера [5]. Там ускорение поверхности Земли было до $0.8g$, в то время как совсем рядом от высохшего озера ускорение составляло $0.02\text{--}0.04g$.

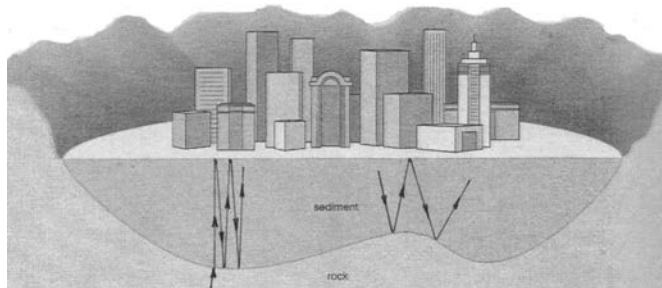


Рис. 74. Схема города, расположенного на осадочном слое, лежащем на массиве скальных пород. Сейсмические вертикальные волны могут быть захвачены и резонансно усилены осадочным слоем [114].

Схема города, расположенного на сейсмически возбужденном слое осадочных пород, дана на рис. 74. Рассмотрим возможность разрушения зданий города. Это разрушение может быть связано с различными эффектами усиления волн или усилении их воздействия на здания. Во-первых, амплитуда волн усиливается при их переходе в верхний слой. Усиление пропорционально отношению плотностей слоев. В случае слабых верхних слоев, усиление может быть достаточным для разрушения зданий, что Дарвин наблюдал в Чили. Затем захваченная сейсмическая волна может начать переотражаться. Если частота переотражения становится равной резонансной частоте какого-то здания или группы зданий, то в городе могут быть разрушения. Наконец, частота колебаний скальной породы может соответствовать резонансной частоте верхнего слоя. Это может привести к сильному росту амплитуды захваченной волны и разрушению города. Из схемы рис. 74 видно, что особую опасность представляют случаи, когда источник землетрясения расположен на небольшой глубине недалеко от города. При этом возникают вертикально распространяющиеся волны. Видимо, к таким волнам относятся волны, разрушившие город Порт-о-Пренс.

Землетрясение на Гаити 12 января 2010 года. Землетрясение на Гаити 12 января 2010 года магнитудой более 7 стало самым разрушительным в регионе за всю историю наблюдений. Столица государства Порт-о-Пренс была практически разрушена.

Источник землетрясения был расположен приблизительно на 13 км ниже поверхности в 22 км к юго-западу от столицы. Сейсмичность в регионе Гаити обусловлена сложным взаимодействием Карибской и Северо-Американской плит, в результате которого образовались микро-плиты Жонев и Пуэрто-Рико. Одной из причин катастрофических результатов землетрясения на Гаити, которое затронуло приблизительно три миллиона человек, являются почвы побережья, образованные слабосвязными пористыми осадочными породами. Другая важная причина — очаг землетрясения находился близко от столицы, поэтому вертикальная составляющая сейсмической волны не успела сильно ослабнуть, когда волна вышла на поверхность. Там она была захвачена холмами и усилена благодаря топографическому эффекту [116], который так красочно описал Дарвин. Наложение указанных обстоятельств, а также низкая прочность зданий, привели к смерти около 240 тысяч человек.

Чилийское землетрясение 27 февраля 2010 года: 27 февраля 2010, приблизительно в 03:34 местного времени, на севере Чили (побережье области Мауле (Maule)) произошло землетрясение магнитудой 8.8. Это случилось между Консепсьоном и Сантьяго: в 120 км к северо-востоку от города Консепсьо-

на и в 410 км к югу от Сантьяго. Землетрясение было сосредоточено приблизительно на глубине 35.4 км. Южный район Консепсьона был поднят на 3 метра, весь Консепсьон, в среднем, на 1.2 метра, а порт Талькауано поднялся на 1.5 метра. Подчеркнем, что землетрясение, результаты которого описал Дарвин, произошло на том же участке побережья.

У чилийского побережья есть длинная история очень больших землетрясений и больших перемещений. Например, землетрясение 27 февраля произошло приблизительно в 230 км к северу от самого сильного в истории наблюдений землетрясения, которое произошло в 1960 году. Во время этого землетрясения большие участки побережья опустились в воду или были подняты (см. рис. 10 и 11 из [112]). В [112] отмечается также, что остров Моша, в центральном Чили, поднялся за последние 5000 лет на более, чем 30 метров. Очень интересный, полный, хорошо иллюстрированный отчет о Чилийском землетрясении 27 февраля 2010 можно найти по адресу www.geerassociation.org/GEER.../Maule.../Section_4_GeologyVer7.pdf.

Предупреждение об опасности цунами было объявлено для побережья Чили, Перу, восточного побережья Австралии и некоторых тихоокеанских островов. На побережье Чили высота цунами достигала 1.6 м. В отличие от этого случая чилийское землетрясений 1960 года вызвало цунами с высотой до 10 м.

Сравнивая данные Дарвина и результаты чилийского землетрясения 27 февраля 2010 года, мы можем сформулировать два вопроса. Землетрясение в Чили было одним из самых больших, которое мир ощутил в последние десятилетия — итак, почему цунами был меньше, чем это могло ожидаться? С другой стороны мы можем рассмотреть последнее чилийское землетрясение как тест связи землетрясений и вулканов. В пределах 200-километрового радиуса от эпицентра землетрясения располагаются более десяти вулканов. Почему землетрясение не пробудило вулканы? Была ли в этом случае какая-нибудь связь между вулканами и сейсмической активностью?

Мы не раз подчеркивали выше, что Земля — очень сложная активная система. Есть много факторов, вовлеченных в формирование цунами и связь вулкан-землетрясение: местоположение, глубина, подготовленность, энергия, динамика сейсмических волн и т.д. Только зная эти параметры для каждого события, мы можем их сопоставлять. Однако, обычно, все эти параметры мы не знаем, поэтому у нас нет ответа на поставленные выше вопросы.

Землетрясение в Крайстчерче (февраль 2011 года), Новая Зеландия. Примером решающего влияния вертикального импульсного движения на катастрофические последствия землетрясения служит землетрясение в Крайстчерче. Как и в случае города Порт-о-Пренс магнитуда землетрясения была относи-

тельно небольшая — около 6.3. Однако результаты были катастрофические. Это объясняется тем, что источник землетрясения располагался на глубине 5 км почти под центром города, поэтому вертикальное движение, распространяющееся от него, существенно превалировало над горизонтальным движением, а именно, вертикальное ускорение достигло 2.2g. Если подобное имело место в 1835 году, то этого достаточно для объяснения всех сейсмических явлений, описанных Дарвином.

Японское землетрясение 11 марта 2011 года. В какой-то мере события, описанные Дарвином, повторились во время землетрясения, охватившего 11 марта 2011 года большие территории Японии. Центр землетрясения располагался в море на расстоянии 130 км от берега и на глубине около 24 км. Следовательно, расстояние приблизительно соответствовало приведенному Дарвином. Магнитуда была до 9. Т.е. она также приближенно соответствовала современным оценкам магнитуды чилийского 1835 года землетрясения. Поэтому не удивительно, что амплитуды волн цунами в обоих рассматриваемых случаях были близкими. В Японии они достигали 10 м, а в Чили, согласно Дарвину, доходили до 20–24 футов (до 6–7 метров).

Еще более важно для нас то, что землетрясение разбудило вулканы. Почти сразу после него заговорил вулкан на горе Карангетанг в Индонезии. При этом образовался столб выбросов, а по склонам начала стекать лава (рис. 75a).



а



б

Рис. 75. Вулкан на горе Карангетанг в Индонезии (а) и вулкан Шивелуч (б). Они начали интенсивное извержение после японского землетрясения 11 марта 2011.

На Камчатке начали извергаться сразу три вулкана. Сначала о своем «характере» заявил вулкан Шивелуч, который выбросил огромный столб пепла на высоту 8 километров (рис. 75b). Вслед за Шивелучем активность начал проявлять вулкан Карымский, который выбрасывал столбы пепла на высоту порядка 4 километров. Далее заговорил вулкан Кизимен, также выбрасывающий пепел с газом на высоту почти 5 километров (рис. 75b). 15 марта на юго-западе Японии проснулся вулкан Синмоз. Камни и пепел извергались из жерла вул-

кана на высоту до 4 км. До января 2011 года вулкан не проявлял активности в течение 52 лет. Отметим, что Санмоз расположен в 1,5 тыс. км от района землетрясения 11 марта 2011. Спустя час после первых сообщений о пробуждении вулкана в центральной части Японии наблюдались два подземных толчка магнитудой 6. Подчеркнем, что указанная связь землетрясений с началом вулканических извержений хорошо согласуется как с наблюдениями Дарвина, так и с последними данными наблюдений со спутников [136, 137].

В конце марта 2011 года метеоуправление Японии сообщило, что после произошедшего 11 марта сильного землетрясения по всей стране начали активизироваться, по меньшей мере, 13 вулканов, передает «Синьхуа». К числу оживших вулканов также относится знаменитая Фудзияма. 15 марта недалеко от Фудзиямы произошло землетрясение магнитудой 6.4, гипоцентр находился очень близко к району аккумуляции лавы горы Фудзияма. Один из профессоров Сидзуокского университета по вулкановедению объяснил, что «под влиянием сейсмической волны и сброса аккумуляированная лава возбудилась и привела к увеличению количества землетрясений вокруг вулканов». На его взгляд, после сильного землетрясения состояние земной коры в восточной части Японии стало нестабильным.

Представленный в этом разделе материал хорошо иллюстрирует слова Дарвина: *... глядя, как в один миг рушатся плоды трудов человека, мы чувствуем все ничтожество его хваленого могущества...* [2, стр. 601–602], которые могут быть истолкованы очень широко и применимы для всех областей человеческой деятельности. Вместе с тем грандиозные и страшные проявления природных сил не могут не вызывать исследовательский энтузиазм, требуют дальнейшего исследования, и на этом пути могут быть встречены новые, неожиданные явления.

3.9. Заключение

Если кто-то спросит меня, правда ли, что, по моему глубокому убеждению, наш век будет когда-нибудь назван веком железа, веком пара или веком электричества, то я отвечу без промедления, что его назовут веком Дарвина.

Людвиг Больцман

Надо отметить, что глубины Земли и динамика происходящих там процессов изучены намного хуже, чем глубины космоса, поэтому мы часто можем строить только предположения о причинах тех или других поверхностных явлений. В частности, хотя теория линейных сейсмических волн является клас-

сической и хорошо описывает множество наблюдений, она не является достаточной и должна быть дополнена нелинейной теорией [13]. Например, недавно было высказано предположение, что появление некоторых трещин на поверхности Земли можно объяснить, как проявление разрывных нелинейных волн, возникающих в окрестности источника землетрясения [117–121].

Когда в слабой точке старого разлома возникает критическое напряженное состояние, инициирующее появление новой трещины, то последняя может начать стремительное продвижение по разлому, генерируя волны сжатия и сдвига. Если скорость продвижения достаточно велика, то, суммируясь, эти волны порождают хорошо известный в газодинамике конус Маха — коническую поверхность, на которой волновые параметры претерпевают скачок (рис. 76).

Возможно ли, что указанный выше неожиданный характер разрушения поверхности Земли определяется сложным характером ее взаимодействия с конической поверхностью Маха, распространяющейся в глубине Земли? Это очень сложный вопрос, на который у нас нет ответа.

Однако принципиальными являются также вопросы о возможности самого зарождения крупномасштабной конической поверхности Маха в твердом теле за счет сдвиговых деформаций и о характере разрушения материала на этой поверхности. Результатов экспериментального исследования возможности формирования конусов Маха вблизи поверхности Земли при землетрясениях опубликовано мало, и они [117–121], по-видимому, определяют только начало исследований в этом направлении. Подчеркнем снова, что конус Маха хорошо известен и экспериментально изучен только для газовых сред. Примеров экспериментального

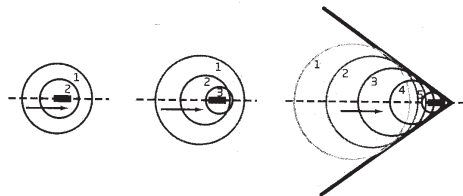


Рис. 76. Конус Маха, возникающий при скорости движения тела (трещины) с некоторой критической скоростью [119].



Рис. 77. Примеры конуса Маха в твердой среде и формирования перед ним трещин [122, 123].

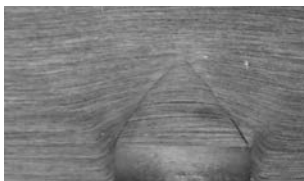


Рис. 78. Пример сформировавшегося конуса Маха в твердой среде [122, 123].



Рис. 79. Пример зарождения конуса Маха в твердой среде [122, 123].

исследования зарождения и распространения конуса Маха в твердых средах опубликовано не много.

Однако принципиальная возможность формирования подобных конусов была ясно показана более 30 лет тому назад при исследовании процесса пробивания металлических преград. Некоторые результаты экспериментального исследования процесса внедрения и движения твердого тела (цилиндрического ударника с плоским торцом) в более мягком материале показаны на рис. 77–79.



Рис. 80. Составляющие пробки, выбитой цилиндрическим ударником, пробивающим сплошной слой металла, и примеры оплавленных конических поверхностей Маха. Пробка (цилиндрический элемент материала слоя) распадается на цилиндр с конической выемкой (слева) и конический элемент, извлеченный из выемки (справа). Цилиндрические и конические поверхности оплавляются из-за пластических сдвиговых деформаций [122, 123].

Если скорость ударника была достаточно велика, то перед ним возникал конус Маха, а также цилиндрическая и коническая трещины с оплавленными краями. Конечно, в целом, возникающая волновая картина и характер разрушения зависели от начальной скорости ударника. На рис. 77–79 представлены результаты трех испытаний, выполненных с разными начальными скоростями: 224 м/сек (рис. 79), 240 м/сек (рис. 78) и 340 м/сек (рис. 77). Элементы, представленные на рис. 80, получены при скорости ударника, равной 437 м/сек. Развернутую информацию по этим экспериментам можно найти в [122–124].

Сейчас наблюдается возрастающее признание важности нелинейных явлений во многих областях геофизики [4–9, 13], [114–116, 125–127], хотя линейные модели продолжают быть важными инструментами для изучения различных геофизических процессов. В частности, нелинейное локальное усиление сейсмических волн [4, 12, 13, 40] оказалось более распространенным явлением [29–35], чем сейсмологи предполагали ранее. Пример локализации нелинейных сейсмических эффектов дан на рис. 81.

Почти двести лет назад Дарвин описал катастрофические динамические явления, которые теперь мы можем рассматривать как результаты сильно-нелинейных геофизических волновых процессов, которые были вызваны земле-



Рис. 81. Восточный залив Пленти (Bay of Plenty) в Новой Зеландии испытал серьезное землетрясение в марте 1987 года. Эти фотографии железнодорожной станции Эджекамб (Edgescumbe) с рельсами, изогнутыми в разные стороны, характеризуют величину сейсмических сил, а также эффекты нелинейностей. Слева — взгляд с уровня земли, справа — взгляд сверху [128].

трясением в области Концепсьона. Во время путешествия Дарвин был открыт для воздействия множества новых научных фактов, стимулирующих его размышления. Его талант к наблюдению и его гениальная способность находить объединяющую идею для независимых, на первый взгляд, явлений нашли свое первое применение. Указанное относится в значительной степени и к его геофизическим результатам [129–134]. В частности, Дарвин объяснил вызванные землетрясением катастрофические эффекты, которые он наблюдал в Чили в 1835 году «*поднятием земли*» и «*местными обстоятельствами*» (т.е. топографическими и геологическими эффектами). Автор сосредоточил свое внимание на этих идеях в данной части книги. Были проанализированы местные эффекты вызванного землетрясением резкого вертикального поднятия поверхности Земли. Известно, что местные эффекты имеют место там, где геология поверхностных слоев или/и рельеф поверхности быстро изменяются. Таким образом, Дарвин наблюдал влияние местных нелинейных топографических эффектов на результаты землетрясения, такие как поднятие и разрушение поверхности земли, возвышение островов, одновременные извержения вулканов и формирование цунами.

В то же самое время, мы подчеркнули это несколько раз, Дарвин думал о том, чтобы развить общую теорию землетрясений. Его мысль идет намного дальше простого фиксирования результатов землетрясения. Отталкиваясь от них, он делает широкие обобщения. Он пишет: *...Я ограничиваю предшествующие наблюдения землетрясениями на побережье Южной Америки или подобными, которые, кажется, сопровождаются поднятием земной поверхности. Но, поскольку мы знаем, что это сопровождается понижением в других*

частях мира, там должны формироваться трещины и, как следствие, условия для землетрясений... [3, стр. 74]. Согласно ему, области земной коры, держащие трещины, могут быть неустойчивы ...Если жидкое вещество, на котором, я полагаю, земная кора покоится, постепенно опускалось вместо того, чтобы подниматься, то там появилась бы тенденция возникновения полостей и, следовательно, направленного вниз давления; или полости закрывались бы обрушивавшимися массами земной коры, производящими эффект огромного взрыва. Такие землетрясения... редко сопровождались бы извержениями... [3, стр. 74].

Недавние открытия хорошо согласуются с идеями Дарвина [13, 29–35]. Вообще говоря, система разломов земной коры неустойчива. Даже слабые волны напряжений могут произвести сильный, даже катастрофический, эффект [135]. Согласно Дарвину, ...Часто случается, что одна и та же конвульсия возмущает большие области земного шара, и странные шумы распространяются на много сотен миль вглубь стран... [3, стр. 59] и ...большинство землетрясений, на первый взгляд внезапные, являются результатом длительного развития, как свидетельствуют и те события, которые предшествуют и те, которые следуют за землетрясением... [3, стр. 66]. Таким образом, нельзя рассматривать отдельные зоны разломов земной коры как независимые элементы. Если внутри некоторого объема коры имеется разлом, не проявивший себя в современных инструментальных измерениях, это не означает, что здесь отсутствует сейсмическая опасность. При определенных условиях быстрая эволюция разлома может вызвать сильное землетрясение.

Иногда извержения вулкана предшествуют землетрясению. Могут ли извержения рассматриваться как предшественники сильных землетрясений? Приблизительно 200 лет назад Дарвин писал: ...15 января (1835) мы вышли из гавани Лоу и через три дня бросили якорь вторично в бухте Сан-Карлос на Чилоэ. Ночью 19-го числа мы видели вулкан Осорно в действии.... Утром вулкан затих. Я с удивлением узнал потом, что в ту же ночь действовал и Аконкагуа в Чили, на 480 миль севернее, и был изумлен еще больше, узнавши, что большое извержение Косегуины (2700 миль севернее Аконкагуа), сопровождавшееся землетрясением, которое ощущалось за 1000 миль, также произошло не позже, чем часов через шесть после первых двух. Это совпадение тем более замечательно, что Косегуина дремала в продолжение 26 лет, а Аконкагуа вообще крайне редко проявляет какую-нибудь деятельность. Трудно даже приблизительно представить себе, было ли это совпадение случайным или указывало на наличие какой-то подземной связи... [2, стр. 352–353]. Подчеркиваем, что катастрофическое чилийское землетрясение 20 февраля 1835 года имело место спустя 35 дней после отмеченных выше извержений. Вместе с тем Дарвин не-

однократно отмечал связь между катастрофическими землетрясениями и последующей активностью вулканов. Мы не раз приводили выше его соответствующие высказывания. Буквально только в последние дни наблюдения со спутников подтвердили правоту предвидения Дарвина [136, 137].

Последние замечания. Катастрофические для человека результаты землетрясений могут зависеть от трех главных причин: расстояния от источника землетрясения, пути прохождения сейсмических волн от источника к определенному участку местности и от геологии участка и его рельефа. Очевидно, Дарвин наблюдал влияние именно последних условий на местное усиление колебаний почвы, вызванных землетрясением. В отличие от известных до настоящего времени подходов Дарвин объяснил катастрофические результаты землетрясения сильным импульсным вертикальным движением поверхности Земли, которое было преобразовано местными обстоятельствами в поднятие земли и островов, колебания горных вершин, одновременные извержения вулканов и цунами. Мы думаем, что эта идея Дарвина поддержана материалом этой части книги. Последним примером решающего влияния вертикального импульсного движения на катастрофические последствия землетрясения служит землетрясение в Крайстчерче (февраль 2011 года, Новая Зеландия). Там вертикальное ускорение достигло $2.2g$. Источник землетрясения располагался на глубине 5 км, поэтому вертикальное движение, распространяющееся от него, существенно превалировало над горизонтальным движением.

По-видимому, идея Дарвина о решающем влиянии импульсного вертикального движения поверхности на результаты землетрясения, в частности на возможность начала извержения вулканов, справедлива в случаях, когда источник землетрясения располагается достаточно близко от поверхности Земли. Отсутствие внимания со стороны вулканологов к этой идее можно объяснить тем, что возможность очень сильных сейсмических ускорений была установлена в самое последнее время.

Различным аспектам развития геологической науки посвящена огромная литература, которую невозможно даже в малой степени обзреть. Но даже то, что мы просмотрели, позволяет предполагать, что результаты Дарвина, посвященные землетрясениям, извержениям вулканов и динамике поверхностных слоев Земли, не оценены по достоинству, а его приоритет не подчеркивается [138]. Например, в очень интересном и детальном обзоре истории геологии [139] не отмечены эти результаты. Эта часть книги призвана несколько заполнить указанный пробел.

Литература

- [1] Darwin, C., 1839. Journal of Researches into the Geology and Natural History of the Various Countries Visited by H.M.S. Beagle, under the Command of Captain FitzRoy, R.N. from 1832 to 1836. Henry Colburn, London.
- [2] Darwin, C., 1845. Journal of Researches into the Natural History and Geology of the Countries Visited during the Voyage of H.M.S. Beagle Around the World, under the Command of Captain Fitz Roy, R.N. T. Nelson and Sons, London.
- [3] Darwin, C. On the connexion of certain volcanic phenomena in South America; and on the formation of mountain chains and volcanoes, as the effect of the same power by which continents are elevated. In *The Collected Papers of Charles Darwin*. Ed. P.H. Barrett, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1977.
- [4] Anderson J.G., 2007. Physical processes that control strong ground motion. In *Treatise on Geophysics*. Ed. G. Schubert, vol.4, 513–565, Elsevier.
- [5] Singh, S.K., Mena, E., Castro, R., 1988. Some aspects of source characteristics of the 19 September 1985 Michoacan earthquake and ground motion amplification in and near Mexico City from strong motion data. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **78**, 451–477.
- [6] Aki, K., 1993. Local site effects on weak and strong ground motion. *Tectonophysics*, **218**, 93–111.
- [7] Oglesby, D.D., Archuleta, R.J., 1997. A faulting model for the 1992 Petrolia earthquake: an extreme ground acceleration be a source effect? *J. Geophys. Res.*, **102** (B6), 11,877–11,897.
- [8] Монин, А. С., Корчагин, Н. Н., 2008. Десять открытий в физике океана. Научный мир, Москва.
- [9] Aoi, S., Kunugi, T., Fujiwara, H., 2008. Trampoline effect in extreme ground motion. *Science*, **322**, 727–730.
- [10] Johnson, J.B., Lees, J.M., Gerst, A., Sahagian, D., Varley, N., 2008. Long-period earthquakes and co-eruptive dome inflation seen with particle image velocimetry. *Nature*, **456**, 377–381.
- [11] The *Beagle* Record, 1979. Ed. R.D.Keynes. Cambridge University Press.
- [12] Reiter, L., 1990. Earthquake Hazard Analysis. Columbia University Press, NY.
- [13] Николаевский, В. Н., 2010. Собрание трудов. В двух томах, ИКИ, Москва.
- [14] Galiev, Sh.U., 1999. Topographic effect in a Faraday experiment. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 6963–7000.

[15] Galiev, Sh.U., 2003. The theory of non-linear transresonant wave phenomena and an examination of Charles Darwin's earthquake reports. *Geophys. J. Inter.*, **154**, 300–354.

[16] Kadanoff, L.P., 1999. Built upon sand: theoretical ideas inspired by granular flows. *Rev. Modern Phys.*, **71** (1), 435–444.

[17] Faraday M., 1831. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surface. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **52**, 299–340.

[18] Wassgren, C.R., Brennen, C.E., Hunt, M.L., 1996. Vertical vibration of a deep bed of granular material in a container. *Trans. of the ASME. J. Appl. Mech.*, **63**, 712–719.

[19] Натанзон, М. С., 1977. Продольные автоколебания жидкостной ракеты. Машиностроение, Москва.

[20] Anilkumar, A.V., 1989. Experimental Studies of High-Speed Dense Dusty Gases. Thesis of doctor of Philosophy, California Institute of Technology, Pasadena, CA.

[21] Mujica, N., Melo, F., 1998. Solid-liquid transition and hydrodynamic surface waves in vibrated granular layers. *Phys. Rev. Let.*, **80** (2), 5121–5124.

[22] Linde, A.T., Sacks, I.S., 1998. Triggering of volcanic eruptions. *Nature*, **395**, 888–890.

[23] Hill, D.P., Pollitz, F., Newhall, C., 2002. Earthquake-volcano interaction. *Physics Today*, **55** (11), 41–47.

[24] Kawakatsu, H., Yamamoto, M., 2007. Volcano seismology. In *Treatise on Geophysics*. Ed. G. Schubert, vol.4, 389–420, Elsevier.

[25] Watt, S.F.L., Pyle, D.M., Mather, T.A., 2009. The influence of great earthquakes on volcanic eruption rate along the Chilean subduction zone. *Earth and Plan. Sci. Lett.*, **277**, 399–407.

[26] Sibson, R.H., 2006. Charles Lyell and the 1855 Wairarapa, New Zealand earthquake: recognition of fault rupture accompanying an earthquake. *Seismological Res. Lett.*, **77** (3), 358–363.

[27] Narrative of the surveying voyages of His Majesty's Ship Adventure and Beagle, between the years 1826 and 1836, describing their examination of the southern shores of South America, and the Beagle's circumnavigation of the globe. Henry Colburn, London, 1839. Volume 2. Proceedings of the second expedition, 1831–1836, under the command of Captain Robert Fitz-Roy, R.N.

[28] Robinson, A., 1993. Earth Shock. Thames and Hudson, London.

[29] Parsons, T., 2009. Last earthquake legacy. *Nature*, **462**, 42–43.

- [30] Stein, S., Liu, M., 2009. Long aftershock sequences within continents and implications for earthquake hazard assessment. *Nature*, **462**, 87–89.
- [31] Chui, G., 2009. Shaking up earthquake theory. *Nature*, **461**, 870–872.
- [32] Taira, T., Silver, P.G., Niu, F., Nadeau, R.M., 2009. Remote triggering of fault–strength changes on the San Andrea fault at Parkfield. *Nature*, **461**, 636–639.
- [33] Field, E.H., Dawson, T.E., Felzer, K.R., Frankel, A.D., Gupta, V., Jordan, T.H., Parsons, T., Petersen, M.D., Stein, R.S., Weldon, R.J. II, Wills, C.J., 2009. Uniform California earthquake rupture forecast, Version 2 (UCERF 2). *Bull. Seis. Soc. Am.*, **99** (4), 2053–2107.
- [34] Akciz, S.O., Ludwig, L.G., Arrowsmith, J.R., 2009. Revised dates of large earthquakes along the Carrizo section of the San Andreas Fault, California, since A. D. 1310 30. *J. Geophys. Res.*, **114**, B01313.
- [35] Chavarria, J.A., Malin, P., Catchings, R.D., Shalev, E., 2003. A look inside the San Andreas fault at Parkfield through vertical seismic profiling. *Science*, **302**, 1746–1748.
- [36] Geller, R.J., 1995. The role of seismology. *Nature*, **373**, 554.
- [37] Geller, R.J., 1997. Earthquake prediction: a critical review. *Geophys. J. Int.*, **131**, 425–450.
- [38] Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction. Keilis–Borok, V.I. and Soloviev, A.A. (eds.), Springer–Verlag, Heidelberg, 2003.
- [39] The works of Charles Darwin. Eds. P.H. Barrett & R.B. Freeman. Vol. **9**, London, William Pickering, 1986.
- [40] Kramer, S.L., 1996. Geotechnical Earthquake Engineering. Prentice Hall, NJ.
- [41] Mader, C.L., 2004. Numerical Modeling of Water Waves. CRC Press: London.
- [42] Shuto, N., 1985. The Nihonkai–Chubu earthquake tsunami on the North Akita Coast. *Coastal Eng. Japan*, **28**, 255–264.
- [43] Пелиновский, Е.Н., 1996. Гидродинамика волн цунами. Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород.
- [44] Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A., 2009. Rogue Waves in the Ocean. Springer, Berlin Heideberg New York.
- [45] Galiev, Sh.U., 2008. Strongly–nonlinear wave phenomena in restricted liquids and their mathematical description. In *New Nonlinear Phenomena Research*, Ed. T.Perlidze, 109–300, Nova Science Publishers, NY.
- [46] Seed, H.B., Martin, P.P., & Lysmer, H., 1976. Pore water pressure changes during soil liquefaction. *J. Geotech. Engng.*, *ASCE*, **102**, 323–346.

- [47] Nikolaevskiy, V. N., 1996. Geomechanics and Fluidodynamics. Kluwer, Dordrecht.
- [48] Pudasaini, S.P., Hutter, K., 2007. Avalanche Dynamics. Springer.
- [49] Reynolds, O., 1889. On the dilatancy of media compacted of rigid particles in contact. *Phil. Mag. Ser.*, **5** (20), 469–481.
- [50] Majmudar, T.S., Behringer, R.P., 2005. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, **435**, 1079–1082.
- [51] Jaeger, H.M., Nagel, S.R., Behringer, R.P., 1996. Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, **68**, 1259–1273.
- [52] Spudich, P., Hellweg, M., Lee, W.H.K., 1996. Directional topographic site response at Tarzana observed in aftershocks of the 1994 Northridge, California, earthquake: implications for mainshock motions. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **86** (1B), S193–S208.
- [53] Rial, J.A., 1996. The anomalous seismic response at the Tarzana hill site during the Northridge 1994 Southern California earthquake: a resonant sliding block. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86** (6), 1714–1723.
- [54] Graizer, V., 2009. Low-velocity zone and topography as a source of site amplification effect on Tarzana hill, California. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **29**, 324–332.
- [55] O’Connell, D.R.H., 2008. Assessing ground shaking. *Science*, **322**, 686–687.
- [56] Johnson, W., 1972. Impact Strength of Materials. Edward Arnold, London.
- [57] Kolsky, H., 1953. Stress Waves in Solids. Clarendon Press, Oxford.
- [58] Rinehart, J.S., 1960. The role of stress waves in the comminution of brittle, rocklike materials. In *Stress Wave Propagation in Materials*, ed. Davids, H., 247–269, Interscience, New York.
- [59] Whitney, J.W., 2009. Surface-feature indications that Yucca Mountain has not experienced extreme ground motions in the past. U.S. Department of Energy, Las Vegas, NV, USA.
- [60] Fritz, H., Kalligeris, N., 2008. Ancestral heritage saves tribes during 1 April 2007 Solomon Island tsunami. *Geophys. Res. Lett.*, **35**, L01607.
- [61] Taylor, F.W., Briggs, R.W., Frohlich, C., Brown, A., Hornbach, M., Parabatu, A.K., Meltzner, A.J., Billy, D., 2008. Rupture across arc segment and plate boundaries in the 1 April 2007 Solomons earthquake. *Nature geoscience*, **1**, 253–257.
- [62] Sills, G.C., Wheeler, S.J., Thomas, S.D., Gardner, T.N., 1991. Behaviour of offshore soils containing gas bubbles. *Geotechnique*, **41** (2) n, 227–241.
- [63] Davison, C., 1936. Great Earthquakes. Thomas Murby & Co., London.

[64] Sturtevant, B., Kanamori, H., Brodsky, E.E., 1996. Seismic triggering by rectified diffusion in geothermal systems. *J. Geophys. Res.*, **101**, 25,269–25,282.

[65] Brodsky, E.E., Sturtevant, B., Kanamori, H., 1998. Earthquakes, volcanoes, and rectified diffusion. *J. Geophys. Res.*, **103**, 23,827–23,838.

[66] Self, S., Wilson, L., Nairn, I.A., 1997. Vulcanian eruption mechanisms. *Nature*, **277**, 440–443.

[67] Gomberg, J., Reasenber P.A., Bodin, P., Harris, R.A., 2001. Earthquake triggering by seismic waves following the Landers and Hector Mine earthquakes. *Nature*, **411**, 462–466.

[68] West, M., Sanchez, J.J., McNutt, S.R., 2005. Periodical triggered seismicity at Mount Wrangell, Alaska, after the Sumatra earthquake. *Science*, **308**, 1144–1146.

[69] Brodsky, E.E., Prejean, S.G., 2005. New constraints on mechanisms of remotely triggered seismicity at Long Valey Caldera. *J. Geophys. Res.*, **110**, B04302.

[70] Anilkumar, A.V., Sparks, R.S.J., Sturtevant, B., 1993. Geological implications and applications of high-velocity two-phase flow experiments. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, **56**, 145–160.

[71] Alidibirov, M., Dingwell, D.B., 1996. Magma fragmentation by rapid decompression. *Nature*, **380**, 146–148.

[72] Mader, H.M., 1998. Conduit flow and fragmentation. In *The Physics of Explosive Volcanic Eruptions*, eds. Gilbert, J.S. & Sparks, R.S.J., **145**, 51–71, Geological Society, Special Publications.

[73] Morrissey, M.M., Mastin, L.G., 2000. Vulcanian eruption. In *Encyclopedia of Volcanoes*, ed. Sigurdsson, H., 463–475, Academic Press.

[74] Clarke, A.B., Voight, B., Neri, A., Macedonio, G., 2002. Transient dynamics of vulcanian explosions and column collapse. *Nature*, **415**, 897–901.

[75] Dobran, F., Neri, A., Macedonio, G., 1993. Numerical simulations of collapsing volcanic columns. *J. Geophys. Res.*, **98**, 4231–4259.

[76] Gonnermann, H.M., Manga, M., 2007. The fluid mechanics inside a volcano. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **39**, 321–356.

[77] Turcotte, D.L., Ockendon, H., Ockendon, J.R., Cowley, S.J., 1990. A mathematical model of vulcanian eruptions. *Geophys. J. Int.*, **103**, 211–217.

[78] Voight, B., Sparks, R.S.J., Miller, A.D., Stewart, R.C., Hoblitt, R.P., Clarke, A., Ewart, J., Aspinall, W.P., Baptie, B., Calder, E.S., Cole, P., Druitt, T.H., Hartford, C., Herd, R.A., Jackson, P., Lejeune, A.M., Lockhart, A.B., Loughlin, S.C., Luckett, R., Lynch, L., 1999. Magma flow instability and cyclic activity at Soufriere Hills Volcano, Montserrat. *Science*, **283**, 1138–1142.

[79] James, M.R., Lane, S.J., Chouet, B.A., 2008. Gas slug ascent through changes in conduit diameter: Laboratory insights into a volcano–seismic source process in low–viscosity magma. *J. Geophys. Res.*, **111**, B05201.

[80] Кедринский, В.К., 2008. О газодинамических признаках взрывных извержений вулканов. Ч.1. Гидродинамические аналоги предвзрывного состояния вулканов, динамика состояния трехфазной магмы в волнах декомпрессии. *Журнал прикладной механики и технической физики*, **49** (6), 891–898.

[81] Kedrinskii, V.K., 2005. Hydrodynamics of Explosion. Springer.

[82] Latter, J.H., 1981. Volcanic earthquakes, and their relationship to eruptions at Ruapehu and Ngauruhoe volcanoes. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, **9**, 293–309.

[83] Umbanhowar, P.B., Melo, F., Swinney, H.L., 1996. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, **382**, 793–796.

[84] Mukerjee, M., 1996. Science with brass. *Sci. Am.*, **275**, 19–21.

[85] Lioubashevski, O., Hamiel, Y., Agnon, A., Reches, Z., Fineberg, J., 1999. Oscillons and propagating solitary waves in a vertically vibrated colloidal suspension. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3190–3193.

[86] Royer, J.R., Corwin, E.I., Flor, A., Cordero, M.–L., Rivers, M.L., Eng, P.J., Jaeger, H.M., 2005. Formation of granular jets observed by high–speed X–ray radiography. *Nature Phys.*, **1**, 164–167.

[87] Lohse, D., Rauh?, R., Bergmann, R., van der Meer, D., 2004. Creating a dry variety of quicksand. *Nature*, **432**, 689–690.

[88] Bourne, N.K., Field, J.E., 1992. Shock–induced collapse of single cavities in liquids. *J. Fluid Mech.*, **244**, 225–240.

[89] Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В., 1977. Гидродинамические проблемы и их математические модели. Наука, Москва.

[90] Eggers, J., Villiermaux, E., 2008. Physics of liquid jets. *Rep. Prog. Phys.*, **72**, 036601.

[91] Antkowiak, A., Bremond, N., Le Dizes, S., Villiermaux, E., 2007. Short–term dynamics of a density interface following an impact. *J. Fluid Mech.*, **577**, 241–250.

[92] Cole, R.H., 1948. Underwater Explosions. Princeton University Press, Princeton.

[93] Weiss, R., Wunnemann, K., 2007. Large waves caused by oceanic impacts of meteorites. In *Tsunami and Nonlinear Waves*. Ed. A. Kundu, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg.

[94] Stein, S., Okal, E.A., 2005. Speed and size of the Sumatra earthquake. *Nature*, **434**, 581–582.

[95] Advanced Numerical Models for Simulation Tsunami Waves and Runup. Ed. P.L.–F. Liu, H. Yeh, C. Synolakis, World Scientific, 2008.

[96] Mei, C.C., Stiassnie, M.S., Yue, D.K.–P., 2005. Theory and Applications of Ocean Surface Wave. Part 2. Nonlinear Aspects; World Scientific: NJ.

[97] Imamura, F., Shuto, N., Ide, S., Yoshida, Y., Abe, K., 1993. Estimate of the tsunami source of the 1992 Nicaraguan earthquake from tsunami data. *Geophys. Res. Lett.*, **20** (14), 1515–1518.

[98] Tadepalli, S., Synolakis, C.E., 1994. The run-up of N-waves on sloping beaches. *Proc. R. Soc. Lond., A*, **445**, 99–112.

[99] Synolakis, C.E., Bernard, E.N., 2006. Tsunami science: before and beyond Boxing Day 2004. *Philos. Trans. R. Soc., Ser. A*, **364**, 2231–2265.

[100] Satake, K., 2007. Tsunamis. In *Treatise on Geophysics*. Ed. G. Schubert, vol.4, 483–511, Elsevier.

[101] Segur, H., 2007. Waves in shallow water, with emphasis on the tsunami of 2004. In *Tsunami and Nonlinear waves*. Ed. A. Kundu, Springer.

[102] Gisler, G.R., 2008. Tsunami simulation. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **40**, 71–90.

[103] Левин, Б.В., 1996. Цунами и моретрясения в океане. Природа, **5**, 48–61.

[104] Green, G., 1837. On the motion of waves in a variable canal of small depth and width. *Camb. Trans. VI*, Papers, 225. (see also G. Green, Mathematical Paper of the Late George Green. Ed. Norman Ferres, Macmillan & Co; London, 1871).

[105] Лавренов, И.В., 1998. *Математическое моделирование ветровых волн в пространственно-неоднородном океане*. Гидрометеиздат, Санкт-Петербург, 1998. (Lavrenov, I.V., 2003. *Wind-Waves in Ocean*. Springer).

[106] Galiev, Sh.U., Flay, R.G., 2009. The transient interaction of plates with extreme water waves: effects of deformability and hull cavitation. In *Fluid Structure Interaction V*. Ed. C.Brebbia, WIT Press.

[107] Tamura, H., Waseda, T., and Miyazawa, Y., 2009. Freakish sea state and swell wind–sea coupling. Numerical study of the *Suwa–Maru* incident. *Geopys. Res. Let.*, **36**, L01607.

[108] Pedersen, H., Brun, B.L., Harzfeld, D., Campillo, M., Bard, P.–Y., 1994. Ground motion amplitude across ridges. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **84**, 1786–1800.

[109] Pease, J.W. & O'Rourke, T.D., 1997. Seismic response of liquefaction sites. *J. Geotech. Engrg., ASCE*, **123**, 37–45.

[110] Clément, E., Vanel, L., Rajchenbach, J., Duran, J., 1996. Pattern formation in a vibrated granular layer. *Phys. Rev., E*, **53**, 2972–2975.

[111] Hart, I.B., 1961. The world of Leonardo da Vinci. Macdonald, London.

[112] Vita-Finzi, C., 1992. Earthquakes. In *The Darwin College Lectures. Understanding Catastrophe*. Ed. Bourriau, J., Cambridge University Press.

[113] Лебединский, В.И., Шалимов, А.И., 1965. Загадки земных недр. Наукова думка, Киев.

[114] John Wiester, 1998. Paradigm Shifts in Geology and Biology: Geosynclinal Theory and Plate Tectonics; Darwinism and Intelligent Design. From *Perspectives on Science and Christian Faith*, December, 276–278.

[115] Galiev, Sh.U., 1998. Topographic amplification of vertical-induced waves in natural resonators. <http://kfki.baw.de/conferences/ICHE/1998-Cottbus/333.pdf>.

[116] Schiermeier, Q., 2010. Quake threat looms over Haiti. *Nature*, **467**, 1018–1019.

[117] Rosakis, A.J., Samudrala, O., Coker, D., 1999. Cracks faster than the shear-wave speed. *Science*, **284**, 1337–1340.

[118] Xia, K., Rosakis, A.J., Kanamori, H., 2004. Laboratory earthquakes: the sub-Rayleigh-to-supershear rupture transition. *Science*, **303**, 1859–1861.

[119] Fisher, R., 2009. Seismic boom. *New Scientist*, **203** (2719), 32–35.

[120] Rousseau, C.-E., Rosakis, A.J., 2009. Dynamic path selection along branched faults: experiments involving sub-Rayleigh and supershear ruptures. *J. Geophys. Res.*, **114**, 808303.

[121] Bizzarri, A., Dunham, E.M., Spudich, P., 2009. Coherence of Mach fronts during heterogeneous supershear earthquake rupture propagation: simulations and comparison with observations. Manuscript submitted to *J. Geophys. Res.*

[122] Astanin, V.V., Galiev, Sh.U., Ivashchenko, K.B., 1991. Cone formation in targets beneath a penetration projectile. *Int. J. Impact Engineering*, **11** (4), 515–525.

[123] Astanin, V.V., Galiev, Sh.U., Ivashchenko, K.B., 1988. Peculiarities of the deformation and failure of aluminum targets in interaction with a steel projectile along the normal. *Strength of Materials*, **12**, 52–58.

[124] Astanin, V.V., Galiev, Sh.U., Ivashchenko, K.B., 1987. Numerical-experimental study of the elastoplastic interaction of a strikes with an obstacle. *Strength of Materials*, **11**, 97–100.

[125] Losos, J.B., Ricklefs, R.E., 2009. Adaptation and diversification on island. *Nature*, **457**, 830–836.

[126] Fukushima, Y., Irikura, T.U., Matsumoto, H., 2000. Characteristics of observed peak amplitude for strong ground motion from the 1995 Hyogoken Nanbu (Kobe) earthquake. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **90**, 545–565.

[127] Bonilla, L.F., Archulata, R.J., Lavallée, D., 2005. Hysteretic and dilatant behaviour of cohesionless soils and their effects on nonlinear site response: field data observations and modelling. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **95** (6), 2373–2395.

- [128] Eiby, G.A., 1989. Earthquakes. Heinemann Reed, Auckland.
- [129] Hebert, S., 1985. Darwin the young geologist. In *Darwinian heritage*. Ed. Kohn, D., 483–518. Princeton, Princeton University Press, NJ.
- [130] Chiesura, G., 2002. Charles Darwin geologo, Hevelius Edizioni, Benevento (in Italian).
- [131] Herbert, S., 2005. Charles Darwin, Geologist. Cornell University Press, Ithaca, NY.
- [132] Nicholas, F.W., Jan, M., 1989. Charles Darwin in Australia. Cambridge: Cambridge University Press.
- [133] Tee, G.J., 1992. Review of «Nicholas, F.W., Jan, M., 1989. Charles Darwin in Australia. Cambridge: Cambridge University Press., *The Journal of the Polynesian Society*, **101** (2), 291–202.
- [134] Anderson, L.I., 2009. Charles Darwin and Andrew Smith — an overseas exchange. *Scottish Journal of Geology*, **45** (1), 59–68.
- [135] Stein, R.S., 2003. Earthquake conversations. *Scientific American*, **288**, 72–79.
- [136] Geoscience: Volcanoes respond to earthquakes. *Nature*, 2010, **467**, 887.
- [137] Donne, D. D. *et al.*, 2010. Earthquake-induced thermal anomalies at active volcanoes. *Geology*, **38**(9), 771–774.
- [138] Greene, M.T., 1982. Geology in the Nineteenth Century. Cornell University Press, Ithaca, NY.
- [139] Bodissey B., 2009. A History of Geology and Planetary Science. Интернет публикация.

Часть II.

Описание катастрофических океанских волн и цунами в переменных Лагранжа

...вода отступает от суши, а затем возвращается
как огромная опрокидывающаяся волна, ... ее
размер определяется ... формой побережья.

Дарвин

...Куда? Куда?
Дорога здесь. Но ты не слышишь,
Идешь, куда тебя влекут
Мечтанья тайные; твой труд
Тебе награда; им ты дышишь...

Пушкин



Рис. 82. Цунами-убийца.

4. Введение

Наука — это систематизированный и организованный здравый смысл.

Томас Гексли

4.1. Несколько исторических замечаний

Цель этой части книги — математический анализ сообщений Дарвина о развитии цунами во время чилийского землетрясения 20 февраля 1835 года (см. разделы 2.5.6 и 3.4). Анализ проводится на основе математического исследования распространения поверхностных океанских волн. Это огромная область исследований, основы которой заложены трудами Ньютона, Эйлера и Лагранжа. К настоящему времени в этой области получено огромное количество выдающихся результатов, значение которых распространяется далеко за пределы исследований океанских волн. Невозможно даже в малой степени отразить эти результаты в одной книге. Такая цель здесь, конечно, не ставится. Здесь мы ограничимся выводом максимально простых уравнений, описывающих распространение нелинейных поверхностных волн на воде. Они должны позволить нам математически описать прибрежную эволюцию цунами, описанную Дарвином, а также объяснить появление гигантской волны, встреченной *Биглем* около мыса Горн. Таким образом, нас интересуют катастрофические волны, исследование которых — одна из важнейших задач нашего исследования. Заранее сообщим, что появление этих волн связывается с резонансными явлениями.

В начале главы отметим три экспериментальных результата, в силу их важности для тематики книги. Во введении мы отмечали, что Дарвин хорошо отличал волновые колебания воды от ее движения при обтекании судна. По-видимому, Леонардо да Винчи был одним из первых, кто экспериментально с помощью соломинок исследовал эту особенность волнового движения. «Появляется некоторая видимость движения, но вода со своего места не двигается», — отмечал он [1]. Галилей начал первым экспериментально исследовать нелинейные волны и связанные с ними резонансы. В частности, он возбуждал поверхностные волны в бокале с водой и обнаружил, что «бокал воды может испускать звук... иногда случается, что звук мгновенно изменяется на октаву выше... каждая вышеупомянутая волна делится на две» [2]. Фарадей [3, 4] повторил эксперименты Галилея с бокалом воды. Затем Фарадей исследовал волны, возбуждаемые при вертикальных колебаниях слоев жидкости и различных слабосвязных материалов. Он нашел, что максимальный эффект име-

ет место, когда частота поверхностных волн равна половине возбуждающей частоты. Таким образом, он описал эффект параметрического резонанса.

Мы видим, что уже в достаточно далеком прошлом неожиданные волновые нелинейные и резонансные эффекты динамики волн привлекали внимание гениальных ученых. В настоящее время это одна из наиболее интересных для исследователей областей механики и физики, в которой имеется много нерешенных проблем. В частности, это относится к проблеме возникновения и эволюции катастрофических волн. Проблема цунами рассматривается как некоторая часть проблемы катастрофических океанских волн.

4.2. Описание нелинейности

В этой и в третьей частях книги под катастрофическими понимаются нелинейные поверхностные волны, высота которых в два и более раз превышает высоту окружающих волн. Иногда их высота достигает 30 метров. Часто такие волны имеют очень крутой фронт. Эти волны можно определить как неожиданно появляющиеся высоко-нелинейные волны. Это — новая проблема, хотя есть много прекрасных исследований, посвященных нелинейным волнам, в частности, распространяющимся на поверхности воды. Их результаты могут быть найдены в фундаментальных книгах [5–15], многих обзорах и статьях (см., например, [16–28]). Исследование этих волн связано с определением источников нелинейности в математической формулировке рассматриваемой физической проблемы и оценкой их вклада в суммарную нелинейность. Волны, распространяющиеся в сплошных средах, могут определяться влиянием четырех источников нелинейности. Первый источник — уравнение неразрывности, уравнения движения и энергии, записанные в напряжениях. Второй источник — уравнение состояния, связывающее давление p и плотность ρ (или p , ρ , и температура). Этот источник очень важен для сильно сжимаемых сред (например, пузырьковых жидкостей, пористых материалов и газов). Третий источник — механические уравнения, связывающие напряжения и скорости (или смещения). Для жидкостей эти уравнения описывают обычно их вязкие свойства. Последний источник, который является самым важным для поверхностных волн, определяется границами среды. Вклады этих источников в суммарную (полную) нелинейность различны. В частности, для океанских волн первые и четвертые источники — наиболее важные, так как воду можно часто рассматривать как несжимаемую идеальную (невязкую) жидкость.

Известно, что прибрежные волны хорошо иллюстрируют различные сложные эффекты. Когда волны движутся к берегу, их амплитуды растут. Вертикальное ускорение воды становится сопоставимым с гравитационным

ускорением. Влияние трения о дно увеличивается. Эффект дисперсии уменьшается, профиль волны сильно меняется, а ее фронт опрокидывается. Таким образом, прибрежная динамика волн включает широкий спектр явлений, связанных с нелинейностью, дисперсией, разрушением волны, каплеобразованием и рельефом дна. В значительной степени сказанное относится и к волнам цунами.

Классические теории поверхностных волн не принимают во внимание все явления, упомянутые выше. Однако улучшенное понимание волновых процессов привело в последние десятилетия к развитию более передовых теорий, например, использующих приближение Буссинеска [23] или модель Грина-Нагди [26], а также основанных на решении уравнений Навье-Стокса [28]. Вместе с тем, уравнения, соответствующие этим моделям, не демонстрируют ясно взаимодействие между сильной нелинейностью, дисперсией, трением и рельефом дна, которое играет важную роль в эволюции многих океанских волн.

4.3. Переменные Лагранжа

Традиционный способ математического описания нелинейных поверхностных волн основан на использовании метода Эйлера. Другой подход к описанию этих волн использует метод Лагранжа (см. [5], стр. 12 и [10], стр. 536). Вообще говоря, лагранжевый подход — менее удобный, чем метод Эйлера, если рассматриваются гидрогазодинамические задачи. Однако это полностью верно только для трехмерных проблем, которые здесь не рассматриваются. При изучении же одномерных и двумерных задач лагранжевая формулировка часто упрощает анализ и решение сложных нелинейных волновых проблем. Например, Эйри [29], используя подход Лагранжа, записал следующее уравнение «длинных» волн в канале с вертикальными стенками [5, стр. 260]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right)^3}. \quad (4.1)$$

Здесь ξ — горизонтальное смещение, a — лагранжева координата, t — время, h — глубина воды. Уравнение замечательно тем, что позволяет исследовать влияние нелинейностей различного уровня на волны. Заманчиво вывести уравнение, аналогичное (4.1), но учитывающее влияние дисперсии и вязкостных эффектов. Заметим, что уравнение (4.1) описывает также одномерные волны в газе и твердых телах. Из-за этой аналогии результаты, установленные для

этих сред, могут быть использованы при описании длинных поверхностных волн. Мы используем в книге эту параллель, рассматривая длинные волны.

Описание метода Лагранжа применительно к поверхностным волнам дано в ряде работ (см., например, [30–33]). Здесь мы следуем [34, 35]. Выбор лагранжевого подхода вместе с некоторыми упрощающими предположениями позволил нам получить сильно-нелинейные волновые уравнения для океанических волн. В частности, уравнения гидродинамики, представленные в лагранжевой форме, упрощены к трехскоростным (или двухскоростным) сильно-нелинейным волновым уравнениям для океанских волн, которые учитывают различные физические эффекты, влияющие на развитие волны: силу тяжести, дисперсию, нелинейность, донное трение, поверхностное натяжение и вертикальное движение частиц воды.

Подчеркнем, что развиваемый в этой части книги подход ни в коей мере не призван заменить общепринятый и детально изученный подход к исследованию поверхностных волн, основанный на переменных Эйлера. Цель его, в первую очередь, прикладная. Мы выводим приближенные, но простые и обозримые уравнения для исследования интересного класса катастрофических волн.

В главе 5 этой части развита общая теория нелинейных колебаний слоя жидкости, представленная в переменных Лагранжа. Закон вертикального перемещения частиц жидкости по глубине считается известным. В следующей главе вводится операция осреднения движения жидкости по глубине. Это позволило вывести ряд приближенных уравнений для длинных и коротких поверхностных волн. Главы 7–10 посвящены приложениям развитой теории поверхностных волн. Построены решения нелинейных волновых уравнений для различных случаев усиления океанических поверхностных волн. Нелинейное преобразование и рост амплитуды волн связываются с резонансными эффектами. Изучено прибрежное развитие цунами.

5. Лагранжева форма двумерных уравнений гидродинамики: уравнения равновесия, граничные условия и вывод сильно-нелинейного основного уравнения

Одну вещь я понял в результате своей долгой жизни: по сравнению с Природой наша наука примитивна и находится в младенческом состоянии и все же она — самая драгоценная вещь, которую мы имеем.

Эйнштейн

В этой главе мы формулируем математическую теорию нелинейных поверхностных волн, используя приближение механики континуума и лагранжевые координаты. Рассматриваются невязкие и вязкие модели среды.

5.1. Исходные уравнения

Мы рассматриваем двумерные (2D) движения. Используется декартова ортогональная система координат. Принято, что горизонтальная ось расположена на свободной поверхности среды, а вертикальная ось направлена вертикально вниз. Начальная горизонтальная координата частицы среды a , а c — ее начальная вертикальная координата. Величины a и c являются лагранжевыми координатами. Мы также вводим координаты Эйлера x , z , которые определяют положения частицы в определенное время t .

Координаты x и z связаны с лагранжевыми координатами, согласно следующим выражениям [36]:

$$x = a + u, \quad z = c + w, \quad (5.1)$$

здесь $u = u(a, c, t)$ — горизонтальное смещение и $w = w(a, c, t)$ — вертикальное смещение частиц. Рассмотрим слой жидкой среды. Например, таким слоем, распределенным по поверхности Земли, является океан. Исходное (начальное) состояние верхней поверхности слоя определяется уравнением $c = 0$, а геометрия рельефа дна определяется уравнением $c = h(a)$, где $h = h(a)$ — толщина слоя. Толщина слоя жидкости зависит от вертикального смещения верхней поверхности. В параметрах координат Лагранжа и начальной глубины $h_0(x)$ имеем: $h(a) = h_0(x) - w$.

Уравнения движения. Используя координаты Лагранжа и Эйлера, запишем следующие двумерные динамические уравнения:

$$\rho(u_{tt} - X) = p_{11,x} + p_{31,z}, \quad (5.2)$$

$$\rho(w_{tt} - g) = p_{13,x} + p_{33,z}. \quad (5.3)$$

В книге Ламба (Lamb) [5] эти уравнения были записаны для жидкости. В то же самое время они справедливы для многих моделей сплошных сред. В (5.2) и (5.3) X и g — компоненты внешних сил на единицу массы. Предположим, что

$$g = g_0 + g_d, \quad (5.4)$$

где g_0 — гравитационное ускорение и $g_d = g_d(t)$ — вынуждающее ускорение (например, g_d может определяться движением дна). p_{11} и p_{33} — компоненты напряжения сжатия, p_{31} и p_{13} — компоненты напряжения сдвига. Подстрочные индексы t , x и z соответствуют производным по времени и координатам Эйлера. Уравнения (5.2) и (5.3) содержат частные производные относительно x и z , в то время как мы хотим, чтобы наши независимые переменные были a и c . Чтобы прийти к этому, умножим обе части записанных выше уравнений на $\partial x / \partial a$ и $\partial z / \partial a$, соответственно, и сложим их; затем на $\partial x / \partial c$ и $\partial z / \partial c$, и опять сложим. В результате, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \rho(u_{tt} - X)(1 + u_a) + \rho(w_{tt} - g)w_a + p_a = \\ = (P_{11,x} + p_{31,z})(1 + u_a) + (p_{13,x} + P_{33,z})w_a, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \rho(u_{tt} - X)u_c + \rho(w_{tt} - g)(1 + w_c) + p_c = \\ = (P_{11,x} + p_{31,z})u_c + (p_{13,x} + P_{33,z})(1 + w_c). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь подстрочные индексы a и c определяют производные относительно координат Лагранжа. В (5.5) и (5.6) использовано (5.1) и следующие выражения:

$$p_{11} = -p + P_{11} \text{ и } p_{33} = -p + P_{33}, \quad (5.7)$$

где p — гидростатическое давление, положительное для случая сжатия, и отрицательное — для растяжения, P_{11} и P_{33} — девиаторные компоненты тензора напряжения. Мы представили уравнения (5.5) и (5.6) так, что их левые стороны совпадают с гидродинамическими уравнениями для невязких жидкостей, записанными в форме Лагранжа. Затем (5.5) и (5.6) переписываем в следующем виде:

$$\rho(u_{tt} - X)(1 + u_a) + \rho(w_{tt} - g)w_a + p_a = P_{11,a} + p_{31,c} + V_n, \quad (5.8)$$

$$\rho(u_{tt} - X)u_c + \rho(w_{tt} - g)(1 + w_c) + p_c = p_{13,a} + P_{33,c} + \bar{V}_n, \quad (5.9)$$

где

$$V_n = (P_{11,x} + p_{31,z} - P_{11,a} - p_{31,c}) + (P_{11,x} + p_{31,z})u_a + (p_{13,x} + P_{33,z})w_a, \quad (5.10)$$

$$\bar{V}_n = (p_{13,x} + P_{33,z} - p_{13,a} - P_{33,c}) + (P_{11,x} + p_{31,z})u_c + (p_{13,x} + P_{33,z})w_c. \quad (5.11)$$

Легко видеть, что в случае не слишком больших перемещений частиц, величины V_n и $\bar{V}_n$ могут быть весьма малыми.

Уравнение неразрывности. Уравнение неразрывности [5] записывается в виде:

$$1 = (1 + w_c)(1 + u_a). \quad (5.12)$$

Уравнение состояния. В случае волн на поверхности воды может быть принята несжимаемая модель для жидкости, и уравнение состояния имеет вид $\rho = \text{const}$.

Механические уравнения. Члены правой стороны уравнений (5.8) и (5.9) учитывают напряжения, которые определяются механическими уравнениями. Для многих жидкостей эти уравнения описываются моделью Навье, которая будет обсуждаться в разделе 6.7.5.

Таким образом, мы сформулировали проблему исследования с помощью уравнений, имеющих второй порядок по времени. Такой подход широко распространен в механике деформируемого твердого тела.

Замечание. Хотя Эйри вывел уравнение (4.1), используя координаты Лагранжа, он при этом не использовал соотношения (5.1) между эйлеровыми и лагранжевыми координатами. По-видимому, первым, при рассмотрении поверхностных волн на воде, эти соотношения использовал Стокс [37].

5.2. Граничные условия

Теперь запишем граничные условия для океана конечной глубины, используя Лагранжевы координаты. Исходим из того, что выше мы записали уравнения (5.8) и (5.9), которые справедливы для многих континуумов. В частности, они описывают волны в упругих материалах. Таким образом, в Лагранжевых координатах описание движения жидких и твердых сред одинаково. Поэтому одинаковой является и формулировка граничных условий. В механике деформируемого твердого тела они традиционно записываются в усилиях (напряжениях) и смещениях.

Мы подчеркиваем, что, в общем случае, формулировка граничных условий — сложная задача. Например, на поверхности дна эта формулировка включает модели воды и материала дна и модель контакта вода/дно. Чтобы упростить задачу, мы можем предположить, что на дне частицы воды неподвижны относительно дна. Очевидно, эта модель справедлива только для глубокой воды. Также, очевидно, она не применима к длинным волнам большой амплитуды, распространяющимся на мелкой воде. В последнем случае мы можем предположить, что частицы воды могут свободно скользить относительно дна, но эта модель игнорирует хорошо известное явление донного трения. Более сложные модели граничных условий нуждаются в эмпирической информации о взаимодействии поток воды/дно. Конечно, любая такая модель может зависеть и от параметров волны и от текущей глубины.

Здесь будут использоваться упрощенные версии граничных условий. Мы запишем граничные условия, которые имеют ясный физический смысл и, в то же самое время, позволяют в дальнейшем получить относительно простые уравнения для нелинейных поверхностных волн.

Граничные условия для смещений. Смещения частиц жидкости, расположенных на поверхности океана, должны быть равными смещениям свободной поверхности воды ($c = 0$). Поэтому, мы постулируем, что

$$w = -\eta \text{ и } u = U \text{ на } c = 0, \quad (5.13)$$

где $\eta = \eta(a, t)$ — поднятие поверхности и $U = u(c = 0, a, t)$.

Теперь рассмотрим условие на дне для невязкой модели жидкости. Она часто используется в теории океанских волн. В этом случае жидкость течет по дну без сопротивления, а на непроницаемом твердом дне произвольной формы имеем

$$w = h_a \hat{U} \text{ в } c = h(a), \quad (5.14)$$

где $\hat{U} = u(c = h, a, t)$, $h = h(a)$. Однако иногда вязкие эффекты могут быть важными, особенно вблизи берега. В этом случае, классические граничные условия, определяющие взаимодействие между частицами жидкости и дном, формулируются в виде:

$$w = 0 \text{ и } u = \hat{U} = 0 \text{ на } c = h(a). \quad (5.15)$$

Условие (5.15) утверждает, что дно твердое, и частицы на твердой поверхности не могут передвигаться. Однако, вообще говоря, жидкие частицы и частицы дна могут скользить относительно друг друга. Чтобы включить такой случай в рассмотрение, мы обобщаем условия (5.15). Принимаем, что скольжение частиц пропорционально сдвиговому напряжению. В этом случае, используя (5.14), мы можем записать

$$w = h_a \bar{\beta} p_{31}, \hat{U} = \bar{\beta} p_{31} \text{ на } c = h(a). \quad (5.16)$$

Константа $\bar{\beta}$ — коэффициент скольжения. Если $\bar{\beta} = 0$, тогда мы имеем классическое условие (5.15) для u . Очевидно, в случае движения дна, вызванного землетрясением, условия (5.15) переписываются в виде: $w = w_1(t, a)$, $u = u_1(t, a)$, где $w_1(t, a)$ и $u_1(t, a)$ смещение дна.

Граничные условия для напряжений. Если сила поверхностного трения равна нулю, то мы имеем:

$$p_{31} = 0 \text{ на } c = 0. \quad (5.17)$$

Затем рассматривается напряжение p_{33} (5.7). Полагаем приближенно, что

$$-p(t, a, c = 0) + P_{33}(t, a, c = 0) = p_0 \text{ на } c = 0,$$

где p_0 — внешнее давление (например, атмосферное давление или действие ветра). Однако, если длина волны короткая (порядка одного сантиметра или меньше), поверхностное напряжение, которое пропорционально искривлению поверхности, должно быть также принято во внимание. Найдем поверхностное искривление. Мы можем определить координаты Эйлера для верхней поверхности $c = 0$, как $x = a + U$ и $z = w$. В этом случае поверхностная кривизна K определяется классическим выражением

$$K = (x_a z_{aa} - x_{aa} z_a)(x_a^2 + z_a^2)^{3/2}.$$

Теперь мы можем написать динамическое граничное условие для напряжения на поверхности $c = 0$:

$$p(t, a, c = 0) = P_{33}(t, a, c = 0) + p_0 - \sigma[(1 + U_a)\eta_{aa} - U_{aa}\eta_a][(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2}, \quad (5.18)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

5.3. Выражение для давления и основное сильно-нелинейное волновое уравнение

Давление может быть определено из уравнения вертикального движения (5.9) [5, 33–35]. Интегрируя это уравнение между 0 и c и используя граничные условия (5.13) и (5.18), получаем:

$$p = \int_c^0 \rho(u_{tt} - X)u_c dc + \int_c^0 \rho w_{tt}(1 + w_c)dc + \rho g c + \rho g \eta + \rho g w + p_0 - \sigma[(1 + U_a)\eta_{aa} - U_{aa}\eta_a][(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} - \int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)dc + P_{33}(c, a, t) + \bar{C}. \quad (5.19)$$

Здесь $\bar{C} = \bar{C}(a, t)$ — функция интегрирования. Уравнение (5.19) отличается от закона гидростатического давления [5], так как принимает во внимание g_d , нелинейные эффекты, вертикальное ускорение, поверхностное натяжение, напряжения и X . Однако, если $u_c = X = g_d = w_{tt} = \sigma = p_{13,a} = P_{33} = \bar{V}_n = 0$, тогда (5.19) дает классическое выражение для давления. Действительно, используя координату Эйлера z (5.1) и полагая $\bar{C} = 0$, мы получаем из (5.19,) что $p - p_0 = \rho g_0(z + \eta)$.

Подставляя (5.19) в (5.8), мы выводим основное волновое уравнение

$$(u_{tt} - X)(1 + u_a) + g\eta_a + w_{tt}w_a = \left\{ \int_c^0 (u_{tt} - X)u_c dc + \int_c^0 w_{tt}(1 + w_c)dc + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \rho^{-1} p_0 - \rho^{-1} \sigma [(1 + U_a) \eta_{aa} - U_{aa} \eta_a] [(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{\frac{3}{2}} \Bigg\}_a + \\
& + \rho^{-1} \left[\int_0^c (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + p_{31,c} + V_n \right] + \rho^{-1} p_{31,c}. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Следовательно, мы свели задачу рассмотрения океанических волн к анализу двух уравнений (5.12) и (5.20) с тремя неизвестными η , u , и w .

5.4. Двухмерные (2D) сильно-нелинейные волновые уравнения для вязкой жидкости

Цель этого раздела — вывод сильно-нелинейных уравнений, обобщающих уравнение Эйри (4.1.). Это достигается вводом приближенных выражений для вертикального смещения частиц воды.

5.4.1. Аппроксимация вертикального перемещения

Специалистам хорошо известны сложности моделирования поверхностных волн. В частности, они связаны с необходимостью учета движения частиц воды под ее поверхностью. В случае глубокого океана влияние даже умеренных поверхностных волн распространяется на глубину нескольких десятков метров. Намного более сложная картина приповерхностных течений возникает вблизи берега (рис. 83). Поэтому проблема математического моделирования поверхностных волн включает в себя задачу приближенного описания перемещений (или течений) жидкости под ее поверхностью. При этом схематизация движения жидкости может быть довольно сильной. Например, теория «длинных» волн основана на предположении, что горизонтальное перемещение жидких частиц не меняется с глубиной, а вертикальное смещение линейно зависит от глубины. Это предположение не согласуется со многими наблюдениями (см. рис. 83). Вместе с тем, как на первый взгляд ни странно, теория «длин-

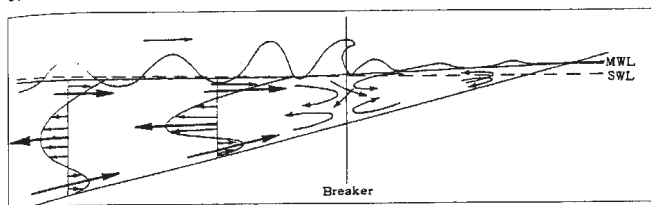


Рис. 83. Схема течений, возникающих у берега при опрокидывании волны [38].

ных» волн во многих случаях хорошо описывает динамику поверхностных волн.

Используя основную идею теории длинных волн мы в этом разделе примем определенную зависимость w от c и поднятия поверхности воды. Рассматриваются два приближенных выражения для w .

1. Во-первых, мы принимаем, что на дне возможно горизонтальное смещение $\hat{U}$ частиц воды относительно дна, а вертикальное смещение w изменяется согласно уравнению следующего типа

$$w = f_1(a, c)\eta + h_a f_2(a, c)\hat{U}, \quad (5.21)$$

где $f_1(a, c)$ и $f_2(a, c)$ — аппроксимирующие функции. Выражение (5.21) должно удовлетворять граничным условиям. Пусть $f_1(a, c=0) = 1$, $f_2(a, c=0) = 0$. В этом случае $w = -\eta$ на $c=0$ (5.13). Мы полагаем также, что

$$f_1(a, c=h) = 0 \text{ и } f_2(a, c=h) = \bar{\beta} p_{31} \hat{U}^{-1}. \quad (5.22)$$

В этом случае уравнение (5.21) удовлетворяет граничному условию для w (5.16). Затем, согласно (5.21), (5.22) и (5.12), находим, что

$$\eta = [(1+u_a)^{-1} \quad 1 \quad h_a f_{2,c} \hat{U}] f_{1,c}^{-1}, \quad (5.23)$$

$$w = [(1+u_a)^{-1} \quad 1 \quad h_a f_{2,c} \hat{U}] f_{1,c}^{-1} + h_a f_2 \hat{U}, \quad (5.24)$$

$$u = \int (1 + f_{1,c} \eta + h_a f_{2,c} \hat{U})^{-1} da \quad a + \bar{C}(c, t), \quad (5.25)$$

где $f_1 = f_1(a, c)$, $f_2 = f_2(a, c)$ и $\bar{C}(c, t)$ — функция интегрирования. Для начального состояния горизонтальное смещение равно нулю ($u = 0$). Поэтому полагаем, что, $\bar{C}(c, t) = 0$.

2. Если горизонтальное движение частиц воды у дна отсутствует, то (5.21) дает

$$w = f_1(a, c)\eta. \quad (5.26)$$

Здесь $f_1(a, c)$ должно быть выбрано так, чтобы удовлетворялись граничные условия (5.13) и (5.15) для w .

5.4.2. Двухмерное (2D) волновое уравнение типа Эйри

Дифференцируя (5.20) относительно a и используя (5.12) и (5.21), мы получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned} & [2(1+w_c)^3 (w_{ct})^2 - (1+w_c)^2 w_{ctt}] (1+w_c)^{-1} X_a (1+w_c)^{-1} + \\ & + (u_{tt} - X) u_{aa} + g \eta_{aa} + w_{tta} w_a + w_{tt} w_{aa} - \sigma p^{-1} \eta_{aa} \left\{ [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_{aa} \\ & - 2\sigma p^{-1} \eta_{aaa} \left\{ [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_a + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_c^0 (\eta_{tt} f_{1,aa} + 2\eta_{ta} f_{1,a} + \eta_{aaa} f_1) dc + \int_c^0 (2w_{att} w_{ca} + w_{tt} w_{caa} + w_{aat} w_c) dc + \\
& + \int_c^0 [h_{aa} f_2 \hat{U}_{tt} + h_a f_{2,a} \hat{U}_{tt} + h_a f_2 \hat{U}_{ta}]_a dc - \sigma \rho^{-1} \eta_{aaaa} [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} = \\
& = - \int_c^0 [(u_{tt} - X) u_c]_{aa} dc - \rho^{-1} p_{0,aa} - \sigma \rho^{-1} \left\{ (U_{aa} \eta_a - U_a \eta_{aa}) [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_{aa} + \\
& + \rho^{-1} \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + p_{31,c} + V_n \right]_a. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Далее, используя (5.12), (5.21) и (5.23), мы перепишем (5.27) в виде сильно-нелинейного трехскоростного волнового уравнения

$$\begin{aligned}
& (\eta_{tt} - c_1^2 \eta_{aa}) [f_{1,a} w_a + \int_c^0 f_{1,aa} dc - (1+w_c)^3 f_{1,c}] + (\eta_{ta} - c_2^2 \eta_{aaa}) \int_c^0 f_1 dc \\
& \rho^{-1} \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \right]_a = W(\sigma), \quad (5.28)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1^2 & = \left\{ g + f_1 w_{tt} - \sigma \rho^{-1} [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2}_{aa} \right\} \\
& \left[(1+w_c)^3 f_{1,c} - f_{1,a} w_a - \int_c^0 f_{1,aa} dc \right]^{-1}, \quad (5.29)
\end{aligned}$$

$$c_2^2 = \sigma \rho^{-1} \left(\int_c^0 f_1 dc \right)^{-1} [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2}, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned}
W(\sigma) & = X_a (1+w_c)^{-1} \left(f_1 w_a + 2 \int_c^0 f_{1,a} dc \right) (\eta_{ta} - c_2^2 \eta_{aaa}) - (u_{tt} - X) u_{aa} \\
& \left[\int_c^0 (u_{tt} - X) u_c dc + \rho^{-1} p_0 \right]_{aa} - 2(1+w_c)^4 (w_{ct})^2 \\
& - \int_c^0 (h_{aa} f_2 \hat{U}_{tt} + h_a f_{2,a} \hat{U}_{tt} + h_a f_2 \hat{U}_{ta})_a dc - 2 \int_c^0 w_{att} w_{ca} dc - \int_c^0 w_{tt} w_{caa} dc - \int_c^0 w_{aat} w_c dc \\
& - w_{tt} [f_{1,aa} \eta + 2f_{1,a} \eta_a + (h_{aa} f_2 \hat{U} + h_a f_{2,a} \hat{U} + h_a f_2 \hat{U}_a)_a] + (1+w_c)^3 h_a f_{2,c} \hat{U}_{tt} - \\
& - (h_{aa} f_2 \hat{U}_{tt} + h_a f_{2,a} \hat{U}_{tt} + h_a f_2 \hat{U}_{ta}) w_a - \sigma \rho^{-1} \left\{ (U_{aa} \eta_a - U_a \eta_{aa}) [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_{aa}
\end{aligned}$$

$$- \rho^{-1} p_{0,aa} + \rho^{-1} p_{31,ca}, \quad (5.31)$$

$$c_3^2 = 2\sigma \rho^{-1} \left\{ \left[(1 + U_a)^2 + \eta_a^2 \right]^{3/2} \right\}_a \left(f_{1a} w_a + 2 \int_c^0 f_{1,a} dc \right)^1. \quad (5.32)$$

Подчеркнем, что c_1 , c_2 и c_3 в (5.28) имеют размерность скорости. Скорость c_1 определяется силой тяжести и поверхностным натяжением, поэтому эта скорость может быть связана с капиллярными и гравитационными волнами. Она также зависит от вертикального ускорения частиц воды w_{tt} . Скорость c_2 определяется поверхностным натяжением, поэтому эта скорость может быть связана с капиллярными волнами. Скорость c_3 определяется как капиллярными силами, так и рельефом дна. Возможно, она связана с волнами ряби, возникающими перед слабо погруженными в воду объектами. Из (5.28–5.32) видно, что c_1 , c_2 и c_3 зависят от кривизны η_a поверхности воды.

Формально уравнение (5.28) зависит от η , w , u и $\hat{U}$. Однако, так как $w = w(\eta, \hat{U})$ (5.21) и $u = u(\eta, \hat{U})$ (5.23), то в действительности, уравнение (5.28) зависит только от η и $\hat{U}$. Если $\hat{U} = 0$, тогда уравнение (5.28) зависит только от η .

Рассмотрим несколько вариантов представления уравнения (5.28).

1. Используя (3.7), мы можем записать следующее:

$$\begin{aligned} & \eta_{aa} - g^{-1} f_{1,c} (1 + w_c)^3 \eta_{tt} = \\ & = -g^{-1} \left(f_{1,a} w_a + \int_c^0 f_{1,aa} dc \right) \eta_{tt} - g^{-1} f_{1a} w_{tt} \eta_{aa} + g^{-1} \sigma \rho^{-1} \left\{ \left[(1 + U_a)^2 + \eta_a^2 \right]^{3/2} \right\}_{aa} \eta_{aa} \\ & \quad (\eta_{ttaa} - c_2^2 \eta_{aaaa}) g^{-1} \int_c^0 f_{1a} dc + g^{-1} \rho^{-1} \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \right]_a + \\ & \quad + g^{-1} W(\sigma). \end{aligned} \quad (5.33)$$

2. Используя (5.21), мы можем переписать уравнение (5.33) так:

$$\begin{aligned} & (w f_1^{-1} - h_a f_2 f_1^{-1} \hat{U})_{aa} - g^{-1} f_{1,c} (1 + w_c)^3 (w f_1^{-1} - h_a f_2 f_1^{-1} \hat{U})_{tt} = \\ & = -g^{-1} \left(f_{1,a} w_a + \int_c^0 f_{1,aa} dc \right) \eta_{tt} - g^{-1} f_{1a} w_{tt} \eta_{aa} + g^{-1} \sigma \rho^{-1} \left\{ \left[(1 + U_a)^2 + \eta_a^2 \right]^{3/2} \right\}_{aa} \eta_{aa} \\ & \quad (\eta_{ttaa} - c_2^2 \eta_{aaaa}) g^{-1} \int_c^0 f_{1a} dc + g^{-1} \rho^{-1} \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc \right. \\ & \quad \left. - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \right]_a + g^{-1} W(\sigma). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Уравнение (5.34) дает

$$f_1^{-1} [w_{aa} - g^{-1} f_{1,c} (1 + w_c)^3 w_{tt}] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2w_a f_1^2 f_{1a} + (w f_1^2 f_{1a})_a + (h_a f_2 f_1^1 \hat{U})_{aa} - g^{-1} h_a f_{1,c} f_2 f_1^{-1} (1 + w_c)^3 \hat{U}_a - \\
&- g^{-1} \left(f_{1,a} w_a + \int_c^0 f_{1,aa} dc \right) \eta_a - g^{-1} f_1 w_a \eta_{aa} + g^{-1} \sigma \rho^{-1} \left\{ [(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_a \eta_{aa} \\
&(\eta_{aa} - c_2^2 \eta_{aaa}) g^{-1} \int_c^0 f_1 dc + g^{-1} \rho^{-1} \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \right]_a + \\
&+ g^{-1} W(\sigma). \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Если члены правой стороны уравнения (5.35) пренебрежимо малы, то (5.35) преобразуется к уравнению, структурно похожему на уравнение Эйри (4.1):

$$w_a - g f_{1,c}^{-1} (1 + w_c)^3 w_{aa} = 0. \tag{5.36}$$

Напомним, что в этом подразделе используются обозначения:

$$U = u(c = 0, a, t) \text{ и } \hat{U} = u(c = h, a, t).$$

3. Мы полагаем, что вертикальное смещение изменяется согласно уравнению (5.26). В этом случае уравнение (5.12) дает

$$\eta_a = -(1 + u_a)^2 u_{aa} f_{1,c}^{-1} [(1 + u_a)^{-1} f_{1,c}^2 f_{1,ca} + (f_{1,c}^{-1})_a]. \tag{5.37}$$

Подставляя (5.37) в (5.20), мы получаем

$$\begin{aligned}
&u_a(1 + u_a) - g(1 + u_a)^2 u_{aa} f_{1,c}^{-1} - g[(1 + u_a)^{-1} f_{1,c}^2 f_{1,ca} + (f_{1,c}^{-1})_a] + \\
&+ \int_c^0 w_{aa} dc - \rho^{-1} \sigma \left\{ \eta_a [(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_a = X(1 + u_a) - w_a w_a \\
&\left\{ \int_c^0 (u_a - X) u_c dc + \int_c^0 w_a w_c dc + \right. \\
&+ \rho^{-1} p_0 - \rho^{-1} \sigma (U_a \eta_{aa} - U_{aa} \eta_a) [(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{\frac{3}{2}} \Big\}_a + \\
&+ \rho^{-1} \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + p_{31,c} + V_n \right]. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Далее, используя (5.26), мы преобразуем (5.38) в сильно-нелинейное трех-скоростное уравнение:

$$\begin{aligned}
(1 + u_a)(u_a - c_1^2 u_{aa}) = &(\eta_{aa} - c_2^2 \eta_{aaa}) \int_c^0 f_1 dc - (\eta_a - c_3^2 \eta_{aa}) \int_c^0 f_{1,a} dc + \\
&+ g \left[(1 + u_a)^{-1} f_{1,c}^2 f_{1,ca} + (f_{1,c}^{-1})_a \right] + X(1 + u_a) - w_a w_a \\
&\left\{ \int_c^0 (u_a - X) u_c dc + \int_c^0 w_a w_c dc + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho^{-1} p_0 - \rho^{-1} \sigma (U_a \eta_{aa} - U_{aa} \eta_a) \left[(1 + U_a)^2 + \eta_a^2 \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_a + \\
& + \rho^{-1} \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + p_{31,c} + V_n \right]. \quad (5.39)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
c_1^2 &= g(1 + u_a)^3 f_{1,c}^{-1}, \\
c_3^2 &= \rho^{-1} \sigma \left(\int_c^0 f_{1,a} dc \right)^{-1} \left\{ [(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_a. \quad (5.40)
\end{aligned}$$

В (5.39) выражение для c_2^2 совпадает с (5.30). Если правая сторона уравнения (5.39) пренебрежимо мала, то оно дает обобщение уравнения Эйри (4.1):

$$u_{\pi} - g(1 + u_a)^3 f_{1,c}^{-1} u_{aa} = 0. \quad (5.41)$$

В отличие от уравнения Эйри, уравнение (5.41) описывает двухмерные волны.

В заключение заметим, что используя выражение (5.23) и уравнение (5.39), мы можем получить уравнение, зависящее только от u . Мы не останавливаемся здесь на этой версии уравнения (5.39).

5.4.3. Обобщение линейного уравнения Грина-Нагди

Используя (5.12) и (5.21), мы переписываем линеаризованное уравнение (5.20) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& u_{\pi} - \int_c^0 \left[(u_a) f_1 f_{1,c}^{-1} \right]_{aa} dc + \int_c^0 \left[h_a (f_2 - f_{2,c} f_1 f_{1,c}^{-1}) \hat{U} \right]_{aa} dc + \\
& + g \left[-(u_a + h_a f_{2,c} \hat{U}) f_{1,c}^{-1} \right]_a + \rho^{-1} \sigma \left[(u_a + h_a f_{2,c} \hat{U}) f_{1,c}^{-1} \right]_{aaa} = 0. \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Здесь мы положили $X = p_0 = 0$ и

$$\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + p_{31,c} + V_n = 0.$$

Покажем, что из (5.42) следует линейное одномерное уравнение Грина-Нагди [26]. Эти авторы рассмотрели случай мелкой воды. В этом случае

$$f_1(a, c) = ch^{-1} - 1, \quad f_2(a, c) = ch^{-1}, \quad u = \hat{U} = U \quad (5.43)$$

и (5.21) удовлетворяет граничным условиям (5.13) и (5.14). Затем (5.42) может быть переписано, как двухскоростное волновое уравнение

$$(hu)_{\pi\pi} - gh(hu)_{aa} - ch[(hu_{aa})_{\pi\pi} - c_2^2(c)(hu_{aa})_{aa}] = -h\rho^{-1}\sigma(h_{aa}u)_{aa} + \\ + 2ch[(h_a u_a)_{\pi\pi} - c_2^2(c)(h_a u_a)_{aa}] - 0.5hc^2 u_{\pi aa} + chh_{aa}, \quad (5.44)$$

здесь $c_2^2(c) = c^{-1}\rho^{-1}\sigma$. Видно, что скорость $c_2(c)$ определяется поверхностным натяжением и вертикальной координатой c .

Интегрируя уравнение (5.44) между 0 и h , сводим задачу к одномерной формулировке

$$u_{\pi\pi}(1 - 0.5h_{aa}h) - \frac{1}{3}h^2 u_{\pi aa} - h_a h u_{\pi a} = g(hu)_{aa} - \rho^{-1}\sigma(hu)_{aaa}. \quad (5.45)$$

Таким образом, мы получили уравнение, которое совпадает с уравнением (5.7) из [26].

Замечание. Волна считается длинной, а вода мелкой, если длина волны много больше глубины. *Теория длинных волн* основана на том, что горизонтальное смещение u независимо от c (см. (5.43)).

6. Осреднение по глубине. Модельные уравнения океанских волн

Природа довольствуется простотой и не терпит пышного великолепия излишних причин.

Коперник

Дабы рассмотреть этот вопрос научно, следует отбросить все указанные трудности и, сформулировав и доказав теоремы для случая, когда сопротивление отсутствует, применять их с теми ограничениями, какие подсказывает нам опыт.

Галилей

Достоинство теоретика состоит в умении, абстрагируясь от ряда деталей, создавать простые математические модели сложных явлений.

Валентин Валентинович Новожилов

Интегрируя (5.20) между 0 и h , мы сводим задачу к следующей одномерной (1D) формулировке

$$\begin{aligned} & \int_h^0 [(u_{tt} - X)(1 + u_a) + g\eta_a + w_{tt}w_a]dc = \\ & = - \int_h^0 \left\{ \int_c^0 (u_{tt} - X)u_c dc + \int_c^0 w_{tt}(1 + w_c)dc + \rho^{-1}p_0 \right. \\ & \left. - \rho^{-1}\sigma\eta_{aa}[(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{\frac{3}{2}} - \rho^{-1}\sigma(U_a\eta_{aa} - U_{aa}\eta_a)[(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{\frac{3}{2}} \right\} dc + \\ & + \rho^{-1} \int_h^0 \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \right] dc + \\ & + \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = h). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Предполагается, что $w = f_1(a, c)\eta + h_a f_2(a, c)\hat{U}$ (5.21).

Используя различные аппроксимации w по глубине, мы можем получить из (6.1) различные уравнения. Здесь рассматриваются два варианта аппроксимации. Сначала используется степенной закон изменения w по толщине воды. Соответствующие уравнения выведены в разделах 6.1–6.5. Затем в разделе 6.6 принимается, что w изменяется по глубине как гиперболический синус. В разделе 6.7 рассматриваются длинные волны.

6.1. Степенная аппроксимация вертикального смещения

Выражение (5.21) записывается в виде:

$$w = (c^n h^n - 1)\eta + h_a c^n h^n \hat{U}. \quad (6.2)$$

Видно, что (6.2) удовлетворяет граничному условию (5.13) на поверхности воды ($c = 0$). Если $c = h$, то (6.2) удовлетворяет граничному условию (4.14) для невязкой жидкости. Если $c = h$ и $\hat{U} = 0$, тогда (6.2) удовлетворяет граничному условию (4.15) для вязкой жидкости.

Пусть коэффициент n в (6.2) зависит от профиля дна, т.е. является функцией координаты a . Мы полагаем, что

$$n = \exp[0.5\pi(h_a - h\lambda^{-1})], \quad (6.3)$$

где λ — длина волны. В случае ровного дна $h_a = 0$ в (6.3). При этом n определяется только коэффициентом $h\lambda^{-1}$. Если $h \ll \lambda$ тогда n — очень малая величина, и вертикальное смещение существенно только вблизи свободной поверхности ($w \neq 0$ только около поверхности $c = 0$). Если $h \approx \lambda$ тогда $n \approx 1$, и мы получаем (5.43). Этот случай соответствует теории длинных волн.

В то же самое время уравнения (6.2) и (6.3) учитывают влияние наклона дна. Влияние h_a на n уменьшается, когда h возрастает. Однако возле берега влияние наклона может быть очень значительным.

Рис. 84 дает сравнение кривых $w\eta^{-1}$, вычисленных согласно классическому выражению для вертикального смещения частиц жидкости в слое воды конечной глубины [5, 6, 38]:

$$w = \eta [\sinh(2\pi\lambda^{-1}h_0)]^{-1} \times \sinh 2\pi\lambda^{-1}(h_0 - c) \quad (6.4)$$

и согласно выражениям, следующим из (6.2) и (6.3):

$$w = (c^n h_0^n - 1)\eta \quad \text{и} \quad n = \exp[0.5\pi(h_{0x} - h_0\lambda^{-1})]. \quad (6.5)$$

Здесь h_0 — глубина неподвижной жидкости. Выражения (6.5) являются версиями выражений (6.2) и (6.3), которые переписаны в координатах Эйлера. Для простоты мы игнорируем горизонтальное смещение частиц воды у дна, т.е. $\hat{U} = 0$ в (6.2).

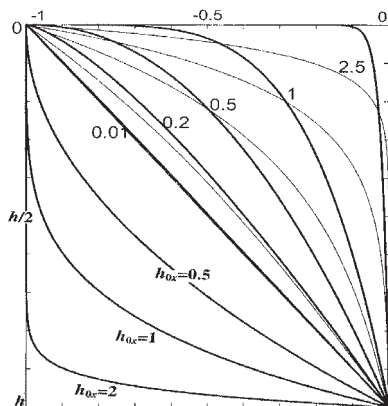


Рис. 84. Изменение безразмерного вертикального смещения w/η ($-1 \leq w/\eta \leq 0$) частиц воды, вычисленное для различных h_0/λ : 0.01 (мелководье), 0.2 (средняя глубина), 0.5, 1, 2.5 (глубокая вода) и h_{0x} ($h_{0x} = 0.5, 1$ и 2).

На рис. 84 толстые и тонкие линии 0.01, 0.2, 0.5, 1, 2.5 вычислены для плоского дна. Тонкие линии вычислены согласно линейному решению (6.4), а толстые линии вычислены согласно аппроксимации (6.5). Линии $h_{0x} = 0.5, 1$ и 2 вычислены для наклонного дна и длинных волн ($h_0 / \lambda = 0.05$). В случае глубокой воды ($h_0 / \lambda = 2.5$), w локализуется около поверхности воды. В случае крутого склона ($h_{0x} = 2$), практически, все частицы движутся вверх ($w = 0$ только около дна).

Рис. 84 показывает, что приближения (6.2) и (6.3) описывают результаты линейной теории (6.4), вплоть до $h\%$ ≈ 0.4 . В частности, так как для очень длинных волн (приливы и цунами) даже в открытой океанской воде $h\%$ ≈ 0.02 , то (6.2) и (6.3) являются для них хорошим приближением. Аппроксимация (6.2) и (6.3) является основой для теории следующего раздела этой главы.

6.2. Сильно-нелинейные волновые уравнения для случая степенной аппроксимации

Используя (5.12) и (6.2), мы запишем следующие выражения:

$$\eta = n^{-1} h^n c^{1-n} [(1+u_a)^{-1} - 1] h_a \hat{U}, \quad (6.6)$$

$$u = \int (1 + nc^{n-1} h^{-n} \eta + \psi_c)^{-1} da \quad a, \quad (6.7)$$

где $\psi = c^n h^{-n} h_a \hat{U}$. Подставим (6.2) в (6.1) и используем (6.6), (6.7). В результате, после простых, но длинных вычислений, можно получить следующее:

$$\begin{aligned} & \int_h^0 u_{tt} dc - gh\eta_a + n(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h^{n+1} (h^{-n})_a \eta \eta_{tt} \\ & - 2n^2 (n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h\eta_a \eta_{tt} + O(n+2)^{-1} h^{n+2} [(n+1)^{-1} h^{-n}]_a + \\ & + 0.5(2n+1)^{-1} h^{2n+1} (h^{-2n})_a \eta - (n+1)^{-1} h^{n+1} (h^{-n})_a \eta \\ & - 0.5(3n+1)(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h\eta_a \} \eta_{tt} + \\ & + [-0.5(n+3)(n+2)^{-1} (n+1)^{-1} h^2 - 0.5(3n+1)(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h\eta] \eta_{tta} = \\ & = - \int_h^0 \left[\int_c^0 (u_{tt} - X) u_c dc \right]_a dc - \int_h^0 u_{tt} u_a dc + \\ & + \rho^{-1} \sigma \left\{ \eta_{aa} [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} h(U_a \eta_{aa} - U_{aa} \eta_a) [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_a \\ & + \int_h^0 +_{1,a} dc + +_2 + \rho^{-1} \int_h^0 \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \right] dc \end{aligned}$$

$$-hX + X \int_h^0 u_a dc + h \rho^{-1} p_{0,a} + \rho^{-1} p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c = h). \quad (6.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \int_h^0 \psi_{1,a} dc = & \int_h^0 \{ h_a h^{-n} [-(n+1)^{-1} c^{n+1} \hat{U}_{tt} - 0.5 c^{2n} h^{-n} \eta \hat{U}_{tt} + \\ & + (c_n - 0.5 c^{2n} h^{-n}) \hat{U}_{tt} - 0.5 c^{2n} h_a h^{-n} \hat{U} \hat{U}_{tt}] \}_a dc. \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \psi_2 = & n(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h [h_a \hat{U}_{tt} \eta_a + h^n (h_a h^{-n} \hat{U})_a \eta_{tt}] + \\ & + (2n+1)^{-1} h_a [n h_a \eta - h^{n+1} (h_a h^{-n} \hat{U})_a] \hat{U}_{tt}. \end{aligned}$$

Видно, что $\int_h^0 +_{1,a} dc = 0$ и $+_2 = 0$, если $\hat{U} = 0$ или $h_a = 0$. В (6.8) имеются

члены, включающие η_a . Сгруппируем их вместе. Затем группируются члены, содержащие η_{tt} и η_{att} . В результате, после простых вычислений, получаем

$$\begin{aligned} \int_h^0 u_{tt} dc - A(\eta, n) \eta_a - C(n) \eta_{tt} + h \rho^{-1} \sigma \eta_{aa} \{ [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \}_a - B(\eta, n) \eta_{tta} + \\ + h \rho^{-1} \sigma \eta_{aaa} [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} = h \rho^{-1} \sigma \{ (U_a \eta_{aa} - U_{aa} \eta_a) [(1+U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \}_a \\ F_1(u) - \int_h^0 +_{1,a} dc + +_2 - hX + h \rho^{-1} p_{0,a} + \\ + \rho^{-1} \int_h^0 \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \right] dc + \\ + \rho^{-1} p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c = h), \quad (6.9) \end{aligned}$$

где

$$A(\eta, n) = gh + 0.5(4n^2 + 3n + 1)(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h \eta_{tt}, \quad (6.10)$$

$$B(\eta, n) = 0.5(n+1)^{-1} h [(n+3)(n+2)^{-1} h + (3n+1)(2n+1)^{-1} \eta], \quad (6.11)$$

$$C(n) = -h^2 (n+2)^{-1} [(n+1)^{-1}]_a + n(n+2)^{-1} (n+1)^{-1} h_a h, \quad (6.12)$$

$$F_1(u) = \int_h^0 \left[\int_c^0 (u_{tt} - X) u_c dc \right]_a dc + \int_h^0 u_{tt} u_a dc - X \int_h^0 u_a dc. \quad (6.13)$$

В (6.9) поднятие η является функцией u (см. (6.6)). Таким образом, мы получили сильно-нелинейное уравнение для продольного перемещения u . В нем член $\rho^{-1} p_{31}(a, t, c = 0)$ определяется трением на свободной поверхности. Последнее может быть значительным для волн, вызванных ветром. Член

$\rho^{-1} p_{31}(a, t, c = h)$ определяется трением о дно. Влияние этого члена на поверхностные волны может быть значительным в случае мелкой воды.

Нужно подчеркнуть, что в пределах точности аппроксимации (6.6), (6.7) уравнение (6.9) точно соответствует (5.10) — (5.12) и соответствующим граничным условиям. Это уравнение явно показывает взаимодействие сильной нелинейности, дисперсии, капиллярности и рельефа дна. Эффекты трения локализованы у свободной поверхности и около дна. Уравнение (6.9) учитывает также эффект вязкости воды.

6.2.1. Трехскоростные варианты сильно-нелинейного волнового уравнения

Рассмотрим следующие два варианта (6.9).

1. Используя (6.7), первый член в (6.9) переписываем в виде

$$\begin{aligned} \int_h^0 u_{tt} dc &= 2 \int_h^0 \int (1 + nc^{n-1} h^n \eta + \psi_c)^3 (nc^{n-1} h^n \eta_t + c_t)^2 dadc \\ &\quad - \int_h^0 \int (1 + nc^{n-1} h^n \eta + \psi_c)^2 + c_{tt} dadc \\ &\quad - \int_h^0 \left[\int (1 + nc^{n-1} h^n \eta + \psi_c)^2 nc^{n-1} h^n \eta_{tt} da \right] dc. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Последний интеграл в (6.14) можно представить как

$$\int \eta_{tt} \left[\int_{h^*}^0 (1 + nh^n \eta c^{n-1} + c_t)^2 nh^n c^{n-1} dc \right] da,$$

где величина h^* рассматривается как постоянная. После интегрирования принимается $h^* = h$. Пусть

$$f(\eta, n) = nh^n \int_{h^*}^0 (1 + nh^n \eta c^{n-1} + c_t)^2 c^{n-1} dc, \quad (6.15)$$

тогда последний член в (6.14) дает

$$\begin{aligned} &\int_h^0 \int (1 + nh^n \eta c^{n-1} + \psi_c)^2 nh^n c^{n-1} \eta_{tt} dadc = \\ &= \int \eta_{tt} f(\eta, n) da = \int \left(\int \eta_{tt} da \right)_a f(\eta, n) da = \\ &= f(\eta, n) \int \eta_{tt} da - \int \left(\int \eta_{tt} da \right) f_a(\eta, n) da. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Теперь, используя (6.16) и (6.14), перепишем (6.9) как трехскоростное волновое уравнение

$$f(\eta, n) \left[\int \eta_{tt} da - c_1^2(\eta, n) \eta_a \right] + C(\eta, n) [\eta_{tt} - c_3^2(\eta, n) \eta_{aa}] + \\ + B(\eta, n) [\eta_{tt} - c_2^2(\eta, n) \eta_{aaa}] = G(u, \eta, n), \quad (6.17)$$

где

$$G(u, \eta, n) = -h\rho^{-1} \sigma \left\{ (U_a \eta_{aa} - U_{aa} \eta_a) [(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_a \\ F_1(u) - hX + h\rho^{-1} p_{0,a} + \\ + \rho^{-1} \int_h^0 \left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \right] dc + \rho^{-1} p_{31}(a, t, c = 0) - \\ - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c = h) + \int_h^0 \int (1 + nc^{n-1} h^n \eta + c)^2 +_{ct} dadc \int \left(\int \eta_{tt} da \right) f_a(a) da \\ - 2 \int_h^0 \int (1 + nc^{n-1} h^n \eta + \psi_c)^3 (nc^{n-1} h^n \eta_t + c_{ct})^2 dadc \int_h^0 +_{1,a} dc +_2$$

и

$$c_1(\eta, n) = [gh + 0.5(4n^2 + 3n + 1)(n + 1)^{-1}(2n + 1)^{-1} h \eta_{tt}]^{0.5} [f(\eta, n)]^{0.5}, \quad (6.18)$$

$$c_2(\eta, n) = \sqrt{h\rho^{-1} \sigma [(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} B^{-1}(\eta, n)}, \quad (6.19)$$

$$c_3(\eta, n) = \sqrt{h\rho^{-1} \sigma \left\{ [(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} \right\}_a C^{-1}(n)}. \quad (6.20)$$

Подчеркнем, что $c_1(\eta, n)$, $c_2(\eta, n)$ и $c_3(\eta, n)$ имеют размерность скорости. Эти величины отличаются от c_1 , c_2 и c_3 (см. (5.29), (5.30) и (5.32)). Однако пара выражений $c_1(\eta, n)$ и c_1 , как и выражения $c_2(\eta, n)$ и c_2 и пара $c_3(\eta, n)$ и c_3 имеют подобные структуры. Скорость $c_1(\eta, n)$ может быть связана с гравитационными волнами, а скорости $c_2(\eta, n)$ и $c_3(\eta, n)$ с капиллярными волнами. Интересно, что скорости (6.19) и (6.20) зависят от местного наклона водной поверхности. Поэтому эти скорости могут изменяться вдоль волны.

Таким образом, можно считать, что уравнение (6.17) описывает распространение как гравитационных волн, которые могут быть очень длинными, так и капиллярных, очень коротких, волн, движущихся по поверхности длинной волны. В частности, скорость капиллярной волны, распространяющейся вдоль поверхности длинной гравитационной волны, зависит от местного наклона профиля гравитационной волны. Эта скорость может быть сильно уменьшена на крутом фронте гравитационной волны. Скорость $c_3(\eta, n)$ также зависит от наклона дна.

Замечание. Для достаточно длинных капиллярных волн [19] мы можем предположить, что $n = 1$ и $[(1 + U_a)^2 + \eta_a^2]^{3/2} = 1$. В этом случае (6.19) дает

$$c_2(\eta, 1) = \sqrt{3\rho^{-1}\sigma(h + \eta)^{-1}}. \quad (6.21)$$

Если $\eta < h$, тогда $c_2(\eta, 1) = \sqrt{3\rho^{-1}h^{-1}}$.

2. Теперь мы введем потенциал поднятия поверхности воды . :

$$\eta = . _a. \quad (6.22)$$

Тогда уравнение (6.17) дает следующее трехскоростное волновое уравнение

$$f(. _a, n)[_{aa} - c_1^2(. _a, n). _{aa}] + C(n)[. _{aa} - c_3^2(. _a, n). _{aaa}] + \\ + B(. _a, n)[_{aaa} - c_2^2(. _a, n). _{aaaa}] = G(u, . _a, n), \quad (6.23)$$

где, согласно (6.7), мы имеем

$$u = \int [1 + nc^{n-1}h^{-n}(. _a + h_a\hat{U})]^{-1} da _a. \quad (6.24)$$

Замечания. Таким образом, мы получили нелинейные трехскоростные волновые уравнения (6.17) и (6.23) для . _a. Они демонстрируют нелинейное взаимодействие различных физических эффектов: силы тяжести, нелинейности, дисперсии, поверхностного натяжения и вертикального движения частиц воды.

Скорость $c_1(\eta, n)$ (6.18) зависит от вертикального ускорения. Рассмотрим эту зависимость для случая длинных волн, когда $g = g_0$, $n = 1$ и $f(\eta, n) = 1$ в (6.18). В этом случае

$$c_1(\eta, 1) = \sqrt{g_0 h \left(1 + \frac{4}{3} g_0^{-1} \eta_{aa} \right)}. \quad (6.25)$$

Согласно (6.25) различные точки профиля и фронта волны имеют различные скорости. В частности, известно [9], что у стационарных бегущих волн вертикальное ускорение может достигать $0.5g_0$. В этом случае, мы имеем из (6.25), что $c_1(\eta, 1) \approx 1.3\sqrt{g_0 h}$. В целом, это не противоречит известным данным. Согласно экспериментам (см. рис. 5.5.3 из [38]) скорость длинных волн перед обрушением может увеличиться до $1.6\sqrt{g_0 h}$.

6.3. Резонансное взаимодействие гравитационных и капиллярных эффектов в поверхностной волне

Согласно теории, развитой выше, волна характеризуется существованием двух главных масштабов. Более длинный масштаб совпадает с доминирующей волной, для которой эффект силы тяжести более важен, чем поверхностное натяжение. Сжатый масштаб соответствует капиллярной ряби, для которой эф-

факт поверхностного натяжения более важен, чем сила тяжести. Для волнового анализа удобно рассмотреть волну как сумму доминирующей части и капиллярной ряби [39].

Рассмотрим доминирующую волну. Так как для длинных волн имеем, приблизительно $\eta_{aa} \approx g_0 h \eta_{aa}$, уравнение (6.25) дает

$$c_1(\eta, 1) \approx \sqrt{g_0 h \left(1 + \frac{4}{3} h \eta_{aa}\right)} \sqrt{g_0 h \left(1 + \frac{2}{3} h \eta_{aa}\right)}. \quad (6.26)$$

Таким образом, скорость волны связана с искривлением профиля волны. В системе координат, перемещающейся со скоростью $\sqrt{g_0 h}$, скорость волны:

$$c_1(\eta, 1) \approx \frac{2}{3} \sqrt{g_0 h} h \eta_{aa}. \quad (6.27)$$

Если волна имеет крутой фронт, то скорость $c_1(\eta, 1)$ может быть равной скорости (6.19) капиллярных волн. В этом случае, мы можем ожидать *резонансное* увеличение капиллярной ряби, идущей на поверхности длинной волны. Этот результат качественно согласуется с теорией Лонгета-Хиггинса (Longuet-Higgins) [40] и другими данными [40–44].

6.4. Линейное двухскоростное волновое уравнение и эффект дисперсии

Для невязкой жидкости, если трение исключено и $X = p_0 = 0$, уравнение (6.23) дает следующее двухскоростное уравнение для линейных волн

$$\begin{aligned} & \cdot \quad gh \quad_{aa} \quad 0.5(n+3)(n+1)^{-1}(n+2)^{-1} h^2 [(\cdot \quad_{aa})_{aa} \quad c_2^2(0, n)(\cdot \quad_{aa})_{aa}] = \\ & = -(n+2)^{-1} h^2 [(n+1)^{-1}]_a \cdot \quad_{aa}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где

$$c_2(0, n) = \sqrt{2\sigma h^{-1} \rho^{-1} (n+3)^{-1} (n+1)(n+2)}. \quad (6.29)$$

Получим дисперсионное уравнение для случая линейных поверхностных волн на переменной глубине. Принимаем, что $\Phi = \exp i(Ka - \omega t)$, где K является волновым числом и ω является угловой частотой. Тогда мы получаем следующее

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega^2 - ghk^2 + 0.5(n+3)(n+1)^{-1}(n+2)^{-1} h^2 [K^2 \quad c_2^2(0, n)K^4] \right\}^2 = \\ & = -K^2 \omega^4 (n+2)^{-2} h^4 \left\{ [(n+1)^{-1}]_a \right\}^2, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где $K = 2\pi\lambda^{-1}$. Здесь λ — длина поверхностной волны. Согласно (6.30), скорость волны $C = \omega / K$ — функция глубины, длины волны, поверхностного на-

тяжения и g . Рассмотрим предельные случаи длинных и очень коротких волн. Из (6.30) следует, что скорость длинных волн приблизительно $\sqrt{gh}$. Это гравитационные волны. Очень короткие волны имеют скорость, которая приблизительно равняется (6.29). Это капиллярные волны.

Таким образом, (6.30) устанавливает приближенные граничные значения для скоростей длинных и очень коротких волн на свободной поверхности воды. Если $n = 1$, $h_a = 0$ и $\sigma = 0$, уравнение (6.30) дает

$$C^2 = g h K^2 \left(1 - \frac{1}{3} h^2 K^2 + \frac{1}{9} h^4 K^4 \right).$$

Это выражение является хорошей аппроксимацией классического уравнения

$$C^2 = g K \tanh(Kh) \left(1 - \frac{1}{3} h^2 K^2 + \frac{2}{15} h^4 K^4 \right). \quad (6.31)$$

Поскольку $C = C_0 K^{-1}$, то из (6.30) мы можем найти, что

$$C \approx \sqrt{gh} \left\{ 1 + 0.5 \left[\sigma K^2 \rho^{-1} g^{-1} - \frac{1}{3} h^2 K^2 (1 + \sigma K^2 \rho^{-1} g^{-1}) \left(1 - \frac{1}{3} h^2 K^2 \right) \right] \right\}. \quad (6.32)$$

Положим здесь $h_a = 0$. Видно, что капиллярный эффект может быть значительным, если K очень мало. Для чисто гравитационных волн, когда глубина постоянна, уравнение (6.30) дает

$$C = \sqrt{gh} [1 + 2(n+3)(n+1)^{-1}(n+2)^{-1} \pi^2 h^2 \lambda^{-2}]^{0.5}. \quad (6.33)$$

Коэффициент $0.5(n+3)(n+1)^{-1}(n+2)^{-1}$ слабо зависит от n , если n мало. Например, если $h = 0.1$ и $n=1$, тогда $0.5(n+3)(n+1)^{-1}(n+2)^{-1} = \frac{1}{3}$. Если $h = 0.2$ и $n = 0.5$, тогда $0.5(n+3)(n+1)^{-1}(n+2)^{-1} = 0.4$. Если $h = 0.3$ и $n = 0$, тогда $0.5(n+3)(n+1)^{-1}(n+2)^{-1} = 0.75$.

Точность формулы (6.33) исследовалась также численно. Результаты показаны на рис. 85 и 86.

На рис. 85 сплошные линии вычислены согласно классическому выражению $C = \sqrt{gK^{-1} \tanh(Kh)}$, пунктирные линии вычислены согласно (6.33), где $n=1$. Кривые вычислены для $h\% = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$. Согласно рис. 85, выражение (6.33) хорошо описывает формулу $C = \sqrt{gK^{-1} \tanh(Kh)}$, если $h\% \leq 0.4$ и $n=1$.

Затем изучалось влияние n (6.3) на скорость волны. Результаты расчетов для $h\% = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$ и 1 представлены на рис. 86. Сплошные линии найдены согласно классическому выражению $C = \sqrt{gK^{-1} \tanh(Kh)}$, пунктирные

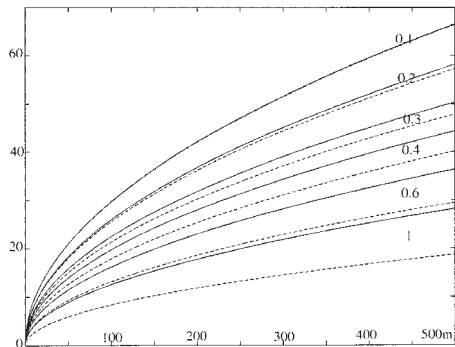


Рис. 85. Зависимость фазовой скорости C ($0 \leq C \leq 70$ мсек $^{-1}$) от длины волны λ ($0 \leq \lambda \leq 500$ м), рассчитанная для $n = 1$.

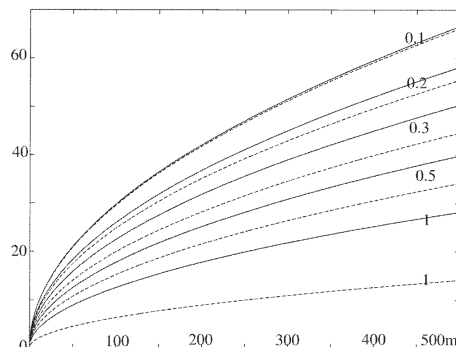


Рис. 86. Зависимость фазовой скорости C ($0 \leq C \leq 70$ мсек $^{-1}$) от длины волны λ ($0 \leq \lambda \leq 500$ м), рассчитанная для $n = \exp(-0.5\pi h\lambda)$.

линии вычислены согласно (6.33), где $n = \exp(-0.5\pi h\lambda)$ (6.3). Видно, что кривые рис. 85 хорошо соответствуют рис. 86, если $h\lambda \leq 0.4$.

Таким образом, из рис. 85 и 86 следует, что некоторые модели длинных волн (например, уравнение (6.28), если в нем $n = 1$, или уравнение (5.45)) достаточно хорошо описывают дисперсионные свойства поверхностных волн, если их амплитуда мала и приближенно $h\lambda \leq 0.4$. В частности, если глубина моря не превышает 100 м, то эти модели позволяют рассмотреть волны длиной не менее 220–250 м. Такие волны достаточно часто возникают в мелких морях. В частности, к ним относится экстремальная «Новогодняя» волна, замеченная в Северном море и описанная кратко в разделе 3.5.

6.5. Кубические и квадратные нелинейные уравнения для гравитационных волн на воде умеренной глубины

В этом разделе рассматриваются слабо-нелинейные волны на воде умеренной глубины.

Кубическое нелинейное волновое уравнение для η . Мы принимаем, что η и η^2 в (6.7). Тогда, приближенно,

$$u = -nc^{n-1}h^{n-1}\eta + (nc^{n-1}h^{n-1})^2 \int_a^2 da - (nc^{n-1}h^{n-1})^3 \int_a^3 da + \dots \quad (6.34)$$

Здесь $\eta = \eta_a$ (6.22). Мы полагаем, что функция η и ее производные имеют один и тот же порядок. Затем мы рассматриваем уравнение (6.9), учитывая (6.34) и принимая во внимание линейные, квадратные и кубические члены. Первый член в (6.9) может быть переписан в виде:

$$\int_h^0 u_{tt} dc = \dots - (2n-1)^{-1} h^{2n-1} (nh^{-n})^2 \int (\dots)_a da + \\ + (3n-2)^{-1} h^{3n-2} (nh^{-n})^3 \int (\dots)_a da + \dots \quad (6.35)$$

Пусть глубина постоянная и $\sigma=0$, $\hat{U}=0$, $X=0$. В этом случае, для моделей невязкой воды, из (6.9) следует, что

$$\dots - (2n-1)^{-1} h^{-1} n^2 \int (\dots)_a da + (3n-2)^{-1} h^{-2} n^3 \int (\dots)_a da \\ - [gh + 0.5(4n^2 + 3n + 1)(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h \dots]_{aa} \\ - 0.5(n+1)^{-1} h[(n+3)(n+2)^{-1} h + (3n+1)(2n+1)^{-1} \dots]_{aaa} = \\ = F_1(u) + \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=0) - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=h) + h \rho^{-1} p_{0,a}. \quad (6.36)$$

Здесь

$$F_1(u) = \int_h^0 \left[\int_c^0 (u_{aa} u_c dc + u_{tt} u_{ac} dc) dc + u_{tt} u_a \right] dc. \quad (6.37)$$

Рассмотрим $F_1(u)$. Используя (6.34), мы находим, что

$$u_{aa} u_c + u_{tt} u_{ac} = n^2 (n-1) h^{-2n} (\dots)_a c^{2n-3} \\ n^3 (n-1) h^{-3n} \left[\left(\int (\dots)_a da \right)_{tt} + 2 \dots \left(\int (\dots)_a da \right) \right]_a c^{3n-4}, \quad (6.38)$$

$$u_{tt} u_a = c^{2n-2} n^2 h^{-2n} \dots - c^{3n-3} n^3 h^{-3n} \left[\left(\int (\dots)_a da \right)_{tt} \dots + \dots \right]. \quad (6.39)$$

Подстановка (6.38) и (6.39) в (6.37) дает

$$F_1(u) = (2n-1)^{-1} h^{-1} n^2 [2(\dots)_a \dots + \\ + (3n-2)^{-1} h^{-2} n^3 \left(\int (\dots)_a da \right)_{tt} + \\ + \dots - 3 \left[\left(\int (\dots)_a da \right)_{tt} \dots + 2 \dots \int (\dots)_a da \right]_a \}. \quad (6.40)$$

Теперь уравнение (6.36) может быть преобразовано в следующее кубическое нелинейное волновое уравнение

$$\dots gh_{aa} - 0.5(n+1)^{-1} h(n+3)(n+2)^{-1} h \dots + (2n-1)^{-1} h^{-1} n^2 [2 \dots + \dots - \\ \int (\dots)_a da] - 0.5(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h[(4n^2 + 3n + 1) \dots + (3n+1) \dots] = \\ = (3n-2)^{-1} h^{-2} n^3 \int (\Phi_a^3)_a da + \left(\int (\dots)_a da \right)_{tt} \dots + \\ + \dots - 3 \left[\left(\int (\dots)_a da \right)_{tt} \dots + 2 \dots \int (\dots)_a da \right]_a \} + \\ + \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=0) - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=h) + h \rho^{-1} p_{0,a}. \quad (6.41)$$

Это уравнение становится сингулярным, если $n > 0.5$ или $n > 0.66$.

Квадратное нелинейное волновое уравнение. Пусть кубические нелинейные члены в (6.41) пренебрежимо малы. В этом случае (6.41) дает

$$\begin{aligned} & \cdot_{tt} gh_{aa} 0.5(n+1)^{-1} h(n+3)(n+2)^{-1} h_{ttaa} + \\ & + (2n-1)^{-1} h^{-1} n^2 [2 \cdot_{tta} + \cdot_{tt} \cdot_a \int (\cdot_a^2)_t da] \\ & - 0.5(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} h[(4n^2+3n+1) \cdot_{att} h_{aa} + (3n+1) \cdot_a \cdot_{ttaa}] = \\ & = \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=0) - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=h) + h \rho^{-1} p_{0,a}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Рассмотрим квадратичные волны, распространяющиеся в одном направлении, принимая, что

$$\cdot = (r), r = t - C^{-1} a \quad (6.43)$$

и $C_a = 0$. Тогда мы имеем

$$(\cdot)_{tt} = (\cdot)_{rr}, (\cdot)_a = -C^{-1} (\cdot)_r, (\cdot)_{tt} = (\cdot)_{rr}, (\cdot)_{aa} = C^2 (\cdot)_{rr}. \quad (6.44)$$

В этом случае уравнение (6.42) дает

$$\begin{aligned} & \cdot_{rr} (1 ghC^2) 0.5(n+1)^{-1} (n+3)(n+2)^{-1} h^2 C^2 \cdot_{rrrr} + \\ & + 0.5(n+1)^{-1} (2n+1)^{-1} hC^3 [(4n^2+3n+1) \cdot_{rrr} h_{rr} + (3n+1) \cdot_r \cdot_{rrr}] \\ & (2n-1)^{-1} h^{-1} n^2 C^{-1} (2 \cdot_{rrr} + \cdot_{rr} \cdot_r + 2 \cdot_r \cdot_{rr}) = \\ & = \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=0) - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=h) - C^{-1} h \rho^{-1} p_{0,r}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Заключение по разделам 6.1–6.5. Мы получили и обсудили набор уравнений, описывающих волны на воде умеренной глубины. В частности, эти нелинейные волновые уравнения могут описывать волны в мелких морях.

Из рис. 86 следует, что если $h\%^{-1} \approx 0.4$, то приближение (6.2) и (6.3) и представленные уравнения не справедливы. Этот случай рассматривается в следующем разделе.

6.6. Нелинейное уравнение для гравитационных волн в океане конечной глубины

В разделе 6.4 мы показали, что в случае модели длинных волн, при которой $n = 1$, развитая теория может описать волны в мелких морях и прибрежных зонах океана. Вместе с тем, очевидно, что линейная аппроксимация по глубине, определяемая равенством $n = 1$, никак не соответствует сложным прибрежным течениям воды под ее поверхностью (рис. 83). Из этого можно сделать вывод, что влияние свойств подповерхностной жидкости на волнение много меньше влияния самой поверхности. Т.е. поведение жидкой поверхности напоминает поведение струны. Этот вывод нам удобно переформулировать как утверждение, что влияние нелинейных членов, изменяющихся с глубиной в управляющих уравнениях, много меньше влияния нелинейных

членов, зависящих только от горизонтальной координаты. На этом положении основан вывод уравнений настоящего раздела.

В случае $h\% \approx 0.4$ мы будем игнорировать изменение глубины, капиллярный эффект и использовать невязкую модель воды. Однако донное и поверхностное трение учитывается. Уравнение (6.1) переписываем в виде:

$$\begin{aligned} & \int_h^0 [(u_{tt} - X)(1 + u_a) + g\eta_a + w_{tt}w_a]dc = \\ & = - \int_h^0 \left\{ \int_c^0 (u_{tt} - X)u_c dc + \int_c^0 w_{tt}(1 + w_c)dc + \rho^{-1}p_0 \right\}_a dc + \\ & + \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = h). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Полагаем, что $w = f_1(c)\eta$ (5.26). Пусть $f_1(c)$ изменяется согласно гиперболическому синусу. В этом случае

$$w = \eta\beta \sinh K(h - c). \quad (6.47)$$

Здесь $\beta = -\sinh^{-1}(Kh)$ и $K = 2\pi\lambda^{-1}$. Таким образом, рассматривается случай фиксированной длины волны. Затем, используя (6.47), мы находим следующие выражения для членов в уравнении (6.46), которые зависят от w

$$\int_h^0 \int_c^0 w_{tt}dc dc = \beta K^{-1}(h \cosh Kh - K^{-1} \sinh Kh)\eta_{tta}, \quad (6.48)$$

$$\int_h^0 w_a w_{tt}dc = -K^{-1}\beta^2(0.25 \sinh 2Kh - 0.5Kh)\eta_a \eta_{tt}, \quad (6.49)$$

$$\int_h^0 \left\{ \int_c^0 w_{tt}w_c dc \right\}_a dc = \beta^2(0.125K^{-1} \sinh 2Kh - 0.25h \cosh 2Kh)(\eta\eta_{tt})_a. \quad (6.50)$$

Поскольку $1 = (1 + w_c)(1 + u_a)$ (5.12), мы можем приближенно записать

$$\begin{aligned} u &= K\beta \cosh K(h - c) \int \eta da + (K\beta)^2 \cosh^2 K(h - c) \int \eta^2 da + \\ &+ (K\beta)^3 \cosh^3 K(h - c) \int \eta^3 da \end{aligned} \quad (6.51)$$

и

$$\begin{aligned} \int_h^0 u_{tt}dc &= -\beta \sinh Kh \int \eta_{tt} da - K\beta^2[0.25 \sinh 2Kh + 0.5Kh] \int (\eta^2)_{tt} da + \\ &+ (K\beta)^3 \int_h^0 \cosh^3 K(h - c)dc \int (\eta^3)_{tt} da, \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\int_h^0 u_{tt} u_a dc = -K\beta^2 [0.25 \sinh 2Kh + 0.5Kh] \int \eta_{tt} da \int \eta_a da +$$

$$+ (K\beta)^3 \int_h^0 \cosh^3 K(h-c) dc \left[\int (\eta^2)_{tt} da \int \eta_a da + \int \eta_{tt} da \int (\eta^2)_a da \right], \quad (6.53)$$

$$\int_h^0 \left\{ \int_c^0 u_{tt} u_c dc \right\}_a da = 0.25(K\beta)^2 (-h \cosh 2Kh + 0.5K^{-1} \sinh 2Kh) \left(\int \eta_{tt} da \int \eta da \right)_a +$$

$$+ 0.333(K\beta)^3 \int_h^0 [\cosh^3 Kh - \cosh^3 K(h-c)] dc$$

$$\times \left[\int (\eta^2)_{tt} da \int \eta da + 2 \int \eta_{tt} da \int \eta^2 da \right]_a. \quad (6.54)$$

В (6.52)–(6.54)

$$\int_h^0 \cosh^3 K(h-c) dc = 0.333K^{-1} \sinh Kh (\cosh^2 Kh + 2). \quad (6.55)$$

Подставляя (6.48)–(6.54) в (6.46), мы получаем следующее уравнение

$$\int \eta_{tt} da - gh\eta_a + \eta_{tta}\beta K^{-2} (Kh \cosh Kh - \sinh Kh)$$

$$- \frac{1}{4} K\beta^2 (\sinh 2Kh + 2Kh) \left[\int (\eta^2)_{tt} da + \eta \int \eta_{tt} da \right] - \frac{1}{9} K^2 \beta^3 \sinh Kh (\cosh^2 Kh + 2) \times$$

$$\left[2\eta \int (\eta^2)_{tt} da + \eta^2 \int \eta_{tt} da + 3 \int (\eta^3)_{tt} da - (\eta^2)_{tt} \int \eta da - 2\eta_{tt} \int \eta^2 da \right]$$

$$+ \frac{1}{4} \beta^2 (K^{-1} \sinh 2Kh - 2h) \eta_a \eta_{tt} =$$

$$= \frac{1}{8} K\beta^2 (2Kh \cosh 2Kh - \sinh 2Kh) \left(\int \eta_{tt} da \int \eta da \right)_a +$$

$$+ \frac{1}{3} K^3 \beta^3 h \cosh^3 Kh \left[\int (\eta^2)_{tt} da \int \eta da + 2 \int \eta_{tt} da \int \eta^2 da \right]_a +$$

$$+ \frac{1}{8} \beta^2 (2h \cosh 2Kh - K^{-1} \sinh 2Kh) (\eta \eta_{tt})_a +$$

$$+ \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=0) - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c=h) + \rho^{-1} h p_{0,a}. \quad (6.56)$$

Напомним, что решение (6.47) аппроксимирует изменение w вдоль глубины согласно гиперболическому синусу. Таким образом, влияние нелинейности на это изменение не учитывается.

Дисперсионное уравнение. Рассмотрим следующую линейную версию уравнения (6.56):

$$\int \eta_{tt} da - gh\eta_a + \eta_{aa}\beta K^{-1}(h \cosh Kh - K^{-1} \sinh Kh) = 0. \quad (6.57)$$

Мы положим в (6.57), что $p_0 = 0$. Пусть

$$\eta = \exp i(Ka - \omega t). \quad (6.58)$$

В этом случае уравнение (6.57) дает классическое выражение

$$\omega^2 = gK \tanh(Kh). \quad (6.59)$$

(6.59) может быть записано через скорость волны C как

$$C^2 = gK^{-1} \tanh(Kh). \quad (6.60)$$

Пусть для глубокого океана $kh \gg 1$, тогда зависимость (6.60) преобразуется к

$$C = \sqrt{gK^{-1}}. \quad (6.61)$$

Мы получили хорошо известный результат, согласно которому фазовая скорость на глубокой воде пропорциональна квадратному корню из длины волны.

6.6.1. Кубические и квадратные нелинейные уравнения для гравитационных волн в глубоком океане

Рассмотрим нелинейные члены в (6.56), полагая, что $Kh \gg 1$. Легко увидеть, что для этого случая

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} K^2 \beta^3 \sinh Kh (\cosh^2 Kh + 2) \times \\ & \left[2\eta \int (\eta^2)_{tt} da + \eta^2 \int \eta_{tt} da + 3 \int (\eta^3)_{tt} da - (\eta^2)_{tt} \int \eta da - 2\eta_{tt} \int \eta^2 da \right] \times \\ & \left(\left(\frac{1}{3} K^3 \beta^3 h \cosh^3 Kh \left[\int (\eta^2)_{tt} da \int \eta da + 2 \int \eta_{tt} da \int \eta^2 da \right]_a \right. \right. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Затем рассмотрим квадратные члены. Удобно ввести безразмерные независимые переменные

$$a^* = a/h, \quad t^* = \sqrt{gh}t/h = Ct/h. \quad (6.63)$$

Теперь могут быть введены безразмерные выражения для членов в уравнении (6.56). Например,

$$\begin{aligned} \eta^* &= \eta_0 A, \quad \eta_a = Ah^{-1} \frac{\partial \eta^*}{\partial a^*}, \\ \eta_{tt} &= Ah^{-1} C \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*}, \quad \eta_{tt} = \frac{AC^2 \partial \eta^* / A}{h^2 \partial (Ct/h)^2} = Ah^{-2} C^2 \eta_{tt}^*. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Здесь A — произвольная постоянная, имеющая размерность длины. Используя новые переменные, мы перепишем квадратные нелинейные члены уравнения (6.56) в виде:

$$-\frac{1}{4}Kh^{-1}\beta^2A^2C^2(\sinh 2Kh + 2Kh)\left[\int(\eta^2)_{tt}da + \eta\int\eta_{tt}da\right], \quad (6.65)$$

$$\frac{1}{4}K^{-1}h^{-3}\beta^2A^2C^2(\sinh 2Kh - 2Kh)\eta_a\eta_{tt}, \quad (6.66)$$

$$\frac{1}{4}Kh^{-1}\beta^2A^2C^2(Kh \cosh 2Kh - 0.5 \sinh 2Kh)\left(\int\eta_{tt}da\int\eta da\right)_a, \quad (6.67)$$

$$\frac{1}{8}K^{-1}h^{-3}A^2C^2\beta^2[2Kh \cosh 2Kh - \sinh 2Kh](\eta\eta_{tt})_a. \quad (6.68)$$

Для простоты мы опустили верхние индексы (звездочки) в (6.65)–(6.68). Легко видеть, что для глубокой воды выражение (6.67) много больше, чем (6.65), (6.66) и (6.68).

Теперь, учитывая только наиболее значимые квадратные и кубические нелинейные члены, мы перепишем уравнение (6.56) в виде:

$$\begin{aligned} &\int\eta_{tt}da - gh\eta_a + \eta_{tta}\beta K^{-1}(h \cosh Kh - K^{-1} \sinh Kh) = \\ &= \frac{1}{4}K^2\beta^2h \cosh 2Kh\left(\int\eta_{tt}da\int\eta da\right)_a + \\ &+ \frac{1}{3}K^3\beta^3h \cosh^3 Kh\left[\int(\eta^2)_{tt}da\int\eta da + 2\int\eta_{tt}da\int\eta^2da\right]_a + \\ &+ \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = h) + \rho^{-1}hp_{0,a}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Поскольку $Kh \gg 1$, мы полагаем, что $\tanh Kh \rightarrow 1$. В этом случае (6.69) дает

$$\begin{aligned} &\int\eta_{tt}da - gh\eta_a - hK^{-1}\eta_{tta} = \frac{1}{2}hK^2\left(\int\eta_{tt}da\int\eta da\right)_a - \\ &- \frac{1}{3}hK^3\left[\int(\eta^2)_{tt}da\int\eta da + 2\int\eta_{tt}da\int\eta^2da\right]_a + \\ &+ \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = h) + \rho^{-1}hp_{0,a}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Далее используем (6.22) и переписываем уравнение (6.70) в виде:

$$\begin{aligned} &\eta_{tt} - gh - \eta_{tta} - hK^{-1}\eta_{tta} = \frac{1}{2}hK^2(\eta_{tt}\eta)_a - \\ &- \frac{1}{3}hK^3\left[\int(\eta^2)_{tt}da + 2\int\eta_{tt}\eta^2da\right]_a + \\ &+ \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}p_{31}(a, t, c = h) + \rho^{-1}hp_{0,a}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Квадратная нелинейная версия этого уравнения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \cdot_{aa} - gh_{aa} - hK^{-1} \cdot_{aa} = \frac{1}{2} hK^2 (\cdot_{aa})_a + \\ & + \rho^{-1} p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1} p_{31}(a, t, c = h) + \rho^{-1} h p_{0,a}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Замечание. В разделах 6.2–6.6 рассмотрены упрощенные версии уравнения (6.1), которые описывают нелинейные волны для различных глубин. Показано, что уравнения (6.17), (6.23) и (6.41), (6.42) претендуют на описание волн, для которых $h\%^{-1} < 0.4$. В противоположность уравнения (6.56), (6.71) и (6.72) выведены для случая глубокого океана. Напомним, они не учитывают нелинейность вертикального движения частиц по глубине и справедливы только для определенного волнового числа K . В случае нескольких поверхностных волн уравнения для глубокой воды надо уточнять. Это сделано в части III книги (подраздел 16.2.2) при моделировании катастрофических волн типа «Три сестры» двумя независимыми гармоническими резонансными волнами.

6.7. Теория длинных волн для идеальной и вязкой моделей жидкости

Теория длинных волн, часто также называемая теорией мелкой воды, традиционно излагается в терминах Эйлеровых координат. Здесь, следуя главе 5, мы развиваем одномерный вариант теории, используя Лагранжевы переменные.

6.7.1. Сильно-нелинейные волновые уравнения

Модель идеальной жидкости. Для идеальной (невязкой) жидкости уравнение (5.20) дает

$$\begin{aligned} & (u_{aa} - X)(1 + u_a) + g\eta_a + w_{aa} w_a = \\ & = - \left[\int_c^0 (u_{aa} - X) u_c dc + \int_c^0 w_{aa} (1 + w_c) dc + \rho^{-1} p_0 - \rho^{-1} \sigma \eta_{aa} \right]_a. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Уравнение (6.73) не учитывает трение. Выразим неизвестные η и w через u . Поскольку $n = 1$ и $\hat{U} = u$, то уравнение (6.2) принимает вид:

$$w = (ch^{-1} - 1)\eta + h_a ch^{-1} u. \quad (6.74)$$

Затем, используя (5.12) и (6.74), мы можем записать следующее выражение

$$\eta = h[(1 + u_a)^{-1} - 1] - h_a u, \quad (6.75)$$

а (6.74) переписывается так:

$$w = (c - h)[(1 + u_a)^{-1} - 1] + h_a u. \quad (6.76)$$

Подставляя (6.75) и (6.76) в (6.73), мы получаем двухмерное волновое уравнение для сильно-нелинейных длинных волн

$$\begin{aligned}
& (u_{\pi} - X)(1 + u_a) - gh(1 + u_a)^2 u_{aa} + gh_a [(1 + u_a)^{-1} - 1] gh_{aa} u - gh_a u_a = \\
& = - \int_c^0 \left\{ (c - h) [(1 + u_a)^{-1}]_{\pi} + h_a u_{\pi} \right\}_a dc \\
& \int_c^0 \left\{ (c - h) [(1 + u_a)^{-1}]_{\pi} + h_a u_{\pi} \right\}_a \left\{ (c - h) [(1 + u_a)^{-1} - 1] + h_a u \right\} dc \\
& \int_c^0 \left\{ (c - h) [(1 + u_a)^{-1}]_{\pi} + h_a u_{\pi} \right\} \left\{ (c - h) [(1 + u_a)^{-1} - 1] + h_a u \right\}_a dc \\
& \left\{ (c - h) [(1 + u_a)^{-1}]_{\pi} + h_a u_{\pi} \right\} \left\{ (c - h) [(1 + u_a)^{-1} - 1] + h_a u \right\}_a \\
& - \rho^{-1} p_{0,a} + \rho^{-1} \sigma \eta_{aaa}. \tag{6.77}
\end{aligned}$$

Интегрированием (6.77) между 0 и h уравнение сводится к следующей одномерной формулировке:

$$\begin{aligned}
& u_{\pi}(1 + u_a) - gh(1 + u_a)^2 u_{aa} \\
& - g(h_a u_a + h_{aa} u) + gh_a [(1 + u_a)^{-1} - 1] - \frac{1}{3} h^2 (1 + u_a)^{-1} [(1 + u_a)^2 u_{aa}]_{\pi} \\
& - \frac{2}{3} h^2 (1 + u_a)^2 [(1 + u_a)^{-1}]_{\pi} u_{aa} + hh_a [(1 + u_a)^{-1}]_{\pi} (1 + u_a)^{-1} \\
& - 0.5h(1 + u_a)^{-1} (h_{aa} u + h_a u_a)_{\pi} - 0.5h [(1 + u_a)^{-1}]_{\pi} (h_a + h_{aa} u + h_a u_a) + \\
& + h_a u_{\pi} [-h_a (1 + u_a)^{-1} + h(1 + u_a)^2 u_{aa} + h_a (1 + u_a) + h_{aa} u] \\
& - \rho^{-1} \sigma^0 h_{aaa} [(1 + u_a)^{-1} - 1 - 3u_a] + 6h_a (1 + u_a)^3 u_{aa} - 6h(1 + u_a)^4 u_{aa}^2 + \\
& + 6h(1 + u_a)^3 u_{aaa} - 3h_{aa} - 3h_{aa} (1 + u_a)^2 u_{aa} \\
& - [3(1 + u_a)^2 + 1] h_a u_{aaa} - h(1 + u_a)^2 u_{aaaa} - h_{aaaa} u \} \\
& - X(1 + u_a) + \rho^{-1} p_{0a} = 0. \tag{6.78}
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали то, что

$$\begin{aligned}
& \eta_{aaa} = \left\{ h[(1 + u_a)^{-1} - 1] - h_a u \right\}_{aaa} = h_{aaa} [(1 + u_a)^{-1} - 1 - 3u_a] + \\
& + [-3h_{aa} - 3h_{aa} (1 + u_a)^2 + 6h_a (1 + u_a)^3 u_{aa} - 6h(1 + u_a)^4 u_{aa}^2 + 6h(1 + u_a)^3 u_{aaa}] u_{aa} \\
& - [3(1 + u_a)^2 + 1] h_a u_{aaa} - h(1 + u_a)^2 u_{aaaa} - h_{aaaa} u.
\end{aligned}$$

Уравнение (6.78) учитывает рельеф дна и демонстрирует сильно-нелинейное взаимодействие различных физических эффектов: силы тяжести, дисперсии, капиллярности и вертикального движения частиц воды. В пределах предположения мелкой волны (6.74) и техники усреднения по глубине это

уравнение точно соответствует уравнениям (5.8), (5.9), (5.12) и граничным условиям (5.13), (5.14). Поскольку

$$[(1+u_a)^{-1}]_{tt} = 2(1+u_a)^{-3}u_{at}^2 - (1+u_a)^{-2}u_{att},$$

$$[(1+u_a)^{-2}u_{aa}]_{tt} = [6(1+u_a)^{-1}u_{at}^2u_{aa} - 2u_{att}u_{aa} - 4u_{at}u_{aat} + (1+u_a)u_{aaat}](1+u_a)^{-3},$$

мы можем переписать уравнение (6.78) в виде трехскоростного сильно-нелинейного волнового уравнения

$$\begin{aligned} (1+u_a)(u_{tt} - C_1^2 u_{aa}) - \frac{1}{3}h^2(1+u_a)^{-3}(u_{aat} - C_2^2 u_{aaa}) - hh_a(1+u_a)^{-3}(u_{att} - C_3^2 u_{aaa}) \\ - 0.5hh_{aa}(1+u_a)^{-1}u_{tt} - g(h_a u_a + h_{aa}u) + gh_a[(1+u_a)^{-1} - 1] + \frac{4}{3}h^2(1+u_a)^{-4}u_{at}u_{aat} + \\ + hh_a[2(1+u_a)^{-2} - 1](1+u_a)^{-2}u_{at}^2 - 0.5hh_{aa}[2(1+u_a)^{-3}u_{at}^2 - (1+u_a)^{-2}u_{att}]u + \\ + h_a u_{tt}[h(1+u_a)^{-2}u_{aa} - h_a(1+u_a)^{-1} + h_a(1+u_a) + h_{aa}u] \\ - \rho^{-1}\sigma h_{aaa}[(1+u_a)^{-1} - 1 - 3u_a] + \rho^{-1}\sigma h_{aaa}u - X(1+u_a) + \rho^{-1}p_{0,a} = 0. \quad (6.79) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_1^2 = C_0^2(1+u_a)^{-3} + 3\frac{1}{3}h^2(1+u_a)^{-6}u_{at}^2 - \frac{4}{3}h^2u_{att}(1+u_a)^{-5} \\ - 3h_{aa}\rho^{-1}\sigma[1 + (1+u_a)^{-2}](1+u_a)^{-1} + \\ + 6\rho^{-1}\sigma[h_a u_{aa} - h(1+u_a)^{-1}u_{aa}^2 + hu_{aaa}](1+u_a)^{-4}, \quad (6.80) \end{aligned}$$

$$C_2^2 = 3\rho^{-1}\sigma h^{-1}(1+u_a), \quad (6.81)$$

$$C_3^2 = \rho^{-1}\sigma h^{-1}(1+u_a)^3[3(1+u_a)^{-2} + 1], \quad (6.82)$$

где $C_0 = \sqrt{gh}$ — скорость бесконечно малых длинных линейных волн.

Модель вязкой жидкости. Известно, что и амплитуда и форма прибрежных волн зависят от трения воды о дно. Однако математически описать эффект такого трения достаточно трудно. Обычно для этого в волновое уравнение вводится дополнительный член, который определяется, исходя из экспериментальных данных [38, 39, 45]. Здесь используется несколько иной подход, а именно, следуя главам 4 и 5 этой части книги, мы используем компоненты тензора напряжения, чтобы описать вязкие эффекты. В частности, напомним, что члены

$$\rho^{-1}\left[\int_c^0 (p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + p_{31,c} + V_n\right] \quad (6.83)$$

учитывают вязкие эффекты в (2.20). Используя (6.83), перепишем (6.79) в виде:

$$(1+u_a)(u_{tt} - C_1^2 u_{aa}) - \frac{1}{3}h^2(1+u_a)^{-3}(u_{aat} - C_2^2 u_{aaa}) - hh_a(1+u_a)^{-3}(u_{att} - C_3^2 u_{aaa})$$

$$\begin{aligned}
& -0.5hh_{aa}(1+u_a)^{-1}u_{\pi} - g(h_a u_a + h_{aa}u) + gh_a[(1+u_a)^{-1} - 1] + \frac{4}{3}h^2(1+u_a)^{-4}u_{at}u_{aat} + \\
& + hh_a[2(1+u_a)^{-2} - 1](1+u_a)^{-2}u_{at}^2 - 0.5hh_{aa}[2(1+u_a)^{-3}u_{at}^2 - (1+u_a)^{-2}u_{aat}]u + \\
& + h_a u_{\pi}[h(1+u_a)^{-2}u_{aa} - h_a(1+u_a)^{-1} + h_a(1+u_a) + h_{aa}u] \\
& - \rho^{-1}\sigma h_{aaa}[(1+u_a)^{-1} - 1 - 3u_a] + \rho^{-1}\sigma h_{aaaa}u - X(1+u_a) + \rho^{-1}p_{0,a} + \\
& + \rho^{-1}h^{-1}\int_h^0\int_c^0(p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \Big] dc + \\
& + \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=h) = 0. \tag{6.84}
\end{aligned}$$

Уравнение (6.84) учитывает как трение на поверхности и дне океана, так и вязкие свойства самой воды. (6.84) — основное уравнение нашей теории длинных волн. Основное ограничение этой модели определяется тем, что горизонтальное смещение u не меняется по толщине воды.

Анализ скорости волны. Мы подчеркиваем, что коэффициенты C_1 , C_2 и C_3 имеют размерность скорости. Скорость C_1 определяется гравитацией и поверхностным натяжением, поэтому она может быть связана с капиллярно-гравитационными волнами. Скорости C_2 и C_3 определяются поверхностным натяжением, поэтому они показывают, что на поверхности могут образоваться чисто капиллярные волны. Величина C_1 зависит от кривизны и наклона поверхности воды. Выражения C_2 и C_3 дают $C_3^2 = C_2^2[1 + \frac{1}{3}(1+u_a)^2]$.

Если $1 + \frac{1}{3}(1+u_a)^2$, тогда $C_3 > C_2$. С другой стороны, используя (6.75), мы можем записать: $C_2^2 = 3\rho^{-1}\sigma h^{-1}(1 + h^{-1}h_a u + h^{-1}\eta)^{-1}$. Видно, что C_2 уменьшается, когда амплитуда волны увеличивается. Этот результат качественно согласуется с результатом Крапера (Crapper) [46]. Стоит отметить появление члена $hh_a(1+u_a)^{-3}(u_{aat} - C_3^2 u_{aaa})$ в (6.79). Этот член уменьшается до нуля, когда $h_a = 0$, поэтому, мы думаем, что этот член определяет местные капиллярные волны, которые могут возникать при набегании доминирующей части волны на подводное или выступающее из воды препятствие.

6.7.2. Уравнение Эйри

В случае постоянной глубины уравнение (6.84) имеет вид:

$$\begin{aligned}
& (1+u_a)(u_{\pi} - C_1^2 u_{aa}) - \frac{1}{3}h^2(1+u_a)^{-3}(u_{aat} - C_2^2 u_{aaa}) + \frac{4}{3}h^2(1+u_a)^{-4}u_{at}u_{aat} - \\
& - X(1+u_a) + \rho^{-1}p_{0,a} + \rho^{-1}h^{-1}\int_h^0\int_c^0(p_{13,a} + \bar{V}_n)_a dc - P_{33,a} + P_{11,a} + V_n \Big] dc +
\end{aligned}$$

$$+\rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=h)=0. \quad (6.85)$$

Здесь

$$C_1^2 = C_0^2(1+u_a)^3 + 3\frac{1}{3}h^2(1+u_a)^6u_{at}^2 - \frac{4}{3}h^2u_{att}(1+u_a)^5 - 6\rho^{-1}h\sigma[(1+u_a)^1u_{aa}^2 - u_{aaa}](1+u_a)^4. \quad (6.86)$$

Для длинных океанских волн влияние вязкости воды и капиллярных эффектов обычно мало. Для этого случая (6.85) и (6.86) дают

$$(1+u_a)\left\{u_{tt} - [gh(1+u_a)^3 + 3\frac{1}{3}h^2(1+u_a)^6u_{at}^2 - \frac{4}{3}h^2u_{att}(1+u_a)^5]u_{aa}\right\} - \frac{1}{3}h^2(1+u_a)^3u_{aat} + \frac{4}{3}h^2(1+u_a)^4u_{at}u_{aat} - X(1+u_a) + \rho^{-1}p_{0,a} + \\ + \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=h)=0. \quad (6.87)$$

Пусть вблизи берега нелинейные члены, содержащие множитель h^2 , много меньше других членов, тогда (6.87) преобразуется к виду:

$$(1+u_a)u_{tt} - gh(1+u_a)^2u_{aa} - \frac{1}{3}h^2(1+u_a)^3u_{aat} - X(1+u_a) + \rho^{-1}p_{0,a} + \\ + \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=h)=0. \quad (6.88)$$

Если $p_{0,a} = X = 0$, $h^2 \rightarrow 0$ и $p_{31}(a,t,c=0) = 0$, $p_{31}(a,t,c=h) = 0$, то (6.88) преобразуется в уравнение Эйри (4.1)

$$u_{tt} = gh(1+u_a)^3u_{aa}. \quad (6.89)$$

В случае кубически-нелинейных волн, когда $X = 0$ и влияние нелинейной дисперсии пренебрежимо мало, мы имеем следующее уравнение для кубически-нелинейных прибрежных волн

$$(1+u_a)u_{tt} - gh(1+2u_a+3u_a^2) - \frac{1}{3}h^2u_{aat} + \rho^{-1}p_{0,a} + \\ + \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=h)=0. \quad (6.90)$$

Мы рассмотрели в этом подразделе варианты основного уравнения (6.84). В отличие от общей теории, представленной в главе 5, уравнения (6.85)–(6.88) и (6.90), также как и классическое уравнение Эйри (6.89), являются одномерными.

6.7.3. Волновые уравнения теории длинных волн и области их применимости

Для простоты мы рассматриваем здесь невязкую жидкость. Поверхностное натяжение и трение игнорируются. Полагаем $p_0 = X = 0$ в (6.79). Вводятся два следующих важных параметра, связанные с длинными волнами:

$$\varepsilon = A / h, \quad 2 = h^2 \varepsilon^2. \quad (6.91)$$

Здесь ε — длина волны, A — амплитуда волны. В случае длинных волн и мелкой воды $2 \ll 1$. Так как рассматриваются волны конечной амплитуды, то $\varepsilon = O(1)$. Следовательно, амплитуда волн может достигать толщины водного слоя. Вместе с тем для длинных волн мы примем, что $2^{0.5} \ll 1$. Далее вводим следующие безразмерные переменные

$$a^* = a / \lambda, \quad t^* = \sqrt{gh} t / \lambda. \quad (6.92)$$

Теперь могут быть записаны безразмерные выражения для членов уравнения (6.79). Например,

$$u^* = u / A, \quad h_{aa} = 2^{0.5} h^{-1} \partial^2 h / \partial (a^*)^2, \quad u_a = 2^{0.5} \partial h / \partial a^*. \quad (6.93)$$

В безразмерных переменных уравнение (6.79) может быть записано в следующем виде (звездочки опущены):

$$\begin{aligned} & (1 + 2^{0.5} u_a) u_{tt} - \\ & - \left[(1 + 2^{0.5} u_a)^2 + 3 \frac{1}{3} (1 + 2^{0.5} u_a)^5 (12 u_{at})^2 - \frac{4}{3} 2^{1.5} u_{aa} (1 + 2^{0.5} u_a)^4 \right] u_{aa} \\ & - \frac{1}{3} 2 [u_{aaa} - 4 2^{0.5} (1 + 2^{0.5} u_a)^{-1} u_{at} u_{aat}] (1 + 2^{0.5} u_a)^3 \\ & - 2^{0.5} (h_a u_a + h_{aa} u) + (2)^{-1} h_a [(1 + 2^{0.5} u_a)^{-1} - 1] + \\ & + h_a [-(1 + 2^{0.5} u_a)^3 2^{0.5} u_{aa} + 2(1 + 2^{0.5} u_a)^4 12 u_{at}^2 - (1 + 2^{0.5} u_a)^2 12 u_{at}^2] \\ & - 0.5 h_{aa} 2^{0.5} \{ (1 + 2^{0.5} u_a)^{-1} u_{tt} + [2(1 + 2^{0.5} u_a)^3 12 u_{at}^2 - (1 + 2^{0.5} u_a)^2 2^{0.5} u_{aa}] u \} + \\ & + h_a u_{tt} [(1 + 2^{0.5} u_a)^2 12 u_{aa} - h_a (1 + 2^{0.5} u_a)^{-1} + \\ & + h_a (1 + 2^{0.5} u_a) + h_{aa} 2^{0.5} u] = 0. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Пусть $u_a = O(1)$, а h_a, h_{aa} имеют порядок $O(2^{0.5})$ или меньше. Поскольку $2^{0.5} \ll 1$, то приближенно

$$(1 + 2^{0.5} u_a)^n = 1 - n 2^{0.5} u_a + 0.5 n(n+1) (2^{0.5} u_a)^2 \dots \quad (6.95)$$

Затем мы будем игнорировать члены, меньшие чем $O(2^2)$. В этом случае уравнение (6.94) дает

$$u_{tt} - u_{aa} - 2^{0.5} (2 h_a u_a + h_{aa} u) + 12^{0.5} u_a u_{tt} + 2 2^{0.5} u_a u_{aa} + 1 h_a u_a^2$$

$$\begin{aligned}
& -0.52^{0.5}(h_{aa}u_{tt} + 2h_a u_{tta}) - \frac{1}{3}2u_{ttaa} - 2^{0.5}1^2 h_a u_a^3 - 31^2 2u_a^2 u_{aa} + \\
& + 2^{0.5}u_{tt}(2h_a^2 1u_a + 12^{0.5}h_a u_{aa} + h_a h_{aa} 1u + 0.52^{0.5}1u_a h_{aa}) + \frac{4}{3}12^{1.5}u_{at}u_{aat} + \\
& + 2^{1.5}1u_a u_{taa} + 2h_a 1u_{at}^2 + 1(32h_a u_a + 0.52h_{aa}u + \frac{4}{3}2^{1.5}u_{aa})u_{tta} + 1^3 2h_a u_a^4 - \\
& - 1^2 2h_a u_a u_{tt}(h_a u_a + 22^{0.5}u_{aa}) - \frac{1}{3}1^2 2^2 [(16u_{at}u_{aat} + 6u_a u_{taa} + 10u_a u_{aa})u_a + 8u_{aa}u_a u_{tta}] \\
& - 1^2 2^{1.5}[(6h_a u_a + h_{aa}u)u_a u_{tta} + 0.5h_{aa}u_{tt}u_a^2 + (h_{aa}u + h_a u_a + 8h_a u_a - 3u_a h_a)u_{at}^2] + \\
& + 4(12^{0.5}u_a)^3 u_{aa} - \frac{8}{3}1^2 2^2 u_{tta}u_a u_{aa} - 1^4 2^{1.5}h_a u_a^5 - 5(12^{0.5}u_a)^4 u_{aa} = 0. \quad (6.96)
\end{aligned}$$

Уравнение (6.96) позволяет анализировать волны с амплитудой, сравнимой с глубиной, однако она должна быть много меньше волновой длины. Таким образом, (6.96) описывает широкий диапазон длинных нелинейных поверхностных волн. Однако мы не можем гарантировать, что уравнение (6.96) справедливо, когда волны приближаются к прибрежной линии, потому что член $2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa}u)$ в (6.96) неограниченно растет, если $h=0$.

Теперь мы рассматриваем некоторые случаи, когда (6.96) может быть упрощено.

1. Влияние длины волны. Рассмотрим настолько длинные волны, что малыми членами в (6.96), содержащими $2^{1.5}$, можно пренебречь. В этом случае, уравнение (6.96) преобразовывается к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& u_{tt} - u_{aa} - 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa}u) + 12^{0.5}u_a u_{tt} + 212^{0.5}u_a u_{aa} + 1h_a u_a^2 \\
& - 0.52^{0.5}(h_{aa}u_{tt} + 2h_a u_{tta}) - \frac{1}{3}2u_{ttaa} - 2^{0.5}1^2 h_a u_a^3 - 31^2 2u_a^2 u_{aa} = 0. \quad (6.97)
\end{aligned}$$

В случае еще более длинных волн, члены порядка 2 также могут быть отброшены, тогда

$$u_{tt} - u_{aa} - 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa}u) + 12^{0.5}u_a u_{tt} + 212^{0.5}u_a u_{aa} + 1h_a u_a^2 = 0. \quad (6.98)$$

Напомним, что $h_a = O(2^{0.5})$, $h_{aa} = O(2^{0.5})$ и $\varepsilon = O(1)$ в (6.96)–(6.98). Для постоянной глубины уравнение (6.98) дает

$$u_{tt} - u_{aa} + 312^{0.5}u_a u_{aa} = 0. \quad (6.99)$$

Обратим внимание на то, что в случае очень длинных волн в (6.99) влияние дисперсии исчезло. Таким образом, даже волны большой амплитуды могут быть описаны простым уравнением (6.99) в случае волн большой длины. Это не очень удивительно. Известно, что нелинейные волны могут иногда моделироваться относительно простыми уравнениями. Как пример назовем уравнения типа Кортевега де Вриза (КдВ). Они применялись с некоторым успехом даже вне зон их формальной справедливости [47, 48].

2. Влияние наклона дна. Пусть $h_a = O(2)$, $h_{aa} = O(2)$, и рассмотрим волны конечной амплитуды. Пренебрегая в (6.96) членами меньше, чем $O(2^{1.5})$, получим

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{aa} - 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa} u) + 12^{0.5} u_a u_{tt} + 212^{0.5} u_a u_{aa} + 1h_a u_a^2 - \frac{1}{3} 2u_{taa} \\ - 0.52^{0.5}(h_{aa} u_{tt} + 2h_a u_{ta}) - 2^{0.5} 1^2 h_a u_a^3 - 31^2 2u_a^2 u_{aa} + \\ + \frac{1}{3} 12^{1.5}(4u_{at} u_{aat} + 3u_a u_{taa} + 4u_{aa} u_{ta}) = 0. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Уменьшим наклон дна. Пусть в (6.100) $h_a = O(2^{1.5})$, $h_{aa} = O(2^{1.5})$. В этом случае

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{aa} - 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa} u) + 12^{0.5} u_a u_{tt} + 212^{0.5} u_a u_{aa} + \\ + 1h_a u_a^2 - \frac{1}{3} 2u_{taa} - 31^2 2u_a^2 u_{aa} + \\ + \frac{1}{3} 12^{1.5}(4u_{at} u_{aat} + 3u_a u_{taa} + 4u_{aa} u_{ta}) = 0. \end{aligned} \quad (6.101)$$

3. Влияние амплитуды волны. Сначала рассмотрим сильный наклон дна, когда $h_a = O(2^{0.5})$ и $h_{aa} = O(2^{0.5})$, но 1^2 — порядка $O(2^{0.5})$. Если членами порядка 2^2 можно пренебречь, то (6.96) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{aa} - 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa} u) + 12^{0.5} u_a u_{tt} + 212^{0.5} u_a u_{aa} + 1h_a u_a^2 \\ - 0.52^{0.5}(h_{aa} u_{tt} + 2h_a u_{ta}) - \frac{1}{3} 2u_{taa} - 2^{0.5} 1^2 h_a u_a^3 - 31^2 2u_a^2 u_{aa} + \\ + 2^{0.5} u_{tt}(2h_a^2 1u_a + 12^{0.5} h_a u_{aa} + h_a h_{aa} 1u + 0.52^{0.5} 1u_a h_{aa}) + \frac{4}{3} 12^{1.5} u_{at} u_{aat} + \\ + 2^{1.5} 1u_a u_{taa} + 2h_a 1u_{at}^2 + 1(32h_a u_a + 0.52h_{aa} u + \frac{4}{3} 2^{1.5} u_{aa}) u_{ta} = 0. \end{aligned} \quad (6.102)$$

Уравнение (6.102) существенно упрощается, если пренебречь членами, меньшими чем $O(2^{1.5})$. Соответственно, мы имеем

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{aa} - 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa} u) + 12^{0.5} u_a u_{tt} + 212^{0.5} u_a u_{aa} + 1h_a u_a^2 \\ - 0.52^{0.5}(h_{aa} u_{tt} + 2h_a u_{ta}) - \frac{1}{3} 2u_{taa} - 2^{0.5} 1^2 h_a u_a^3 - 31^2 2u_a^2 u_{aa} = 0. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Это уравнение учитывает как высокую нелинейность, так и влияние наклона дна. На следующем этапе упрощения пренебрежем членами порядка $2^{1.5}$ в (6.103). Тогда

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{aa} - 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa} u) + 12^{0.5} u_a u_{tt} + 212^{0.5} u_a u_{aa} + \\ + 1h_a u_a^2 - 0.52^{0.5}(h_{aa} u_{tt} + 2h_a u_{ta}) - \frac{1}{3} 2u_{taa} = 0. \end{aligned} \quad (6.104)$$

В отличие от (6.98), это уравнение учитывает кубическую нелинейность, наклон дна и дисперсию. Пусть $1^2 = O(2^{0.5})$ и $h_a = O(2)$, $h_{aa} = O(2)$. Пренебрегая в уравнении (6.102) членами меньшими, чем $O(2^{1.5})$, получим

$$u_{\pi} u_{aa} 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa} u) + 12^{0.5} u_a u_{\pi} + 212^{0.5} u_a u_{aa} + \\ + 1h_a u_a^2 - \frac{1}{3} 2u_{\pi aa} 0.52^{0.5}(h_{aa} u_{\pi} + 2h_a u_{\pi a}) 31^2 2u_a^2 u_{aa} = 0. \quad (6.105)$$

Уменьшим влияние дна, а амплитуду оставим прежней. Пусть $1^2 = O(2^{0.5})$ и $h_a = O(2^{1.5})$, $h_{aa} = O(2^{1.5})$. Пренебрегаем далее членами меньшими, чем $O(2^{1.5})$. В результате уравнение (6.105) принимает вид:

$$u_{\pi} u_{aa} 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa} u) + 12^{0.5} u_a u_{\pi} + 212^{0.5} u_a u_{aa} \\ \frac{1}{3} 2u_{\pi aa} 31^2 2u_a^2 u_{aa} = 0. \quad (6.106)$$

Это уравнение принимает во внимание различные эффекты: наклон дна, дисперсию и высокую (кубическую) нелинейность.

Если мы имеем в (6.106) $h_a = O(2^{0.5})$, $h_{aa} = O(2^{0.5})$, то члены, меньшие чем $O(2)$, незначительны. В этом случае уравнение (6.106) дает

$$u_{\pi} u_{aa} 2^{0.5}(2h_a u_a + h_{aa} u) \frac{1}{3} 2u_{\pi aa} + 312^{0.5} u_a u_{aa} = 0. \quad (6.107)$$

Уравнения (6.106), (6.107) достаточно просты. В то же самое время они описывают широкий диапазон явлений. Поэтому эти уравнения будут часто использоваться ниже.

Мы рассмотрели здесь длинные волны. Для них эффект дисперсии мал или практически отсутствует. Эффект наклона дна может быть очень важным, и он увеличивается около прибрежной линии. Влияние нелинейности зависит от 1. Если $1 = O(2^{0.5})$, то мы имеем слабо-нелинейные и слабо-дисперсионные волны. В этом случае, на поверхности воды могут возникать волны неизменной формы.

Замечание. Уравнения этого раздела могут быть переписаны, принимая во внимание капиллярный эффект. Мы не задерживаемся здесь на этом случае.

6.7.4. Уравнения Буссинеска

Теперь рассмотрим случай квадратично-нелинейных волн и учтем трение. После длинных, но простых вычислений, уравнение (6.77) переписывается в следующем виде:

$$[1 - 0.5hh_{aa}(1 - 2u_a) + h_a(2h_a u_a + hu_{aa} + h_{aa} u)](u_{\pi} - c_1^2 u_{aa})$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{3} h^2 - \frac{4}{3} h^2 u_a \right) (u_{att} - c_2^2 u_{aaaa}) [h h_a (1 - 4u_a) - 0.5 h h_{aa} u] (u_{att} - c_3^2 u_{aaa}) + \\
& + \frac{4}{3} h^2 u_{at} u_{aat} - h_a (2g u_a - 3g u_a^2 - h u_{at}^2) - g h_{aa} u + g h_{aa} u u_a + \\
& + \rho^{-1} \sigma [4 h_{aaa} u_a (4 - 5u_a) + h_{aaaa} u (1 - u_a)] + \rho^{-1} h^{-1} p_{31}(a, t, c = 0) - \\
& - \rho^{-1} h^{-1} p_{31}(a, t, c = h) + \rho^{-1} p_{0,a} (1 + u_a)^{-1} = 0, \tag{6.108}
\end{aligned}$$

где

$$c_1^2 = \left\{ g h (1 - 3u_a) - \frac{4}{3} h^2 u_{att} - 6 \rho^{-1} \sigma [h_{aa} (1 - 2u_a) - h_a u_{aa} - h u_{aaa}] \right\} \\
[1 - 0.5 h h_{aa} (1 - 2u_a) + h_a (2h_a u_a + h u_{aa} + h_{aa} u)]^{-1}, \tag{6.109}$$

$$c_2^2 = 3 \rho^{-1} \sigma h^{-1} (1 - 3u_a) (1 - 4u_a)^{-1}, \tag{6.110}$$

$$c_3^2 = 4 \rho^{-1} \sigma h^{-1} h_a (1 - 2.5u_a) [h_a (1 - 4u_a) - 0.5 h_{aa} u]^{-1}. \tag{6.111}$$

Уравнение (6.108) может быть представлено как уравнение типа Буссинеска [49]. Дифференцируя (6.108) относительно a , получим:

$$\begin{aligned}
& (u_a)_{tt} - g h (u_a)_{aa} + 1.5 g h (u_a^2)_{aa} - \frac{1}{3} h^2 (1 - 4u_a) [(u_a)_{att} - c_2^2 (u_a)_{aaaa}] \\
& h [h_a (1 - 4u_a) - 0.5 h_{aa} u] [(u_a)_{att} - c_3^2 (u_a)_{aaa}] = \\
& = (u_a)_{tt} 0.5 h h_{aa} u_{att} + 0.5 u_{tt} (h h_{aa})_a + g h_a u_{aa} - 1.5 g h_a (u_a^2)_a + \\
& + \frac{1}{3} (h^2 - 4h^2 u_a)_a (u_{att} - c_2^2 u_{aaaa}) - \frac{1}{3} h^2 (1 - 4u_a) (c_2^2)_a u_{aaaa} + \\
& + [h h_a (1 - 4u_a) - 0.5 h h_{aa} u]_a (u_{att} - c_3^2 u_{aaa}) \\
& h [h_a (1 - 4u_a) - 0.5 h_{aa} u] (c_3^2)_a u_{aaa} + \\
& + \left\{ -\frac{4}{3} h^2 u_{at} u_{aat} + h_a (2g u_a - 3g u_a^2 - h u_{at}^2) + g h_{aa} u (1 - u_a) \right. \\
& \left. - u_{tt} [h h_{aa} u_a + h_a (2h_a u_a + h u_{aa} + h_{aa} u)] \right. \\
& \left. - \left[\frac{4}{3} h^2 u_{att} + 6 \rho^{-1} \sigma h_{aa} (1 - 2u_a) - 6 \rho^{-1} \sigma, h_a u_{aa} + h u_{aaa} \right] u_{aa} \right. \\
& \left. \rho^{-1} \sigma h_{aaa} (4 - 5u_a) u_a - \rho^{-1} \sigma h_{aaaa} u (1 - u_a) \right\}_a + \rho^{-1} [p_{0,a} (1 + u_a)^{-1}]_a + \\
& + \rho^{-1} h^{-1} p_{31,a} (a, t, c = 0) - \rho^{-1} h^{-1} p_{31,a} (a, t, c = h) = 0. \tag{6.112}
\end{aligned}$$

Это квадратное нелинейное трехскоростное волновое уравнение. В случае ровного дна, $h_a = h_{aa} = c_3^2 = 0$, и уравнение (6.112) дает

$$\begin{aligned}
& (u_a)_{tt} - gh(u_a)_{aa} + 15gh(u_a^2)_{aa} - \frac{1}{3}h^2(1 - 4u_a)[(u_a)_{aatt} - c_2^2(u_a)_{aaaa}] = \\
& = -\frac{4}{3}h^2u_{aa}(u_{aatt} - c_2^2u_{aaaa}) - \frac{1}{3}h^2(1 - 4u_a)(c_2^2)_a u_{aaaa} \\
& - \left[\frac{4}{3}h^2u_{at}u_{aat} + \left(\frac{4}{3}h^2u_{att} - 6\rho^{-1}\sigma hu_{aaa} \right) u_{aa} \right]_a + \\
& + \rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a, t, c = h) + \\
& + \rho^{-1}[p_{0,a}(1 + u_a)^{-1}]_a. \tag{6.113}
\end{aligned}$$

Если капиллярный эффект пренебрежимо мал, то $\sigma = 0$ и $c_2 = 0$ в (6.113). При этом мы имеем

$$\begin{aligned}
& (u_a)_{tt} - gh(u_a)_{aa} + 15gh(u_a^2)_{aa} - \frac{1}{3}h^2(u_a)_{aatt} = \\
& = -\frac{4}{3}h^2(u_a u_{aatt} + u_{at}u_{aat} + h^2u_{att}u_{aa})_a + \\
& + \rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a, t, c = h) + \\
& + \rho^{-1}[p_{0,a}(1 + u_a)^{-1}]_a. \tag{6.114}
\end{aligned}$$

Около прибрежной линии величина h^2 может быть очень маленькой. В этом случае (6.114) дает

$$\begin{aligned}
& (u_a)_{tt} - gh(u_a)_{aa} + 15gh(u_a^2)_{aa} - \frac{1}{3}h^2(u_a)_{aatt} = \\
& = \rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a, t, c = h) + \\
& + \rho^{-1}[p_{0,a}(1 + u_a)^{-1}]_a. \tag{6.115}
\end{aligned}$$

Поскольку приблизительно $u_a \sim h^{-1}\eta + h^2\eta^2$, то можно переписать (6.115) в виде:

$$\begin{aligned}
& -h^{-1}\eta_{tt} + h^2(\eta^2)_{tt} - gh[h^{-1}\eta_{aa} + h^2(\eta^2)_{aa}] + \\
& + 15gh(h^2\eta^2)_{aa} - \frac{1}{3}h^2(h^{-1}\eta + h^2\eta^2)_{aatt} = \\
& = \rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a, t, c = 0) - \rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a, t, c = h) + \\
& + \rho^{-1}[p_{0,a}(1 + u_a)^{-1}]_a. \tag{6.116}
\end{aligned}$$

Здесь разность $(\eta^2)_{tt} - gh(\eta^2)_{aa}$ — величина третьего порядка. Затем, пренебрегая малыми величинами, давлением и трением, записываем уравнение, которое впервые было получено Буссинеском (см., например, [6]).

$$\eta_{tt} - gh\eta_{aa} = \left(\frac{3}{2}g\eta^2 + \frac{1}{3}h^2\eta_{tt} \right)_{aa}. \tag{6.117}$$

Таким образом, мы показали, что развитая в главе теория длинных волн включает в себя как сильно нелинейное уравнение Эйри, так и квадратично-нелинейное уравнение Буссинеска.

6.7.5. Эффекты внутренней вязкости и донного трения

Выше, когда мы выводили уравнения с учетом вязкостных эффектов, соответствующие члены записывались в достаточно общем виде, через компоненты тензора напряжений. Чтобы конкретизировать эти члены, мы должны определить выражения для этих компонентов. Следуя [5], мы используем модель Навье. Согласно этой модели, компоненты тензора напряжений, определяющие эффекты вязкости, записываются так:

$$P_{11} = -\frac{2}{3}\mathfrak{Z}(u_{ta} + w_{tc}) + 2\mathfrak{Z}u_{ta}, \quad P_{33} = -\frac{2}{3}\mathfrak{Z}(u_{ta} + w_{tc}) + 2\mathfrak{Z}w_{tc},$$

$$p_{13} = p_{31} = \mathfrak{Z}(u_{tc} + w_{ta}), \quad (6.118)$$

где $\mathfrak{Z}$ — коэффициент кинематической вязкости [5]. Затем, используя (6.118) вместе с граничными условиями (5.13), (5.15), найдем

$$\rho^{-1} \int_h^0 (-P_{33,a} + P_{11,a}) dc = 2\bar{\mu} \rho^{-1} (2hu_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa} u_t) \quad (6.119)$$

и

$$\begin{aligned} \rho^{-1} h^{-1} \int_h^0 \int_c^0 p_{13,aa} dc dc &= \bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} \int_h^0 \int_c^0 w_{taaa} dc dc = \\ &= \bar{\mu} \rho^{-1} h \left[\frac{1}{6} (h^{-1} \eta_t)_{aaa} h - 0.5 \eta_{taaa} + \frac{1}{6} (h_a h^{-1} u_t)_{aaa} h \right] = \\ &= -\bar{\mu} h \rho^{-1} \left(\frac{1}{6} h u_{taaaa} + 0.5 \eta_{taaa} \right). \end{aligned} \quad (6.120)$$

Здесь $\eta \approx hu_a - h_a u$ (6.75). Очевидно, что выражение (6.120) много меньше, чем (6.119). Поэтому выражение (6.120), входящее в (6.84), далее игнорируется. Кроме этого учтем, что модель Навье — линейная, поэтому мы будем отбрасывать нелинейные составляющие членов, определяющих вязкость в (6.84), т.е. полагаем, что там $\bar{V}_n = V_n = 0$.

Учитывая все сказанное, мы можем переписать уравнение (6.84) в виде:

$$\begin{aligned} (1+u_a)(u_{tt} - C_1^2 u_{aa}) - \frac{1}{3} h^2 (1+u_a)^3 (u_{aat} - C_2^2 u_{aaaa}) - hh_a (1+u_a)^3 (u_{att} - C_3^2 u_{aaa}) \\ - 0.5 h h_{aa} (1+u_a)^{-1} u_{tt} - g(h_a u_a + h_{aa} u) + g h_a [(1+u_a)^{-1} - 1] + \frac{4}{3} h^2 (1+u_a)^4 u_{at} u_{aat} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + hh_a [2(1+u_a)^2 - 1](1+u_a)^2 u_{at}^2 - 0.5hh_{aa} [2(1+u_a)^3 u_{at}^2 - (1+u_a)^2 u_{at}]u + \\
& + h_a u_{tt} [h(1+u_a)^2 u_{aa} - h_a(1+u_a)^1 + h_a(1+u_a) + h_{aa}u] \\
& - \rho^{-1} \sigma h_{aaa} [(1+u_a)^1 - 1 - 3u_a] + \rho^{-1} \sigma h_{aaaa} u - X(1+u_a) + \rho^{-1} p_{0,a} \\
& - 2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} (2hu_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa} u_t) + \\
& + \rho^{-1} h^{-1} p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1} h^{-1} p_{31}(a, t, c = h) = 0. \quad (6.121)
\end{aligned}$$

Здесь член $2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} (2hu_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa} u_t)$ определяет эффект кинематической (молекулярной) вязкости. Член $\rho^{-1} h^{-1} p_{31}(a, t, c = 0)$ определяет трение на свободной поверхности. Оно обычно определяется взаимодействием ветра и поверхности воды. Член $\rho^{-1} h^{-1} p_{31}(a, t, c = h)$ определяет трение воды о дно. Вблизи дна движение воды может быть ламинарным или турбулентным. Последний случай может быть описан моделью вихревой нелинейной вязкости: $p_{31}(a, t, c = h) = \bar{s} u_t$, где $\bar{s}$ — коэффициент трения. Более простая, ламинарная — линейная форма модели придонного трения определяется выражением $p_{31}(a, t, c = h) = \bar{s} u_t$ [39, 45].

Используя ламинарную модель, перепишем уравнение (6.121) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& (1+u_a)(u_{tt} - C_1^2 u_{aa}) - \frac{1}{3} h^2 (1+u_a)^3 (u_{aat} - C_2^2 u_{aaaa}) - hh_a (1+u_a)^3 (u_{at} - C_3^2 u_{aaa}) \\
& - 0.5hh_{aa} (1+u_a)^1 u_{tt} - g(h_a u_a + h_{aa} u) + gh_a [(1+u_a)^1 - 1] + \frac{4}{3} h^2 (1+u_a)^4 u_{at} u_{aat} + \\
& + hh_a [2(1+u_a)^2 - 1](1+u_a)^2 u_{at}^2 - 0.5hh_{aa} [2(1+u_a)^3 u_{at}^2 - (1+u_a)^2 u_{at}]u + \\
& + h_a u_{tt} [h(1+u_a)^2 u_{aa} - h_a(1+u_a)^1 + h_a(1+u_a) + h_{aa}u] \\
& - \rho^{-1} \sigma h_{aaa} [(1+u_a)^1 - 1 - 3u_a] + \rho^{-1} \sigma h_{aaaa} u - X(1+u_a) + \rho^{-1} p_{0,a} \\
& - 2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} (2hu_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa} u_t) + \\
& + \rho^{-1} h^{-1} p_{31}(a, t, c = 0) - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t = 0. \quad (6.122)
\end{aligned}$$

Видно, что эффект кинематической вязкости зависит от профиля дна (от h_a и h_{aa}). Вообще говоря, трение о дно также может зависеть от наклона дна (см. (5.16)), но эта зависимость здесь не учтена. Отметим, что донное трение на несколько порядков превышает влияние вязкости самой жидкости.

Развитая выше теория длинных волн описывает широкий спектр явлений, связанных с нелинейностью, дисперсией, вертикальным ускорением водных частиц, поверхностным натяжением и рельефом дна. Демпфирование волны связано с вязкостью воды, трением, наклоном дна и взаимодействием волны с атмосферой.

Замечание 1. Выше использовалось предположение, что горизонтальное смещение независимо от s . Вообще говоря, даже для случая длинных волн, это предположение действительно только вне толщины придонного слоя трения. Мы можем игнорировать влияние этого слоя на поверхностные волны, только если толщина слоя является очень маленькой по сравнению с глубиной. Однако для сильно-вязких жидкостей или для случаев очень маленькой глубины, толщина слоя придонного трения может быть сопоставимой с глубиной. В этих случаях теория, представленная здесь, должна быть уточнена.

В то же самое время отметим, что теория длинных волн широко и успешно используется для описания прибрежных волн и волн на тонких слоях вязких жидкостей [6, 7, 19, 25].

Замечание 2. В разделе 6.4 (см. рис. 84) показано, что учет дисперсионного члена $\frac{1}{3} h^2 u_{\text{наа}}$ в волновом уравнении позволяет описать, довольно точно, дисперсионные свойства поверхностных волн вплоть до значений h / λ (0.4). Таким образом, записанные в этой главе уравнения приближенно справедливы, если глубина моря порядка 100 м, а длина волны больше 200 м. Например, такое соотношение глубины моря и длины волны может иметь место для Северного моря. Следовательно, не исключено, что приведенные здесь уравнения могут описать катастрофические волны на поверхности этого моря.

7. Длинные уединенные волны

Люди почти неизменно приходят к их убеждениям не на основе логики, но основываясь на том, что они находят привлекательным.

Блез Паскаль

Выведенные в главе 6 уравнения описывают волны, распространяющиеся в двух противоположных направлениях. Однако океанские волны обычно перемещаются в некотором определенном направлении и, поэтому, многие статьи и книги, посвященные длинным волнам, исследуют только эти волны. В них, в частности, рассматриваются такие известные уравнения, как Кортевега-де Вриза, Бюргера, Гарднера и Камасса-Холма, а также их решения в виде уединенных волн. Естественно, возникает мысль о том, что эти уравнения являются частными случаями уравнений, выведенных в главе 6. В этой главе мы проверяем эту мысль и строим решения соответствующих уравнений.

7.1. Конкуренция нелинейных и дисперсионных эффектов

Многие особенности нелинейных волновых процессов определяются конкуренцией между нелинейными и дисперсионными эффектами. Нелинейность приводит к появлению в спектре волн высоких гармоник, которые могут формировать крутые фронты. Дисперсия, наоборот, приводит к разбеганию этих зарождающихся гармоник. Если влияние нелинейности уравновешивается эффектами дисперсии, то возникают стационарные бегущие волны. Такая ситуация, на какое-то время, может возникнуть в случае переменного дна. Когда волна распространяется над переменным дном влияния дисперсии, амплитуда волны и искривление ее профиля изменяются. В частности, при определенном наклоне дна могут возникнуть и, даже, долгое время существовать волны постоянного профиля.

Таким образом, изучение волновой динамики должно включать широкий спектр явлений, связанных с нелинейностью, дисперсией и трением. Некоторые из этих явлений рассматриваются в этой главе. Кроме этого мы начинаем изучение влияния наклона дна на распространение прибрежной волны. Это направление исследований является одним из ключевых для этой части книги, так как оно призвано объяснить особенности эволюции цунами, описанные Дарвином.

7.2. Примеры уединенных стационарных волн

Опытным путем Расселом [50] была обнаружена уединенная волна на водной поверхности, которая распространяется без изменения ее профиля. Однако его описание этой волны было в противоречии с теорией сильно-нелинейных волн, развитой Эйри [29]. Согласно уравнению Эйри (4.1), поверхностные длинные волны не могут распространяться без изменения формы. Это объясняется тем, что (4.1) не учитывает дисперсию, которая может уравновесить влияние нелинейности. Позже, в 1872, Буссинеск [49] и затем Кортевег и де Вриз в 1895 [51] учли влияние дисперсии и получили уравнения (уравнение Буссинеска (6.117) и уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ)), которые имеют решения в форме уединенных волн [52–61]. Здесь мы рассмотрим примеры таких волн.

В размерных (физических) переменных уравнение (6.106) принимает следующий вид:

$$u_{\pi\pi} - gh u_{aa} = \left(\frac{1}{3} h^2 \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) u_{aaa} - u_a u_{\pi\pi} - 2gh u_a u_{aa} + 3gh u_a^2 u_{aa}. \quad (7.1)$$

Здесь мы ввели капиллярный член. Уравнение (7.1) записано для постоянной глубины. Общее решение уравнений, подобных (7.1), неизвестно. Однако частное стационарное решение уравнения (7.1) может быть получено в предположении, что [62]

$$u = u(r), \text{ где } r = a - Ct. \quad (7.2)$$

В этом случае (7.1) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение, которое имеет первый интеграл

$$(gh - C^2) u_r = B_1 C^2 u_{rr} + B_2 u_r^2 - gh u_r^3 + C_1. \quad (7.3)$$

Здесь $B_1 = \sigma \rho^{-1} g^{-1} - \frac{1}{3} h^2$, $B_2 = \frac{1}{2} C^2 + gh$ и C_1 — постоянная интегрирования.

Умножая (7.3) на u_{rr} и интегрируя, мы получим

$$\frac{1}{2} (gh - C^2) u_r^2 = \frac{1}{2} B_1 C^2 u_{rr}^2 + \frac{1}{3} B_2 u_r^3 - \frac{1}{4} gh u_r^4 + C_1 r + C_2. \quad (7.4)$$

Здесь C_2 — постоянная интегрирования. Перепишем последнее уравнение в виде:

$$u_{rr}^2 = [(gh - C^2) u_r^2 - \frac{2}{3} B_2 u_r^3 + \frac{1}{2} gh u_r^4 - 2C_1 u_r - 2C_2] B_1^{-1} C^{-2}. \quad (7.5)$$

Общее решение этого уравнения может быть выражено в терминах эллиптических функций с двумя произвольными константами C_1 и C_2 [52, 58]. Ниже

мы ограничимся рассмотрением двух упрощенных версий решения уравнения (7.5).

1. Пусть $\frac{1}{2}ghu_r^4 \rightarrow 0$. В этом случае уравнение (7.5) дает

$$u_{rr}^2 = \frac{2}{3}B_2B_1^{-1}C^{-2}(\alpha - u_r)(\beta - u_r)(5 - u_r), \quad (7.6)$$

где α , β и 5 — корни алгебраического уравнения

$$(gh - C^2)u_r^2 - \frac{2}{3}B_2u_r^3 - 2C_1u_r - 2C_2 = 0. \quad (7.7)$$

В силу теоремы Виета

$$\alpha + \beta + 5 = \frac{3}{2}(gh - C^2)B_2^{-1}. \quad (7.8)$$

Мы обозначили константы так, чтобы $\alpha \leq \beta \leq 5$. Так как мы хотим получить локализованное решение, то принимаем, что $u_r \geq 0$, когда $r \rightarrow \pm\infty$. Если $B_2 \neq 0$, то правая сторона соотношения (7.8) — не отрицательна только, если

$$\alpha \leq u_r \leq \beta, \text{ или } u_r \leq \gamma. \quad (7.9)$$

Вместе с тем, u_{rr} должна исчезнуть при некотором экстремальном значении u_r , а также, когда $r \rightarrow \pm\infty$ [62]. Следовательно, функция u_{rr} должна иметь два различных нуля. Поэтому, мы имеем дополнительно к (7.9), что

$$\alpha \leq u_r \leq \beta. \quad (7.10)$$

Так как имеется также случай $u_r = 0$, то $\alpha \leq 0$ и $0 \leq \beta$. Если помимо этого $u_{rr} \geq 0$, когда $r \rightarrow \pm\infty$, то $\beta = 0$ и $\gamma = 0$.

Следовательно, (7.6) приводится к виду:

$$u_{rr} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}B_2B_1^{-1}C^{-2}(\beta - u_r)u_r}. \quad (7.11)$$

Далее, следуя [62], находим

$$u_r = \beta \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{1}{6} \beta B_2 B_1^{-1} C^{-2} \right)^{0.5} r \right]. \quad (7.12)$$

Поскольку $\eta \approx hu_a$, то приближенно

$$\eta = -h\alpha \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{1}{6} \beta B_2 B_1^{-1} C^{-2} \right)^{0.5} r \right]. \quad (7.13)$$

Последнее уравнение описывает подобную солитону уединенную волну на поверхности воды. Интегрирование (7.12) дает

$$u = (6\#B_2^{-1}B_1C^2)^{0.5} \tanh\left[\left(\frac{1}{6}\#B_2B_1^{-1}C^{-2}\right)^{0.5} r\right]. \quad (7.14)$$

Если величина $\left(\frac{1}{6}\#B_2B_1^{-1}C^{-2}\right)^{0.5}$ очень большая, то последнее выражение описывает ударную волну смещения. Ударные волны этого типа часто называют Тэйлоровскими [63].

2. Рассмотрим случай кубической нелинейности, когда $B_2u_r^2 = 0$, $C_1 = 0$ в (7.3). В этом случае мы имеем, что

$$u_{rrr} (gh - C^2)B_1^{-1}C^{-2}u_r - ghB_1^{-1}C^{-2}u_r^3 = 0. \quad (7.15)$$

Следуя [58], найдем решения этого уравнения, которые описывают уединенные волны. Пусть

$$\beta = \frac{1}{2}(gh - C^2)C^{-3}B_1^{-1} \text{ и } \alpha = -\frac{3}{2}\beta ghC^{-2}B_1^{-1}, \quad (7.16)$$

тогда (6.15) примет вид:

$$u_{rrr} - 2\beta^{-1}B_1^{-1}C^{-1}u_r + \frac{2}{3}\alpha\beta^{-1}u_r^3 = 0. \quad (7.17)$$

Решение этого уравнения приведено в [58] для двух случаев.

2.1. Если $C \neq 0$, $\# \neq 0$ и $\beta > 0$, то уравнение (7.17) имеет решение, подобное солитону,

$$u_r = \pm A \operatorname{sech}[(a - Ct)^{-1}]. \quad (7.18)$$

Здесь амплитуда, скорость и ширина волны связаны выражениями

$$a^{-2} = 6\alpha\beta^{-1}A^{-2}, A^2 = -6C\beta\alpha^{-1}. \quad (7.19)$$

В этом случае у нас есть следующее приближенное выражение для возвышения водной поверхности

$$\eta = \mp Ah \operatorname{sech}[(a - Ct)^{-1}]. \quad (7.20)$$

2.2. Если $C = 0$, $\beta > 0$ и $\# = 0$, то уравнение (7.17) описывает волну с крутым фронтом

$$u_r = \pm A \tanh[(a - Ct)^{-1}]. \quad (7.21)$$

Амплитуда и скорость волны связаны с толщиной фронта волны соотношениями

$$a^{-2} = 3\beta\alpha^{-1}A^{-2}, A^2 = -12C\#^{-1}. \quad (7.22)$$

В этом случае мы имеем следующее приближенное выражение для поднятия поверхности воды

$$\eta = \mp Ah \tanh[(a - Ct)^{-1}]. \quad (7.23)$$

Таким образом, согласно уравнению (7.3), на водной поверхности могут быть уединенные волны, имеющие форму как симметричной куполообразной возвышенности (солитон), так и прибрежной волны перед ее опрокидыванием. Однако возникновение этих волн возможно при выполнении определенных указанных выше условий. Таким образом, согласно (7.3), стационарные волны существуют только при определенных соотношениях нелинейных и дисперсионных эффектов.

7.3. Модельные уравнения для уединенных волн, распространяющихся над медленно изменяющимся дном

Предполагается, что волна распространяется по воде, начальная глубина которой очень медленно меняется в масштабе длины волны. При таком изменении глубины отраженная волна практически не возникает. В этом масштабе есть только небольшие отклонения свойств волны от свойств волн, распространяющихся над плоским дном, которые можно не учитывать на расстояниях порядка длины волны. Однако на расстояниях, много больших длины волны, искажения волн в результате таких маленьких отклонений могут быть существенными.

Здесь мы рассмотрим частные случаи уравнения (6.106), справедливые для волн, распространяющихся в одном направлении. В размерных (физических) переменных это уравнение имеет вид:

$$u_{tt} - gh u_{aa} - 2gh_a u_a - gh_{aa} u = (\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1}) u_{aat} - u_a u_{tt} - 2gh u_a u_{aa} + \\ + 3gh u_a^2 u_{aa} + 2\bar{\mu} \rho^{-1} (2hu_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa} u_t) + \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t. \quad (7.24)$$

Здесь мы ввели члены, учитывающие влияние капиллярности, вязкости и трения о дно. Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль положительного направления. В самом простом случае плоского дна, когда нет влияния дисперсии, вязкости, или нелинейности, форма этой волны определяется выражением $u = u(t - a / \sqrt{gh_0})$ (см. (7.2)). Более сложный случай возникает, если дно наклонное, а эффекты дисперсии, вязкости и нелинейности необходимо учитывать. Рассматривая последний случай, мы переписываем уравнение (7.24) в новых переменных:

$$r = t - \int C^{-1} da \text{ и } \bar{\mu} = 3a. \quad (7.25)$$

Величина $C = C(a)$ — скорость волны, а 3 — малая неизвестная константа, $\bar{\mu} = O(2) \ll 1$. Теперь мы имеем $u = u(r, \bar{\mu})$. Используя переменные (7.25), находим

$$u_t = u_r, u_a = u_{\bar{\mu}}; a - u_r C^{-1}, \quad (7.26)$$

и выражения для u_{tt} , u_{aa} , u_{ttt} , u_{att} и u_{aatt} . Затем, используя эти выражения, перепишем уравнение (7.24), пренебрегая членами, меньшими чем $O(2^{1.5})$. Например, мы полагаем, что

$$u_{aa} = u_{rr} C^2 - 2C^1; {}_a u_r, \quad u_r (C^1)_a + u_{;a}^2 + u_{;aa}^2) \\) u_{rr} C^2 - 2C^1 u_{ra} - u_r (C^1)_a. \quad (7.27)$$

В результате, уравнение (7.24) переписывается в виде:

$$G_{;a} + 5^* G_r + \#^* G G_r + \beta^* G^2 G_r + 3^* G_{rr} - s^* G_{rrr} + c^* G = 0. \quad (7.28)$$

Здесь $G = u_r$ и

$$5^* = (1 - gh C^2)(2gh 3 C^1)^{-1}, \quad \#^* = -(1 + 2gh C^2)(2g 3 h)^{-1}, \\ \beta^* = -3gh C^3 (2g \mu h)^{-1}, \quad 3^* = -2\bar{\gamma} \rho^{-1} C^1 (g 3 h)^{-1}, \\ s^* = \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (2g 3 h C)^{-1}, \\ c^* = -(\rho^{-1} h^{-1} \bar{s} - 15gh_a C^1) (2g \mu h C^1)^{-1}. \quad (7.29)$$

«Возмущенное» уравнение Кортевега–де Вриза. Пусть $\mu^* = \beta^* = 0$, тогда (7.28) дает

$$G_{;a} + 5^* G_r + \#^* G G_r - s^* G_{rrr} + c^* G = 0. \quad (7.30)$$

Здесь величина $c^* G$ учитывает донное трение и наклон дна. Уравнение КдВ вытекает из (7.30), если $c^* = 0$ (нулевое трение и нулевой наклон дна).

«Возмущенное» уравнение Бюргерса. Пусть $C^2 = gh$ и $\beta^* = s^* = 0$, тогда (7.28) дает

$$G_{;a} + \#^* G G_r + 3^* G_{rr} + c^* G = 0. \quad (7.31)$$

Здесь коэффициент 3^* зависит от внутренней вязкости. Если $c^* = 0$, тогда (7.31) сводится к уравнению Бюргерса.

«Возмущенное» уравнение Гарднера. Пусть $C^2 = gh$ и $3^* = 0$, тогда (7.28) дает

$$G_{;a} + \alpha^* G G_r + \beta^* G^2 G_r - s^* G_{rrr} + c^* G = 0. \quad (7.32)$$

Если $c^* = 0$, тогда (7.32) дает уравнение Гарднера.

«Возмущенное» уравнение Камасса-Холма. Для вывода этого уравнения вернемся к уравнению (6.101). Примем, что $h_{aa} = 0$ и $1/h_a u_a^2 = 0$. В этом случае, в физических переменных уравнение (6.101) дает

$$u_{tt} - gh u_{aa} - 2gh_a u_a + u_a u_{tt} + 2gh u_a u_{aa} - 3gh u_a^2 u_{aa} - \frac{1}{3} h^2 u_{aatt} + \\ + \frac{1}{3} h^2 (4u_{att} u_{aatt} + u_a u_{aatt} + 4u_{att} u_{aa}) = 0. \quad (7.33)$$

Переписываем (7.33) в переменных (7.25). В результате мы имеем

$$G_{,t} + 5^* G_r + \#^* G G_r + \beta^* G^2 G_r + s^* C G_{arr} + 0.75 h_a h^{-1} G = \\ = \frac{1}{3} h^2 C^{-3} (8 G_r G_{rr} + G G_{rrr}). \quad (7.34)$$

Уравнение (7.34) подобно уравнению Камасса-Холма. Известно, что уравнение Камасса-Холма может быть представлено во многих формах [18, 22, 27, 64, 65]. В частности, если $h_a = 0$ и $3ghC^{-1}\overline{G}^2\overline{G}_a = 0$, то последнее уравнение может быть переписано так:

$$G_{,t} + 5^* G_r + \#^* G G_r + s^* C G_{arr} = \frac{1}{3} h^2 C^{-3} (8 G_r G_{rr} + G G_{rrr}). \quad (7.35)$$

Уравнение (7.35) — одно из версий уравнения Камасса-Холма (см. уравнение (3.17) из [27]).

7.4. Кубические нелинейные волны

Рассматривается вода постоянной глубины, донное трение не учитывается. В этом случае $s^* = 0$ и уравнение (7.28) примет вид:

$$G_{,t} + 5^* G_r + \#^* G G_r + \beta^* G^2 G_r + 3^* G_{rr} - s^* G_{rrr} = 0. \quad (7.36)$$

Поскольку здесь рассматривается плоское дно, то $r = t - C^{-1}a$. Кубическое нелинейное уравнение (7.36) имеет решения, описывающие волну с крутым фронтом или волну, подобную солитону.

7.4.1. Эффекты капиллярности и вязкости

Положим, что

$$G = A \tanh \bar{p} + \bar{c}. \quad (7.37)$$

Здесь

$$\bar{p} = / (r - \bar{c}) \quad (7.38)$$

и $A, /, 3, \bar{c}$ — действительные константы. Если $/$ велика, то (7.37) определяет волну с крутым фронтом, расположенным в точке, где $r = \zeta$. Этот фронт приближенно моделирует фронт волны перед ее опрокидыванием. Выражение (7.37) подставляется в уравнение (7.36). Затем, сравнивая подобные величины в (7.36), получим следующие уравнения:

$$(-3 + 5^* + \#^* \bar{c} + \beta^* \bar{c}^2 + 2s^* /^{-2}) \operatorname{sech}^2 \bar{p} = 0, \quad (7.39)$$

$$(\alpha^* A + 2\beta^* A \bar{c} - 23^* /) \operatorname{sech}^2 \bar{p} \tanh \bar{p} = 0, \quad (7.40)$$

$$(\beta^* A^2 - 6s^* \omega^2) \operatorname{sech}^2 \bar{p} \tanh^2 \bar{p} = 0. \quad (7.41)$$

Таким образом, определение волны (7.37) сводит задачу к решению системы алгебраических уравнений (7.39)–(7.41).

(а) Уравнение (7.41) дает

$$A^2 = 6s^* \omega^2 / \beta^*. \quad (7.42)$$

Используя (7.29), запишем (7.42) в виде:

$$A = \pm \omega C \sqrt{2g^{-1}(\sigma h^{-1} \rho^{-1} g^{-1} - \frac{1}{3}h)}. \quad (7.43)$$

Это выражение справедливо, если капиллярный эффект настолько значителен, что выполняется неравенство $\frac{1}{3}h < (\sigma h^{-1} \rho^{-1} g^{-1})$.

(b) Затем из (7.40) найдем, что

$$\bar{c} = 3^* / \beta^* A - 0.5\#^* / \beta^*. \quad (7.44)$$

(с) Рассматривая наиболее важные члены в (7.39), мы получим

$$C^2 = gh. \quad (7.45)$$

Этот результат может быть улучшен с помощью (7.42), (7.44) и (7.45):

$$C^2 = gh + 2(gh)^{1.5} [3 - (3^*)^2 / 6s^* + 0.25(\#^*)^2 / \beta^* - 2s^* / ^2]. \quad (7.46)$$

Выражения (7.45), (7.44) и (7.42) могут рассматриваться как дисперсионные соотношения, связывающие волновые параметры A , C , $/$, 3 и $\bar{c}$. Два из параметров можно принять за независимые, в то время как три других могут быть выражены через эти два. Например, если $/$ и 3 рассматриваются как независимые параметры, то A , C и $\bar{c}$ определяются соотношениями (7.43), (7.46) и (7.44).

Теперь, используя (7.46), (7.44), (7.43) и (7.42), мы можем записать решение (7.37) в следующем виде:

$$G = \pm \sqrt{\frac{2\left(\sigma \rho^{-1} g^{-1} - \frac{1}{3}h^2\right)}{ghC^2}} \tanh / \circ r \left\{ 0.5(gh)^{1.5}(C^2 - gh) + \right. \\ \left. + (3^*)^2 / 6s^* - 0.25(\#^*)^2 / \beta^* + 2s^* / ^2 \right\} a \Bigg\} + 3^* / \sqrt{6s^* \beta^*} - 0.5\#^* / \beta^*. \quad (7.47)$$

Из (7.47) следует, что профиль волны не изменяется, если имеется некоторый сложный баланс эффектов нелинейности, силы тяжести, дисперсии, вязкости и капиллярности, когда

$$\frac{1}{2}(gh)^{1.5}(C^2 - gh) + \frac{1}{6}(3^*)^2 / s^* - \frac{1}{4}(\#^*)^2 / \beta^* + 2s^* / ^2 = 0. \quad (7.48)$$

Уравнение (7.36) и его решение (7.47) описывают широкий круг явлений. В частности, из (7.47) следуют решения для упрощенных вариантов уравнения (7.36). Здесь рассмотрим три специальных случая решения (7.47).

1.1. Если $C^2 = gh$ ($5^* = 0$), тогда (7.47) дает решение (2) из [61]:

$$G = \pm \omega \sqrt{6s^*/\beta^*} \tanh / \left\{ t - C^{-1} a \left[(3^*)^2 / 6s^* - 0.25(\#^*)^2 / \beta^* + 2s^{*/2} \right] a \right\} + \mu^* / \sqrt{6s^* \beta^*} - 0.5 \#^* / \beta^*. \quad (7.49)$$

1.2. Если $3^* = 0$, то

$$G = \pm \sqrt{\frac{2 \left(\sigma \rho^{-1} g^{-1} \frac{1}{3} h^2 \right)}{gh C^2}} \tanh / \left\{ t - C^{-1} a \left[0.5, gh \right]^{1/5} (C^2 - gh) - 0.25(\alpha^*)^2 / \beta^* + 2s^{*/2} \right] a \right\} - 0.5 \#^* / \beta^* \quad (7.50)$$

Выражение (7.50) определяет решение уравнения Гарднера (см. (7.32)).

1.3. Если $C^2 = gh$ ($5^* = 0$), $\beta^* = 0$, $s^* = 0$ и $c^* = 0$, тогда (7.36) дает уравнение Бюргерса. В этом случае мы находим из (7.39) и (7.40), что $A = 2/3^* (\#^*)^{-1}$ и $\bar{c} = 3(\#^*)^{-1}$. Решение (7.37) принимает вид:

$$G = \frac{8}{3} / 3^{-1} \rho^{-1} h^{0.5} g^{0.5} \tanh / (t - C^{-1} a - 3a) + 3(\#^*)^{-1}. \quad (7.51)$$

Решение (7.51) имеет место только для вязкой модели воды. Мы подчеркиваем также, что решения (7.49)–(7.51), которые при больших ω описывают крутые волновые фронты, справедливы только, если капиллярный эффект является достаточно большим ($\sigma \rho^{-1} g^{-1} \& \frac{1}{3} h^2$).

7.4.2. Эффект гравитации

Пусть эффекты вязкости пренебрежимы, тогда $3^* = c^* = 0$ и мы можем искать решение в виде:

$$G = A \operatorname{sech} \bar{p}. \quad (7.52)$$

Это выражение подставляется в (7.36). Далее, сравнивая там подобные члены, мы получаем два алгебраических уравнения:

$$\left(3 - 5^* + \frac{1}{4} \#^{*2} / \beta^* + s^{*/2} \right) \operatorname{sech}^2 \bar{p} \sinh \bar{p} = 0, \quad (7.53)$$

$$(\beta^* A^2 + 6s^* \omega^2) \operatorname{sech}^4 \bar{p} \sinh \bar{p} = 0. \quad (7.54)$$

Эти уравнения могут рассматриваться как дисперсионные соотношения, связывающие амплитуду волны A и C , ρ , g . Следовательно, два волновых параметра можно принять за независимые, а другие два выразить через них.

Подставляя решения уравнений (7.53) и (7.54) в (7.52), мы получим

$$G = \pm \omega C \sqrt{2g^{-1} \left(\frac{1}{3} h^{-1} \sigma h^{-1} \rho^{-1} g^{-1} \right)} \operatorname{sech} \left[t - C^{-1} a \left(5^* - \frac{1}{4} \#^{*2} / \beta^* - s^{*2} \right) a \right]. \quad (7.55)$$

Это решение справедливо, если капиллярный эффект настолько мал, что $\frac{1}{3} h^2 \ll \sigma \rho^{-1} g^{-1}$.

Для чисто гравитационных волн $\sigma = 0$, и (7.55) дает

$$G = \pm h \sqrt{\frac{2}{3} g h C^{-2}} \operatorname{sech} \left[t - C^{-1} a \left(5^* - \frac{1}{4} \#^{*2} / \beta^* - s^{*2} \right) a \right]. \quad (7.56)$$

Профили волн (7.55) и (7.54) не изменяются при распространении, если имеется следующее условие стационарности волн

$$\left(5^* - \frac{1}{4} \#^{*2} / \beta^* - s^{*2} \right) = 0. \quad (7.57)$$

Если $5^* = 0$ в (7.56), то мы имеем подобное солитону решение уравнения Гарднера (уравнение Гарднера (7.32), где $c^* = 0$).

Заключение. Результаты этого раздела демонстрируют влияние квадратной и кубической нелинейностей, дисперсии, капиллярности и вязкости на распространение уединенных волн над плоским дном. Если капиллярный эффект является достаточно большим и толщина слоя — достаточно мала $\left(\sigma \rho^{-1} g^{-1} \gg \frac{1}{3} h^2 \right)$, то на поверхности воды может быть образована волна с крутым фронтом. Причем, фронт волны может быть устойчивым вследствие капиллярного натяжения. Если $\sigma \rho^{-1} g^{-1} \ll \frac{1}{3} h^2$, то может существовать поверхностная волна, подобная солитону.

Согласно представленной теории, волны (7.47) и (7.55) изменяют свои профили при распространении. Изменение профиля зависит от скорости волны (коэффициент 5^*), нелинейности (коэффициенты $\#^*$ и β^*), дисперсии и капиллярности (коэффициент s^*). В частности, для крутого фронта это изменение описывается членом

$$[0.5(gh)^{1.5}(C^2 - gh) + (3^*)^2 / 6s^* - 0.25(\#^*)^2 / \beta^* + 2s^* / ^2]a \quad (7.58)$$

в (7.47), в то время, как для волны, подобной солитону, это изменение описывается членом $\left(5^* \frac{1}{4} \#^{*2} / \beta^* s^* / ^2\right)a$ в (7.55).

7.5. Квадратично-нелинейные волны над переменным дном. Закон Грина

Рассматривается возмущенное уравнение КдВ (7.30), которое учитывает влияние дна. Решение его ищется в виде:

$$G = A(a) \operatorname{sech}^2 \bar{p}. \quad (7.59)$$

Здесь $\bar{p} = / (r \div)$ (7.38). Выражение (7.59) подставляется в уравнение (7.30). Сравнивая там подобные члены, мы получаем следующие уравнения:

$$(A_a + c^* A) \operatorname{sech}^2 \bar{p} = 0, \quad (7.60)$$

$$(A\#^* + 12s^* / ^2) \operatorname{sech}^4 \bar{p} \tanh \bar{p} = 0, \quad (7.61)$$

$$(3 - 5^* + 4s^* / ^2) \operatorname{sech}^2 \bar{p} \tanh \bar{p} = 0. \quad (7.62)$$

Таким образом, решение (7.59) определяется алгебраическими уравнениями (7.60)–(7.62). Рассмотрим их решение.

1. Из (7.60) определяем амплитуду волны

$$A = \bar{C} \exp \int [0.5(\rho^{-1} h^{-1} \bar{s} - 1.5gh_a C^{-1})(ghC^{-1})^{-1} da]. \quad (7.63)$$

Если мы положим, как некоторое приближение, что $C^2 = gh$, то

$$A = \bar{C} h^{0.75} \exp\left(0.5g^{0.5} \rho^{-1} \bar{s} \int h^{1.5} da\right). \quad (7.64)$$

Таким образом, амплитуда волны возрастает, когда глубина уменьшается.

2. Уравнение (7.61) дает следующее соотношение:

$$/ ^2 = -\#^* (12s^*)^{-1}. \quad (7.65)$$

3. Используя (7.65), мы перепишем (7.62) в виде:

$$3 - 5^* A\#^* / 3 = 0. \quad (7.66)$$

Выражения (7.63), (7.65) и (7.66) можно рассмотреть как дисперсионные соотношения, связывающие $\bar{C}$, $/$ и 3 . Следовательно, один из волновых параметров может быть взят как независимый параметр, в то время как другие три могут быть выражены через него. В случае глубины, меняющейся по закону $h = \alpha a$, можно получить

$$A = \bar{C} (\# a)^{0.75} \exp(-g^{0.5} \#^{1.5} \rho^{-1} \bar{s} a^{0.5}). \quad (7.67)$$

Рассмотрим внимательно выражения (7.59) и (7.67). Читатель может видеть, что они напоминают решение Грина [66], [5, стр. 273–275]. В отличие от закона Грина наше решение учитывает донное трение.

Уравнение КдВ. Если $c^* = 0$, то (7.30) преобразуется в уравнение КдВ. В этом случае решение (7.59) справедливо, если

$$3 = \#^* A / 3, :^2 = -12s^* / A\#^*. \quad (7.68)$$

Выражения (7.68) совпадают с формулами (13.3) из [58].

Замечание. Уравнение КдВ использовалось неоднократно для описания развития цунами [3]. Поэтому полученные решения можно также использовать при изучении влияния переменной глубины на развитие прибрежных волн и цунами. Однако недавно применимость уравнения КдВ для описания цунами была поставлена под сомнение [47, 67].

7.6. Примеры прибрежного развития уединенной волны

Теперь, используя (6.74), (6.59), (7.64) и $G = u_r = Cu_a$, определим следующее линейное выражение для поднятия η :

$$\begin{aligned} \eta &= hGC^{-1} h_a \int Gdr = \\ &= -\bar{C}h^{0.75} \exp(0.5g^{0.5}\rho^{-1.5}\bar{s} \int h^{1.5}da)(hC^{-1} \operatorname{sech}^2 vr + h_a v^{-1} \tanh vr). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Если $\bar{s} = h_a = 0$, то (7.69) дает закон Грина для уединенной волны. В частности, в случае линейного склона (7.69) дает

$$\eta = -\bar{C}(\alpha a)^{0.75} \exp(g^{0.5}\#^{-1.5}\rho^{-1.5}\bar{s}a^{0.5})(\#aC^{-1} \operatorname{sech}^2 vr + \#v^{-1} \tanh vr). \quad (7.70)$$

Теперь, используя (7.70), мы можем изучить эффекты донного трения и наклона дна на прибрежное развитие волн, подобных солитону. Результаты вычислений представлены на рис. 87–89. Профили волн найдены для шести моментов времени. Рис. 87 и 88 соответствуют числовым данным, представленным на рис. 7 и 8 из [68].

Эффект донного трения демонстрирует рис. 87. Кривые А, В и С вычислены для различных значений коэффициента трения. Видно, что трение может полностью компенсировать усиление волны из-за уменьшения глубины.

Из рис. 87 и 88 видно, что профили волны изменяются вдоль переменного дна и зависят от угла его наклона. Далеко от прибрежной линии волна развивается медленно, но вблизи берега профиль волны и его амплитуда начинают меняться быстрее. В частности, с уменьшением глубины, волна становится круче и короче. Таким образом, аналитическое решение (7.70) согласуется с данными из [68].

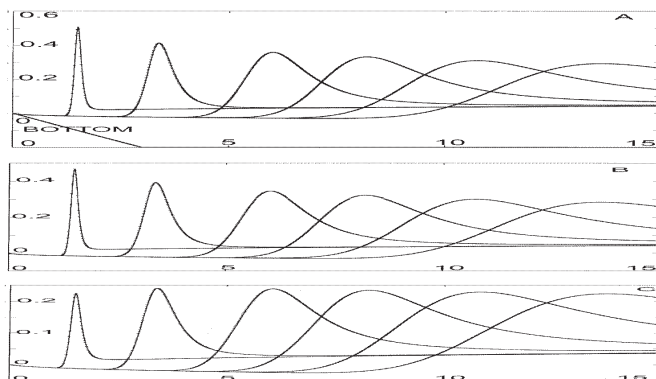


Рис. 87. Эффект донного трения на развитие уединенной волны. Профили А, В, и С вычислены для $g^{0.5} \alpha^{1.5} \rho^{-1} \bar{s} = 10^{-6}, 0.1$ и 1 , соответственно. Наклон дна — 1:15. Расстояние и амплитуда волн — в метрах.

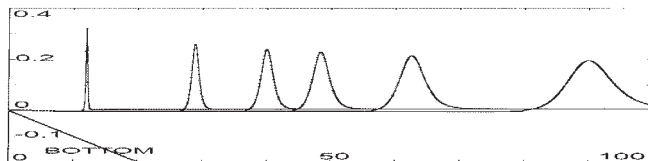


Рис 88. Волновые профили вычислены для $g^{0.5} \alpha^{1.5} \rho^{-1} \bar{s} = 10^{-6}$. Наклон дна — 0.01. Расстояние и амплитуда волн — в метрах.

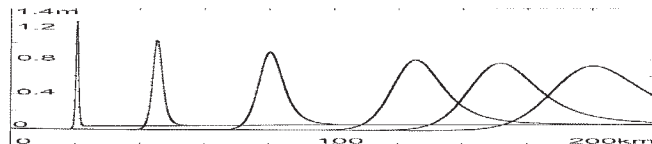


Рис. 89. Наклон дна — 0.002. Волновые профили вычислены для $g^{0.5} \alpha^{1.5} \rho^{-1} \bar{s} = 10^{-6}$.

Примем, что решение (7.70) качественно моделирует развитие цунами над континентальным шельфом. Расчеты, проведенные для этого случая, представлены на рис. 89.

Видно, что, согласно представленной теории, подобная солитону волна преобразовывается около берега в стену воды. Длина волны уменьшается, и высота волны увеличивается приблизительно в 1.5 раза. Позади волны имеется длинный хвост. Перед фронтом волны возникает отлив. В целом, последний результат согласуется с замечанием Дарвина ... *море отхлынуло от побережья* ... и с расчетами, представленными в третьей главе этой книги.

Мы продолжим моделирование волн цунами в главе 10.

8. Резонансные и трансрезонансные волны в длинных резонаторах

Согласно теории струн, Вселенная состоит из крошечных струн. Моды *резонансных* колебаний этих струн определяют, на уровне микромира, массы и константы взаимодействия элементарных частиц.

Брайан Грин [97]

Предыдущая глава является как бы введением в теорию резонансных катастрофических волн. В ней мы познакомились с ударными волнами и солитонами. В последующих главах книги мы будем часто возвращаться к этим волнам, которые, однако, будут рассматриваться как составляющие более широкого класса волн.

8.1. «Опасные» делители и самовозбуждение длинных катастрофических волн

Мы все более или менее знакомы с понятиями резонанса. Если мы растянем пружину (и тем самым выведем ее из положения равновесия), а затем ее отпустим, то пружина начнет совершать колебания с определенной характеристической частотой. Приложим теперь к пружине внешнюю силу, изменяющуюся с частотой, которая может варьироваться. Если две частоты (частота свободных колебаний пружины и частота изменений внешней силы) удовлетворяют какому-нибудь простому численному соотношению (если одна частота равна другой или больше ее в два, три, четыре... раза), то амплитуда колебаний пружины резко возрастает. То же самое имеет место и со струной, когда играют на каком-либо музыкальном инструменте. Еще древние греки обнаружили, что гармонические созвучия издают струны, длины которых относятся между собой, как некоторые целые числа. Эти числа можно поставить в соответствие современным резонансным частотам.

Движения планет греки также сводили к числовым соотношениям. По их представлениям каждому соотношению соответствовал свой звук. Причем звуки, издаваемые планетами, определяются их скоростью и находятся в определенной гармонии, так что все тоны движения небесных сфер совместно образуют гармонию сфер в смысле упорядоченной музыкальной шкалы. Коперник и Кеплер также начинали свои размышления с поиска некоторых математических соотношений, определяющих «музыку сфер». Несмотря на умозрительность всех этих прозрений, невольно закрадывается мысль о связи размышле-

ний древних греков, Коперника и Кеплера о некоторой всеобщей гармонии с современным понятием резонанса, волнами материи де Бройля и теорией Всего.

Явление резонанса было известно Галилею и Гюйгенсу (Huygens) почти четыре столетия назад. Резонанс был хорошо известен астрономам восемнадцатого столетия. Однако современная история резонансов фактически началась с исследований Пуанкаре [69] в конце девятнадцатого века. Рассматривая движения планет (так называемая проблема многих тел) [69], Пуанкаре показал, что решения соответствующих уравнений содержат так называемые «опасные» делители. Пуанкаре характеризовал возникшую трудность как «общую проблему динамики». Основоположник теории диссипативных структур Илья Пригожин (лауреат Нобелевской премии по химии 1977 года), анализируя процесс познания сложного в Природе наукой, пишет: «...можем ли мы «исключить» взаимодействия? Системы, для которых такое исключение возможно, Пуанкаре назвал «интегрируемыми» ...большинство динамических систем не интегрируемы и взаимодействия не могут быть исключены: причина того и другого кроется в возникновении резонансов...» [70, 71]. Это, как подчеркивает Пригожин, относится и к волнам. Во всякой сложной системе возможно огромное количество резонансов. Конечно, условия для возникновения резонансов еще не равнозначны их реализации в реальных условиях. Все это имеет место как во Вселенной, так и в сложной системе бесконечного количества взаимодействующих океанических волн.

«Опасные» делители. Как пример, следуя Пригожину [70, 71], рассмотрим систему, характеризуемую двумя частотами. По определению мы имеем резонанс, если $n_1/\omega_1 + n_2/\omega_2 = 0$, где ω_1 и ω_2 — частоты, а n_1 и n_2 — отличные от нуля целые числа. Резонансы приводят к появлению в решении членов с «опасными» делителями. В случае гармонического возбуждения эти делители имеют вид $1/(n_1/\omega_1 + n_2/\omega_2)$, а соответствующие члены уходят в бесконечность в случае резонанса. Подобная особенность может возникнуть в любой динамической системе.

Как иллюстрацию к проблеме «опасного» делителя в случае вынужденных волн мы рассмотрим результат Ламба [5]. Для этого, после сильного упрощения, мы переписываем уравнение (5.20) в виде, который использовал Ламб [5, стр. 263]:

$$u_{aa} + g\eta_a = \rho^{-1} p_{0,a}. \quad (8.1)$$

Здесь приближенно $\eta = hu_a$. Учитывая это и принимая бегущее по поверхности воды давление $p_0 = \rho f(Ut - a)$ Ламб нашел

$$\frac{\eta}{h} = \frac{p_0}{\rho(U^2 - gh)}. \quad (8.2)$$

Здесь U — скорость волны давления. Когда $U^2 \gg gh$, возвышение $\eta \rightarrow 9$. В реальной ситуации амплитуда волны растет до тех пор, пока нелинейные, вязкостные и другие эффекты не ограничивают рост амплитуды.

Эта глава — введение в проблему волнового резонанса, которая является одной из центральных в исследовании динамики волн. Обычно условие резонанса может быть получено из линейного анализа изучаемого процесса. Например, Ламб [5] использовал уравнение (8.1). Эти резонансы можно назвать *линейными* [72–75]. Однако исследование волн, возникающих в окрестности этих резонансов, требует использования нелинейных моделей.

Подчеркнем, что в последние десятилетия нелинейные математические модели начали широко использоваться для анализа различных процессов. При этом выявляются малые делители, которые не обнаруживаются при линейном анализе. Резонансы, которые появляются при нелинейном анализе, называются *нелинейными* [72–75]. Только нелинейные теории, которые как частный случай могут быть упрощены к линейным, позволяют определить весь комплекс резонансных явлений, обнаружить резонансную природу изучаемого явления.

Сведение задачи к самовозбуждению волн. Точные аналитические решения нелинейных проблем обычно невозможны. Поэтому широко используются приближенные методы решения нелинейных волновых уравнений. В частности, широко распространен так называемый метод возмущений или метод разложения по малому параметру. Согласно этому методу, искомая величина записывается в виде разложения

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots, \quad (8.3)$$

где $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ и $u^{(3)}$. Обычно приближенное решение проблемы описывается первыми членами разложения. Первый член разложения находится из решения линеаризованного исходного нелинейного уравнения. Последующие члены определяются соответствующими неоднородными линейными уравнениями. Хотя разложения (8.3) могут быть расходящимися, они могут быть полезными как для качественного, так и количественного описания изучаемых нелинейных явлений. По-видимому, Стокс (Stokes) предложил первым использовать разложение вида (8.3) при исследовании поверхностных волн.

Физически представление (8.3) эквивалентно предположению, что нелинейные волны являются суммой линейных волн. Однако представляется, что это не всегда так. В частности, указанный метод, основанный на представлении нелинейной волны в виде суммы линейных волн, не позволяет описывать

высоко-нелинейные волновые процессы, поэтому последние надо изучать с помощью других алгоритмов исследования. Один из таких алгоритмов мы предложили и развили в нескольких статьях [74–76] и книге [77]. Алгоритм предназначался для исследования ударных волн, возбуждаемых в окрестности нелинейного резонанса. Алгоритм исходит из того, что в случае катастрофических нелинейных волн (другими словами — при выполнении некоторых резонансных условий) в разложении (8.3) второй член может достигать значения первого члена и даже превосходить его. Конечно, в этом случае не выполняется условие $u^{(1)} \ll u^{(2)} \ll u^{(3)}$, являющееся основой традиционного применения разложения (8.3).

Суть алгоритма в следующем. Рассматривая катастрофические волны, мы ищем решение исходного нелинейного волнового уравнения как конечную сумму функций. Сумма подставляется в исходное волновое уравнение, из которого затем выводятся уравнения для каждого члена суммы. Первый член (первичная волна $u^{(1)}$) — решение линеаризованного исходного уравнения. Последующие члены суммы, кроме последнего, определяются из соответствующих линейных неоднородных волновых уравнений. Последний член суммы (в частности, он может быть вторым) учитывает все неучтенные до этого члены, вытекающие из исходного уравнения, и определяется из нелинейного неоднородного волнового уравнения. Например, для выражения (8.3) функция $u^{(3)}$ определяется нелинейным уравнением, в котором ранее найденные функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ определяют вынуждающие и параметрические члены. Согласно этому алгоритму, проблема катастрофических волн представляется как исследование самовозбуждения нелинейных волн в окрестности некоторых резонансных условий.

Таким образом, согласно описанному алгоритму, нелинейная задача сводится практически к решению задачи о вынужденных волнах, исследование которых принципиально отличается от исследования свободных нелинейных волн, рассмотренных в предыдущей главе. Вместе с тем, в силу единой природы нелинейных, дисперсионных и диссипативных процессов, исследование свободных и вынужденных волн имеет много общих черт.

Классы волн. Около резонансов влияние нелинейности, дисперсии и диссипации сильно увеличивается. Это влияние различно для различных океанских волн и глубин. Известно, что океанские волны можно разделить на три широких класса. Это — недисперсионные (например, цунами), слабо-дисперсионные (эти волны могут быть сформированы в прибрежной зоне) и дисперсионные волны. Океанские гравитационные волны — хороший пример дисперсионных волн.

В более грубом приближении можно разделить дисперсионные и когерентные волны. Дисперсионные волны не накапливают нелинейные эффекты, когерентные волны их накапливают и могут резонансно усиливаться. К последнему определению примыкает разделение волн на дисперсионные и резонансные. Мы полагаем, что даже на глубокой воде могут иногда реализовываться некоторые резонансные условия, например, за счет вертикальных и горизонтальных течений, ветра, градиентов солёности и температур. Наконец, сами нелинейные волны могут влиять на возникновение резонансных полос (резонансных условий). Возможно, что именно там возникает катастрофическое усиление волн. Можно говорить о существовании полос резонансных параметров, при которых появляется возможность такого усиления.

В некоторых случаях нелинейные волны можно определить как чисто резонансные. Они возникают, например, под действием неизменного гармонического возбуждения в резонаторах конечной длины. Мы рассмотрим подобные волны в следующей главе. Однако если частота возбуждения меняется в окрестности резонансной, то возникают волны, отличные от чисто резонансных. Их можно назвать трансрезонансными, так как каждая точка их волнового профиля определяется своим значением вынуждающей частоты. В случае океанических волн резонансные полосы могут возникать и существовать локально. Там длины волн могут быть вполне сопоставимы с шириной полосы. При этом каждая точка профиля волны соответствует различным параметрам резонансной полосы. По-видимому, это определяет их быструю эволюцию, неустойчивость и кратковременность существования. Такие волны также можно назвать трансрезонансными [79–81]. Однако, чтобы упростить терминологию, мы используем далее чаще термин катастрофические волны вместо трансрезонансные волны (см. также главу 14, раздел 16.4 и помещенное в конце книги заключение).

В этой главе мы рассматриваем слабо-дисперсионные резонансные волны. Изучены эффекты глубины и донного трения. Построены несколько приближенных решений для резонансных нелинейных океанских волн. В целом, можно сказать, что здесь подготавливаются расчетные модели для изучения нелинейной эволюции длинных волн и цунами над переменным дном. Эти модели будут использоваться в главе 10 и, более широко, в части III этой книги.

8.2. Пример нелинейного резонанса

Рассмотрим длинные слабо-дисперсионные волны для случая постоянной глубины. Используя размерные переменные, уравнение (6.107) переписываем в виде:

$$u_{tt} - gh u_{aa} = \left(\frac{1}{3} h^2 u_{taa} - \sigma \rho^{-1} h u_{aaa} \right) - 3gh u_a u_{aa}. \quad (8.4)$$

Здесь введен капиллярный член. Принято, что члены правой стороны в (8.4) намного меньше, чем члены левой стороны. Пусть

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}, \quad (8.5)$$

где $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$. Подставляем (8.5) в (8.4) и, приравнявая члены одинакового порядка, получим два следующих уравнения:

$$u_{tt}^{(1)} - gh u_{aa}^{(1)} = 0, \quad (8.6)$$

$$u_{tt}^{(2)} - gh u_{aa}^{(2)} = \left(\frac{1}{3} h^2 u_{taa} - \sigma \rho^{-1} h u_{aaa} \right)^{(1)} - 3gh u_a^{(1)} u_{aa}^{(1)}. \quad (8.7)$$

Решение уравнения (8.6) запишем в виде:

$$u^{(1)} = J(r), \quad r = t - C^{-1} a. \quad (8.8)$$

Здесь $C^2 = gh$. Уравнение для величин второго порядка (8.4) дает

$$u_{tt}^{(2)} - gh u_{aa}^{(2)} = C^{-2} \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} h C^{-2} \right) J^{>>> 3gh C^{-3} J J^{>} \quad (8.9)$$

где $J = J(r)$ и $J^{>} = J_r$. Таким образом, мы получили неоднородное линейное волновое уравнение для $u^{(2)}$. Решение (8.9) является суммой его общего и частного решений. Частное решение может быть записано так:

$$u^{(2)} = A_0 J^{>>> A_1 \int J^{>} dr, \quad (8.10)$$

Здесь

$$A_0 = \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} h C^{-2} \right) (C^2 - gh)^{-1}, \quad A_1 = 1.5gh C^{-1} (C^2 - gh)^{-1}. \quad (8.11)$$

Видно, что амплитуды A_0 и A_1 уходят в бесконечность, если $C^2 = gh$. Таким образом, согласно представленному идеализированному примеру, нелинейность и слабая дисперсия могут произвести на поверхности воды волны неограниченных амплитуд. Другими словами, у нас есть пример нелинейного резонанса. Конечно, в действительности усиление волн при резонансе ограничено донным трением, вязкостью и сложными нелинейными эффектами, которые не рассматриваются в этом примере.

8.3. Обобщения закона Грина

Пример линейного резонанса дает классический закон Грина [5, стр. 273–275] (см. также раздел 7.5), который иллюстрирует проблему «опасного»

делителя для случая свободных поверхностных волн. Согласно этому закону, возвышение η , если глубина воды $h > 0$.

8.3.1. Эффект донного трения

Используя размерные переменные, записываем уравнение (6.107) в виде, учитывающем донное трение

$$u_{tt} - gh u_{aa} - 2gh_a u_a - gh_{aa} u - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t = \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) u_{taa} - 3gh u_a u_{aa}. \quad (8.12)$$

Принимаем, что члены правой стороны в (8.12) намного меньше, чем члены левой стороны. Используя (8.5), перепишем (8.12) в виде:

$$(u_{tt} - gh u_{aa} - 2gh_a u_a - gh_{aa} u - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t)^{(1)} + (u_{tt} - gh u_{aa} - 2gh_a u_a - gh_{aa} u - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t)^{(2)} = \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) u_{taa}^{(1)} - 3gh(u_a u_{aa})^{(1)}. \quad (8.13)$$

Члены первого порядка дают

$$u_{tt}^{(1)} - gh u_{aa}^{(1)} - 2gh_a u_a^{(1)} - gh_{aa} u^{(1)} - \bar{s} \rho^{-1} h^{-1} u_t^{(1)} = 0. \quad (8.14)$$

Будем искать выражение для $u^{(1)}$ в виде суммы двух бегущих волн

$$u^{(1)} = A(a)[J(r) + j(s)], \quad (8.15)$$

где $A(a)$ — амплитуда, $J(r)$ и $j(s)$ — произвольные функции и

$$r = t - \tau(a), \quad s = t + \tau(a). \quad (8.16)$$

Для плоского дна решение (8.15) является решением Даламбера. Подставляя (8.15) в (8.14), мы получаем следующее уравнение для волны $J(r)$:

$$AJ \gg gh(AJ \gg_a^2 - A_a J \gg_a - AJ \gg_{aa} + A_a J_a + A_{aa} J) - 2gh_a(AJ_a + A_a J) - gh_{aa} AJ - \bar{s} \rho^{-1} h^{-1} AJ = 0. \quad (8.17)$$

Штрих обозначает дифференцирование относительно r , $A = A(a)$, $\tau = \tau(a)$ и $J = J(t - \tau)$. Затем, сравнивая подобные члены в (8.17), получим следующие уравнения:

$$(A - ghA\tau_a^2)J \gg 0, \quad (8.18)$$

$$(2ghA_a \tau_a + ghA \tau_{aa} + 2gh_a A \tau_a - \bar{s} \rho^{-1} h^{-1} A)J = 0. \quad (8.19)$$

Оставшиеся в (8.17) члены равны

$$\bar{A} = (ghA_{aa} + 2gh_a A_a + gh_{aa} A)J. \quad (8.20)$$

Уравнение (8.18) определяет ?:

$$\varphi_a^2 = (gh)^{-1} \text{ и } \varphi = 8 \int (gh)^{0.5} da + \bar{C}. \quad (8.21)$$

Теперь найдем амплитуду A (8.15). Уравнение (8.19) переписывается в виде:

$$\varphi_{aa} \varphi_a^{-1} = -2h^{-1} h_a + \bar{s} g^{-1} \rho^{-1} h^2 \varphi_a^{-1} - 2A_a A^{-1}. \quad (8.22)$$

Если донное трение не слишком велико, то решая (8.22) при учете (8.21), получим

$$\varphi_a = \bar{C} h^{-2} A^{-2} \exp\left(\bar{s} g^{-0.5} \rho^{-1} \int h^{1.5} da\right). \quad (8.23)$$

Используя (8.21), мы определяем A из (8.23) так:

$$A = \bar{C} h^{0.75} g^{0.25} \exp\left(0.5 \bar{s} g^{-0.5} \rho^{-1} \int h^{1.5} da\right). \quad (8.24)$$

Таким образом, амплитуда A экспоненциально зависит от донного трения. В целом этот результат согласуется с (7.67). В (8.24) величина $\bar{C}$ — произвольная постоянная. Согласно (8.24), развитие прибрежной волны может сильно зависеть от $\bar{s}$, даже если коэффициент трения $\bar{s}$ очень мал. В частности, если $\bar{s} \neq 0$, тогда $A \neq \infty$, даже если $h = 0$. Если коэффициент донного трения $\bar{s} = 0$, то мы имеем хорошо известную особенность решения Грина при $h = 0$.

Мы рассмотрели волну J . Подобные результаты имеют место и для волны j (8.15). Теперь, используя (8.15), мы переписываем уравнение (8.13) в виде следующего линейного неоднородного уравнения для $u^{(2)}$:

$$\begin{aligned} (u_{tt} - gh u_{aa} - 2gh_a u_a - gh_{aa} u - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t)^{(2)} = \\ = \bar{A} + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) [A_{aa} (J \gg j) + \\ + 2A_a (j \gg J) + A (j \gg j) - 1.5gh (\varphi_a^2 A^2 J^2 + \varphi_a^2 A^2 j^2 + A_a^2 J^2 - \\ - 2\varphi_a A A_a J J + A_a^2 j^2 + 2\varphi_a A A_a j j + 2A_a^2 J j + \\ + 2\varphi_a A A_a j J - 2\varphi_a A A_a J j - 2\varphi_a^2 A^2 j J \varphi_a]. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Предполагается, что остаточный член $\bar{A}$ (8.20) является величиной второго порядка, поэтому мы ввели этот член в (8.25).

В заключение этого подраздела рассматриваем особый случай решения (8.15). Пусть $\bar{s} = 0$ и глубина меняется так медленно, что в масштабе длины волны $u^{(1)}$ можно положить $h_a = 0$. В этом случае (8.15) дает следующее решение Даламбера:

$$u^{(1)} = J(r) + j(s), \quad r = t - (gh)^{0.5} a, \quad s = t + (gh)^{0.5} a. \quad (8.26)$$

Именно это решение мы будем использовать при рассмотрении величин второго порядка.

8.3.2. Анализ квадратичных нелинейных эффектов

Длина волны, определяемая квадратичными членами в (8.13) (или уравнением (8.25)), может быть существенно меньше, чем длина волны $u^{(1)}$. Например, если $u_a^{(1)} = \cos \omega r$, тогда $u_a^{(1)} u_{aa}^{(1)}$ пропорциональна $\sin 2/r$. Если $u_a^{(1)} = \text{sech}^2/r$, тогда $u_a^{(1)} u_{aa}^{(1)}$ пропорциональна sech^5/r . Это значит, что приближенно h_a , h_{aa} , A_a и A_{aa} могут приниматься равными нулю в масштабе нелинейной волны $u^{(2)}$, что позволяет нам использовать (8.26) вместо (8.15), рассматривая нелинейные члены в (8.25). Вообще говоря, это не верно для A (8.20) и слабой дисперсии (см. уравнение (8.25)). Однако мы будем игнорировать возникающую погрешность, фиксируя внимание на оценке влияния нелинейности. Рассматривая величины второго порядка, мы полагаем для простоты $\bar{s} = 0$. Используя указанное, мы сводим (8.25) к следующему волновому уравнению:

$$u_{rr}^{(2)} - gh u_{aa}^{(2)} = \bar{A} + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) u_{aaa}^{(1)} - 3gh u_a^{(1)} u_{aa}^{(1)}. \quad (8.27)$$

Затем уравнение (8.27) переписывается в терминах переменных (8.26). Например, в этих переменных мы имеем

$$u_{rr}^{(2)} = u_{rr}^{(2)} + 2u_{rs}^{(2)} + u_{ss}^{(2)}, \quad u_a^{(1)} = g^{0.5} h^{0.5} (u_s^{(1)} - u_r^{(1)}). \quad (8.28)$$

Здесь подстрочные r и s обозначают частные производные относительно r и s (8.26), соответственно. С учетом сказанного из (8.27) получаем:

$$\begin{aligned} u^{(2)} = J_2^*(r) + j_2^*(s) + \frac{1}{4} \iint \bar{A} dr ds - \frac{3}{4} (gh)^{0.5} \iint (u_{ss}^{(1)} u_s^{(1)} - u_{rr}^{(1)} u_r^{(1)} + u_{rr}^{(1)} u_s^{(1)} - \\ - 2u_{sr}^{(1)} u_s^{(1)} + 2u_{sr}^{(1)} u_r^{(1)} - u_{ss}^{(1)} u_r^{(1)}) dr ds + \\ + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (gh)^{-1} (sJ \gg rj \gg) \end{aligned} \quad (8.29)$$

Здесь $J_2^*(r)$ и $j_2^*(s)$ — произвольные волновые функции. Подставим (8.26) в (8.29) и после интегрирования находим $u^{(2)}$. Выражения для $u^{(2)}$ (8.29) и $u^{(1)}$ (8.15) определяют u (8.5) в виде:

$$\begin{aligned} u = A(J + j) + J_2^*(r) + j_2^*(s) + \frac{1}{4} g(hA_{aa} + 2h_a A_a + h_{aa} A) \left(s \int J dr + r \int j ds \right) + \\ + \frac{3}{4} (gh)^{0.5} (0.5sJ^2 - jJ + Jj - 0.5rj^2) + \\ + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (gh)^{-1} (sJ \gg rj \gg) \end{aligned} \quad (8.30)$$

Штрих обозначает дифференцирование относительно соответствующих переменных r или s . В (8.30) величины h_a , h_{aa} , A_a и A_{aa} рассматриваются как постоянные. Видно, что некоторые коэффициенты в (8.30) линейно растут вместе с t . Соответствующие члены можно назвать сингулярными или резонансными. Таким образом, мы встретились с *нелинейным временным резонансом*. Выражение (8.30) может быть преобразовано с тем, чтобы исключить члены, явно зависящие от времени, которые устраняются, если

$$J_2^*(r) = J_2(r) - \frac{1}{4} g(hA_{aa} + 2h_a A_a + h_{aa} A) r \int J dr + \frac{3}{8} (gh)^{0.5} J^2 + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (gh)^{-1} r J \gg \gg \quad (8.31)$$

$$j_2^*(s) = j_2(s) - \frac{1}{4} g(hA_{aa} + 2h_a A_a + h_{aa} A) s \int j ds + \frac{3}{8} (gh)^{0.5} s j^2 + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (gh)^{-1} s j \gg \gg \quad (8.32)$$

где $J_2(r)$ и $j_2(s)$ — произвольные волновые функции. В этом случае выражение (8.30) дает

$$u = A(J + j) + J_2(r) + j_2(s) + \frac{1}{2} a(gh)^{0.5} g(hA_{aa} + 2h_a A_a + h_{aa} A) \left(\int J dr - \int j ds \right) + \frac{3}{4} a(gh)^{-1} (J^2 + j^2) + \frac{3}{4} (gh)^{0.5} (Jj - jJ) + + 2a \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (gh)^{1.5} (J \gg \gg j \gg \gg) \quad (8.33)$$

Мы подчеркиваем, что здесь есть члены, которые растут линейно вместе с координатой a . Мы снова встречаем резонанс. Назовем его *нелинейным пространственным резонансом*.

Теперь мы можем найти выражение для η . Сначала найдем u_a :

$$u_a = A_a(J + j) (gh)^{0.5} \left[A(J - j) + J - j \right] + \frac{3}{4} (Jj - jJ)_a + + \frac{1}{2} (A_{aa} + 2h^{-1} h_a A_a + h^{-1} h_{aa} A) \left[(gh)^{0.5} \left(\int J dr - \int j ds \right) - a(J + j) \right] + + \frac{3}{4} (gh)^{-1} (J^2 + j^2) - \frac{3}{2} a(gh)^{1.5} (J \gg \gg j \gg \gg) + + 2 \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (gh)^{1.5} [J \gg \gg j \gg \gg a(gh)^{0.5} (J \gg \gg + j \gg \gg)]. \quad (8.34)$$

Здесь $J_2 = J_2(r)$ и $j_2 = j_2(s)$. Выражение для η записываем, используя (6.75) ($\eta \approx hu_a + hu_a^2 h_a u$) и (8.34):

$$\begin{aligned} \eta = & h \left\{ A_a (J + j) + \frac{1}{2} (A_{aa} + 2h^{-1} h_a A_a + h^{-1} h_{aa} A) \right. \\ & \left[(gh)^{0.5} \left(\int J dr - \int j ds \right) - a(J + j) \right] \\ & (gh)^{0.5} \left[A(J \gg j) + J \gg j \gg \frac{3}{4} (Jj \gg jJ) \right] + \\ & + \frac{3}{4} (gh)^{-1} (J^2 + j^2) - \frac{3}{2} a(gh)^{-1.5} (J \gg j \gg j \gg J) \left. \right\} + hg^{-1} A^2 (J \gg j)^2 - h_a A (J + j) \\ & 2 \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) h^{0.5} g^{-1.5} [J \gg j \gg a(gh)^{0.5} (J \gg j \gg j \gg J)]. \quad (8.35) \end{aligned}$$

Рассматривая нелинейные члены, мы приняли в (8.35), что $h_a = 0$. Перепишем выражение (8.35), учитывая самый важный линейный член и резонансные члены. В этом случае мы имеем, что

$$\begin{aligned} \eta = & h^{0.5} g^{-0.5} (AJ \gg Aj) + J \gg j \gg + \frac{1}{2} (hA_{aa} + 2h_a A_a + h_{aa} A) a(J + j) + \\ & + \frac{3}{2} ah^{0.5} g^{-1.5} (J \gg j \gg j \gg J) + 2a \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) g^{-2} h^{-1} (J \gg j \gg j \gg J). \quad (8.36) \end{aligned}$$

Согласно (8.36), появление резонансных членов может быть связано не только с нелинейностью, но также и с дисперсией, поверхностным натяжением и наклоном дна.

Волны, бегущие в одном направлении (односторонние волны). Выражение (8.35) может быть упрощено для односторонних волн. Например, если $u^{(1)} = u^{(1)}(r)$, $j = j_2(s) = 0$, то (8.35) дает

$$\begin{aligned} \eta \approx & h \left\{ A_a J + \frac{1}{2} (A_{aa} + 2h^{-1} h_a A_a + h^{-1} h_{aa} A) \right. \\ & \left[(gh)^{0.5} \left(\int J dr - aJ \right) \right] \\ & (gh)^{0.5} (AJ \gg J) + \frac{3}{4} (gh)^{-1} J^2 - \frac{3}{2} a(gh)^{-1.5} J \gg J \left. \right\} + \\ & + g^{-1} A^2 J^2 - h_a AJ - 2g^{-1} \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (J \gg a g^{0.5} h^{0.5} J \gg J). \quad (8.37) \end{aligned}$$

Заключение. Представленная в данном разделе теория принимает во внимание эффекты нелинейности и донного трения на развитие волны над слабо наклонным дном. Резонансный рост амплитуды связан как с нелинейностью, так и наклоном дна. Согласно теории (см., в частности, (8.24)), эффект донного

трения очень важен, если $h \neq 0$. Этот результат согласуется с данными разделов (7.5) и (7.6). В отличие от закона Грина, выражения (8.35) и (8.37) конечны даже, когда $h=0$. Конечно, формально, нелинейные выражения, представленные выше, действительны только для малых величин a , когда $u^{(1)} \ll u^{(2)}$.

8.3.3. Закон Грина

Выражение $\eta \approx hu_a^{(1)}$ и (8.15), (8.16), (8.21), (8.24) дают

$$\eta = \bar{C} [h^{0.25} g^{0.25} (J > j) + g^{0.25} h^{0.75} (0.75 h_a - 0.5 \bar{\rho}^{-1} h^{0.5} g^{0.5}) (J + j)] \exp(0.5 \bar{\rho}^{-0.5} \int h^{1.5} da). \quad (8.38)$$

Можно видеть, что эффект донного трения становится очень важным, когда $h \neq 0$. Однако для областей, не слишком близких к береговой линии, мы можем принять $\bar{s} = 0$. Тогда выражение (8.38) дает

$$\eta = \bar{C} h^{0.25} g^{0.25} (J > j) - 0.75 \bar{C} h_a h^{0.75} g^{0.25} (J + j). \quad (8.39)$$

Если наклон дна очень мал, так что

$$h^{0.25} g^{0.25} (J' - j') \ll 0.75 h_a h^{0.75} g^{0.25} (J + j),$$

то (8.39) сводится к закону Грина [66], [1, стр. 274]:

$$\eta \approx \bar{C} h^{0.25} g^{0.25} (J > j). \quad (8.40)$$

Легко заметить, что согласно закону Грина, амплитуда волны уходит в бесконечность, когда глубина уменьшается до нуля.

8.3.4. Закон Грина для слабо-дисперсионных гармонических волн

В этой подсекции мы примем, что нелинейный эффект меньше, чем эффект дисперсии. Это случай, когда дисперсионный член

$$\left(\frac{1}{3} h^2 - \bar{\rho}^{-1} g^{-1} \right) u_{ttt} \quad (8.41)$$

в уравнении (8.12) значительно больше, чем нелинейный член. Следуя подразделу 8.3.1, мы запишем (8.12) в виде:

$$\begin{aligned} & [u_{tt} - gh u_{aa} - 2gh_a u_a - gh_{aa} u - \bar{\rho}^{-1} h^{-1} u_t, \left(\frac{1}{3} h^2 - \bar{\rho}^{-1} g^{-1} \right) u_{ttt}]^{(1)} + \\ & + [u_{tt} - gh u_{aa} - 2gh_a u_a - gh_{aa} u - \bar{\rho}^{-1} h^{-1} u_t, \left(\frac{1}{3} h^2 - \bar{\rho}^{-1} g^{-1} \right) u_{ttt}]^{(2)} = \\ & = -3gh u_a^{(1)} u_{aa}^{(1)}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Рассмотрим в этом уравнении величины первого порядка. Пусть

$$u_{aa}^{(1)} = K_1 u_a^{(1)} + \bar{K}_1(a, t). \quad (8.43)$$

Здесь K_1 и $\bar{K}_1(a, t)$ — неизвестные функции, которые могут быть найдены после определения $u^{(1)}$. Другими словами, уравнение (8.43) определяет K_1 и $\bar{K}_1(a, t)$, если $u^{(1)}$ известна. Члены первого порядка в (8.42) дают

$$u_a^{(1)} \left[1 - \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) K_1 \right] - \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) \bar{K}_1 - gh u_{aa}^{(1)} - 2gh_a u_a^{(1)} - gh_{aa} u^{(1)} - \bar{\sigma} \rho^{-1} h^{-1} u_t^{(1)} = 0. \quad (8.44)$$

Здесь $\bar{K}_1 = \bar{K}_1(a, t)$. Предположим, что в (8.44) член $\left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) \bar{K}_1$ — величина второго порядка. В этом случае уравнение (8.44) отличается от (8.14) только коэффициентом при $u_a^{(1)}$. Затем, следуя подразделу 8.3.1, находим (8.15), где

$$r = t - \tau(a), s = t + \tau(a), \\ \tau(a) = \tau = 8 \int \left[1 - \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) K_1 \right]^{0.5} (gh)^{0.5} da. \quad (8.45)$$

Амплитуда волны $u^{(1)}$ определяется выражением (8.24). В результате, рассматривая гравитационную волну, бегущую в одну сторону, мы можем записать:

$$u^{(1)} = \bar{C} h^{0.75} g^{0.25} \exp(0.5 \bar{\sigma} g^{0.5} \rho^{-1} \int h^{-1.5} da) J \times \\ \left\{ t - \int \left[1 - \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) K_1 \right]^{0.5} (gh)^{0.5} da \right\}. \quad (8.46)$$

Теперь мы можем определить K_1 . Подставим (8.46) в (8.43) и получим уравнение для отыскания K_1 :

$$\left(1 - \frac{1}{3} h^2 K_1 \right) J_{rrr} \left[t - \int \left(1 - \frac{1}{3} h^2 K_1 \right)^{0.5} (gh)^{0.5} da \right] = \\ = gh K_1 J_{rr} \left[t - \int \left(1 - \frac{1}{3} h^2 K_1 \right)^{0.5} (gh)^{0.5} da \right]. \quad (8.47)$$

Пример. Пусть $J = \cos/r$, тогда (8.47) дает

$$K_1 = \left(\frac{1}{3} h^2 - gh/r^2 \right)^{-1}. \quad (8.48)$$

Вместо (8.20) мы имеем теперь, что

$$\bar{A} = g(hA_{aa} + 2h_a A_a + h_{aa} A)(J + j) + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) \bar{K}_1(t, a). \quad (8.49)$$

Линейное выражение для поверхностной волны имеет вид:

$$\eta^{(1)} = -hu_a^{(1)} \quad h_a u^{(1)} = hA(J_a + j_a) \quad h_a A(J + j). \quad (8.50)$$

Здесь скорость волны $J = J(r)$ и $j = j(s)$ зависит от частоты (дисперсии) (см. (8.45) и (8.43)). Выражения (8.50), (8.46) и (8.45), учитывающие дисперсию, обобщают классический закон Грина (8.40).

8.4. Самовозбужденные резонансные волны конечной амплитуды

Мы рассмотрели слабо-нелинейную волну, предполагая, что нелинейная компонента волны меньше, чем линейная компонента. Например, если в (8.5) амплитуда линейной компоненты $u^{(1)}$ имеет порядок 0.3, то амплитуда величины $u^{(2)}$ может быть порядка 0.1. Поэтому можно ожидать, что любая попытка изучить сильно-нелинейные эффекты с помощью выражения, подобного (8.5), потерпит неудачу. Однако это не так, если самые важные линейные члены волнового уравнения уничтожают друг друга. В результате, влияние нелинейности становится более важным, чем суммарное влияние линейных членов, хотя каждый линейный член больше, чем нелинейные члены. В (8.13) это имеет место, если $u_{\pi}^{(1)} \sim gh u_{aa}^{(1)}$.

Подобное резонансное усиление длинных волн может иметь место в окрестности точки, где скорость волны приблизительно равняется $\sqrt{gh}$. Рассмотрим упрощенный вариант уравнения (7.24):

$$(1 + u_a) u_{\pi} - g(2h_a u_a + h_{aa} u) \quad gh u_{aa} + \\ + 2gh u_a u_{aa} - 3gh u_a^2 u_{aa} \quad \frac{1}{3} h^2 u_{\pi aa} = 0. \quad (8.51)$$

Эффекты вязкости, донного трения и капиллярности игнорируются в (8.51). Используя (8.5), запишем (8.51) в виде:

$$(u^{(1)} + u^{(2)})_{\pi} - gh(u^{(1)} + u^{(2)})_{aa} + (u^{(1)} + u^{(2)})_a (u^{(1)} + u^{(2)})_{\pi} \\ - g[2h_a (u^{(1)} + u^{(2)})_a + h_{aa} (u^{(1)} + u^{(2)})] + \\ + 2gh(u^{(1)} + u^{(2)})_a (u^{(1)} + u^{(2)})_{aa} - 3gh(u^{(1)} + u^{(2)})_a^2 (u^{(1)} + u^{(2)})_{aa} - \\ - \frac{1}{3} h^2 (u^{(1)} + u^{(2)})_{\pi aa} = 0. \quad (8.52)$$

Теперь рассмотрим пример, поясняющий качественно идею о нелинейном резонансном самовозбуждении поверхностной волны. Сначала напомним, что на поверхности океана одновременно может существовать множество волн, имеющих разные длины и направления движения. Они движутся с разными скоростями, зависящими от глубины, ветра, течения и других факторов

(рис. 116). Здесь продемонстрируем влияние глубины. Рассмотрим первичные волны $u^{(1)}$, приближающиеся к подводной возвышенности (рис. 90).

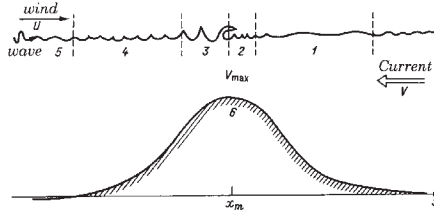


Рис. 90. Схема усиления первичных океанских волн над подводной возвышенностью: 1 — зона длинных волн, возникающих в начале возвышенности перед набегающими океанскими волнами; 2 — переходная зона; 3 — зона сильно-нелинейных волн; 4 — зона коротких волн; 5 — зона океанских волн; 6 — подводная возвышенность; x_m — точка максимальной скорости течения [82].

Над вершиной возвышенности $\frac{1}{3}h_m^2 \rightarrow 0$. Тогда (8.52) приближенно дает

$$u_{\pi}^{(2)} - gh u_{aa}^{(2)} + (u^{(1)} + u^{(2)})_a (u^{(1)} + u^{(2)})_{\pi} - g(2h_a u_a^{(2)} + h_{aa} u^{(2)}) + 2gh(u^{(1)} + u^{(2)})_a (u^{(1)} + u^{(2)})_{aa} - 3gh(u^{(1)} + u^{(2)})_a^2 (u^{(1)} + u^{(2)})_{aa} = 0. \quad (8.53)$$

Здесь $u^{(1)}$ — решение уравнения $gh_m u_{aa}^{(1)} - u_{\pi}^{(1)} - g(2h_a u_a^{(1)} + h_{aa} u^{(1)}) = 0$, h_m — наименьшая глубина над вершиной. Назовем соответствующую точку вершины критической (резонансной) точкой. Уравнение (8.53) — нелинейное неоднородное волновое уравнение, описывающее резонансное усиление $u^{(2)}$. Запишем уравнение (8.53) в следующем виде:

$$u_{\pi}^{(2)} - gh u_{aa}^{(2)} + u_a^{(2)} u_{\pi}^{(2)} + gh(u_a^{(2)})_a^2 - gh(u_a^{(2)})_a^3 = -2ghu_a^{(1)} u_{aa}^{(1)} - u_a^{(1)} u_{\pi}^{(1)}, \quad (8.54)$$

где мы отбросили некоторые малые члены и проигнорировали взаимодействие волн $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$.

Рассмотрим случай волн, бегущих в одну сторону со скоростью $(gh_m)^{0.5}$:

$$u^{(1)} \rightarrow u^{(1)}[t - \alpha(gh_k)^{0.5}] \text{ и } u^{(2)} \rightarrow u^{(2)}[t - \alpha(gh_k)^{0.5}].$$

В этом случае мы имеем следующее обыкновенное уравнение для резонансных волн $u^{(2)}$:

$$g(h_k - h)u_{aa}^{(2)} + 15gh(u_a^{(2)})_a^2 - gh(u_a^{(2)})_a^3 = 3ghu_a^{(1)} u_{aa}^{(1)}. \quad (8.55)$$

В точном резонансе, когда $h = h_m$, мы имеем следующее кубическое алгебраическое уравнение для резонансных волн $u^{(2)}$:

$$15gh(u_a^{(2)})_a^2 - gh(u_a^{(2)})_a^3 = 3ghu_a^{(1)} u_{aa}^{(1)}. \quad (8.56)$$

Трансрезонантное развитие волны приближенно описывается уравнением (8.55). Очевидно, что внутри резонансной полосы, где разность $h_m - h$ мала, могут генерироваться различные волны. Например, у границы полосы (у подножия возвышенности) могут превалировать квадратичные эффекты, и справедливо следующее уравнение:

$$g(h_k - h)u_{aa}^{(2)} + 1.5gh(u_a^{(2)})_a^2 = 3ghu_a^{(1)}u_{aa}^{(1)}, \quad (8.57)$$

в то время как над вершиной (рис. 90) могут преобладать кубически нелинейные эффекты. В частности, в случае достаточно длинных волн, различные точки волны могут быть расположены в различных точках резонансной полосы. Например, в случае подводной возвышенности, различные точки профиля волны проходят одновременно различные зоны возвышенности. Вся волна может быть расположена в пределах возвышенности, другими словами, в пределах различных зон резонансной полосы. Возникающая при таких условиях волна названа трансрезонантной [79–81]. Развитие подобных океанских волн может быть очень сложным. В частности, мы полагаем, что образование и эволюция катастрофических океанских волн определяются трансрезонантным развитием океанских волн, которые имеют вполне умеренные амплитуды вдали от резонансной полосы. Отметим, что основной последующий объем частей II и III книги посвящен исследованию резонансного и трансрезонантного преобразования океанских волн в катастрофические.

8.4.1. Основные исходные соотношения

Начнем с того, что учтем влияние дисперсии на трансрезонансное преобразование океанских волн в катастрофические.

Рассмотрим эволюцию волн, используя уравнение (7.24):

$$\begin{aligned} (1 + u_a)u_{tt} - g(2h_a u_a + h_{aa} u) - gh u_{aa} + gh(2 - 3u_a)u_a u_{aa} & \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) u_{taa} = \\ = 2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} (2hu_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa} u_t) + \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Выражение для u ищется в виде суммы волн, бегущих в одном направлении

$$u = A(a)J(r) + u^{(2)}, \quad (8.59)$$

где

$$u^{(2)} = \bar{J}(r) \text{ и } r = t - \tau(a), \quad (8.60)$$

$$\tau(a) = \int C^{-1}(a) da, \quad C(a) = C_0 + C_d + C_n. \quad (8.61)$$

Составляющие $A(a)J(r)$ и $u^{(2)} = \bar{J}(r)$ в (8.59) учитывают линейный и нелинейный эффекты, соответственно. Выражение $A(a)J(r)$ в (8.59) можно рас-

смагивать как частный случай (8.15). В (8.61) $C_0 = \sqrt{gh}$, величины C_d и C_n учитывают дисперсионный и нелинейный эффекты, соответственно.

Подставляя (8.59) в (8.58), получим уравнение, которое можно разбить на два уравнения. Первое — линейное уравнение:

$$\begin{aligned} & AJ_{rr} gh(AJ_{rr}^2 - 2A_a J_r^2 - AJ_r^2) + 2gh_a AJ_r^2 - \\ & \left(\frac{1}{3} h^2 \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (AK_1 J_{rr}^2 - A_a K_2 J_r^2 - AK_2 J_r^2 - C^{-1} K_2 A_a J_r + A_{aa} J_{rr}) - \\ & - \rho^{-1} h^{-1} (2\bar{\mu} h_{aa} + \bar{s}) AJ_r - 4\bar{3} \rho^{-1} [A_a^2 K_2 J_r - (2A_a^2 + A_{aa}^2) J_{rr} + A_{aa} J_r] - \\ & 4\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} h_a (A_a J_r - AJ_{rr} C^{-1}) = 0, \end{aligned} \quad (8.62)$$

и второе уравнение — нелинейное:

$$\begin{aligned} & \bar{J}_{tt} - g(h\bar{J}_{aa} + 2h_a \bar{J}_a + h_{aa} \bar{J}) \left(\frac{1}{3} h^2 \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) \bar{J}_{tt} - \\ & - 2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} (2h\bar{J}_{taa} + 2h_a \bar{J}_{at} + h_{aa} \bar{J}_t) - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} \bar{J}_t = \\ & = \bar{A} - (3 - 6u_a) g h u_{aa}. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Здесь $A = A(a)$ и $C = C(a)$. Мы ввели в (8.63) остаточный член, аналогичный (8.46). Этот член имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{A} = & (ghA_{aa} + 2gh_a A_a + gh_{aa} A) J \left(\frac{1}{3} h^2 \rho^{-1} h \sigma \right) [(A_a^2 + A_{aa}^2 + C^{-1} A_a) \bar{K}_2 - \\ & - A_a^2 \bar{K}_1] + 4\bar{3} \rho^{-1} A_a^2 \bar{K}_2. \end{aligned} \quad (8.64)$$

В (8.63) мы игнорируем взаимодействие нелинейных эффектов с дисперсией, дном и вязкостными эффектами. При выводе (8.62), (8.63) мы использовали также, что $C^{-1} = C^{-1}(a)$, $\sigma(a) = \int C^{-1}(a) da$, и ввели следующие соотношения, соответствующие (8.43):

$$J_{rrr}(r) = K_1 J_{rr}(r) + \bar{K}_1(r), \quad J_{rr}(r) = K_2 J_r(r) + \bar{K}_2(r), \quad (8.65)$$

здесь K_1 и K_2 — неизвестные константы и $\bar{K}_1(r)$ и $\bar{K}_2(r)$ — неизвестные функции. Их величины определяются параметрами задачи. Как примеры, мы определим K_1 , K_2 , $\bar{K}_1(r)$ и $\bar{K}_2(r)$ для синусоидальных волн и для уединенной волны.

Пример 1. Пусть $J_r = B \sin r$, где B — константа. В этом случае $K_1 = -B^2$, $K_2 = -B^2$ и $\bar{K}_1(r) = 0$, $\bar{K}_2(r) = 0$.

Пример 2. Пусть $J_r = B \tanh r$. В этом случае $K_1 = -2B^2$, $K_2 = -2B^2$ и $\bar{K}_1(r) = 6\omega^2 \text{sech}^4 / r \sinh^2 / r$, $\bar{K}_2(r) = 2\omega \tanh^3 / r$.

Решение линейного уравнения (8.62). Решение сводится к определению неизвестных C_d и A . Найдём сначала C_d .

Приравнивая в (8.62) члены, пропорциональные J_{rr} , мы получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[A - \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) A_{aa} \right] (C_d^2 + 2C_0 C_d) - \\ & - \left[ghA + \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) AK_1 \right] J_{rr} + \theta_1(t, a) = 0, \end{aligned} \quad (8.66)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(t, a) = & \left\{ \left[A - \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) A_{aa} \right] C_d^2 + \right. \\ & \left. + 4\bar{\mu} \rho^{-1} C [2A_a + AC(C^{-1})_a + h^{-1} h_a A] \right\} J_{rr}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

В случае длинных волн и слабвязких жидкостей величина $\theta_1(t, a)$ пренебрежимо мала. Поэтому (8.66) дает

$$\begin{aligned} C_d & \approx 0.5 A^{-1} (gh)^{0.5} \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) \\ & \left[AK_1 + ghA_{aa} + K_1 \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) A_{aa} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (8.68)$$

Если $A_{aa} \rightarrow 0$, то из (8.68) следует

$$C_d \approx 0.5 (gh)^{0.5} \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) K_1. \quad (8.69)$$

В частности, для синусоидальных волн

$$C_d \approx 0.5 (gh)^{0.5} \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) / l^2. \quad (8.70)$$

Для уединенной волны, если $J = l \int \text{sech}^2 / r dr$

$$C_d \approx 4 (gh)^{0.5} \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) / l^2. \quad (8.71)$$

Для уединенной волны, если $J = l \int \text{sech} / r dr$,

$$C_d \approx \frac{5}{2} (gh)^{0.5} \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) / l^2. \quad (8.72)$$

Для уединенной волны, если $J = l \int \tanh / r dr$,

$$C_d \approx (gh)^{0.5} \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) / l^2. \quad (8.73)$$

Если $J = l \int \text{sech}^{0.5} r dr$, тогда

$$C_a = \frac{7}{4} (gh)^{0.5} \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right)^{1/2}. \quad (8.74)$$

Таким образом, мы определили аргумент бегущей волны (см. (8.60) и (8.61)) выражением (8.69). Затем мы определим амплитуду A в решении (8.59). Приравнявая в (8.62) члены, пропорциональные J_r , мы получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[2gh\phi_a + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) (K_2?_a + C^{-1} K_2) \right] A_a + \theta_2(t, a) = \\ & = \left[-gh?_{aa} \quad 2gh_a?_a \quad \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) K_2?_{aa} + \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} \right] A, \end{aligned} \quad (8.75)$$

где

$$\theta_2(t, a) = -2\bar{\mu} \rho^{-1} [h^{-1} h_{aa} A + 2(AC^{-2} K_2 + A_{aa}) + 2h^{-1} h_a A_a]. \quad (8.76)$$

Мы будем игнорировать малую величину $\theta_2(t, a)$. В результате, уравнение (8.75) упрощается и дает

$$\begin{aligned} \ln A = & -\frac{1}{2} \int \left[Cgh(C^{-1})_a + 2gh_a + C \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) K_2(C^{-1})_a - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} \right] \\ & \left[gh + \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) K_2 \right]^1 da + \ln \hat{C}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Если эффекты дисперсии и капиллярности незначительны, то (8.77) дает (8.24).

Таким образом, (8.77), (8.60), (8.61), (8.65) и (8.69) определяют закон Грина для линейной части решения (8.59). Теперь может быть рассмотрено нелинейное уравнение (8.63).

8.4.2. Нелинейное самовозбуждение резонансных длинных волн

Используя (8.59) и (8.60), запишем уравнение (8.63) в виде:

$$\begin{aligned} (1 - ghC^{-2} - C^{-1} \bar{J}_r - 2ghC^{-3} \bar{J}_r - 6ghC^{-4} \bar{J}_r^2) \bar{J}_{rr} - (1 + 2ghC^{-2}) AC^{-1} (\bar{J}_r J_r)_r - \\ - 6ghC^{-4} (A^2 J_r^2 \bar{J}_r + A \bar{J}_r^2 J_r)_r - (2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} h_{aa} + \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} - 2gh_a C^{-1}) \bar{J}_r - \\ - gh_{aa} \bar{J} - \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) C^{-2} \bar{J}_{rrr} - 2\bar{\mu} \rho^{-1} (2C^{-2} \bar{J}_{rrr} - 2h_a h^{-1} C^{-1} \bar{J}_{rr}) = \\ = A^2 C^{-1} (1 + 2ghC^{-2} + 6ghAC^{-3} J_r) J_r J_{rr} + \bar{A}. \end{aligned} \quad (8.78)$$

Мы получили нелинейное волновое уравнение с вынуждающими членами, которые мы поместили в левой части уравнения. Отметим присутствие в (8.78) членов

$$(1 + 2ghC^{-2})AC^{-1}(\bar{J}_r J_r)_r - 6ghC^{-4}(A^2 J_r^2 \bar{J}_r + A \bar{J}_r^2 J_r)_r,$$

которые, с некоторой долей условности, можно назвать параметрическими.

Рассмотрим три частных случая уравнения (8.78).

1. Пусть $h_a \rightarrow 0$, $h_{aa} \rightarrow 0$ и $J(r) \approx \bar{J}(r)$. Тогда для невязкой модели воды мы можем записать следующую линеаризованную версию (8.78): $(1 - ghC^{-2})\bar{J}_{rr} = A^2 C^{-1} J_r J_{rr}$. Примем, что $J_r = l \sin \theta / r$. В этом случае вынуждающий член — $0.5 C^{-1} / l^2 \sin 2\theta / r$ и последнее уравнение дает $\bar{J}_{rr} = A^* \sin 2\theta / r$, где $A^* = 0.5 A^2 \times C^{-1} / l^2 (1 - ghC^{-2})^{-1}$.

Таким образом, решение линеаризованного уравнения имеет особенность в точке, где $C^2 = gh$. Этим примером мы еще раз подчеркнули математическую трудность (появление малого делителя или нелинейного резонанса) исследования многих нелинейных волновых уравнений.

2. Уравнение (8.78) имеет особенность для некоторых величин параметров, когда

$$ghC^{-2} + \bar{J}_r C^{-1} + 2ghC^{-3} \bar{J}_r + 6ghC^{-4} \bar{J}_r^2 = 1. \quad (8.79)$$

Это случай *высоко-нелинейного резонанса*. Очевидно, что решения уравнения (8.78) зависят от выполнения условия резонанса (8.79). Когда амплитуда волны увеличивается, решение может коснуться условия (8.79) в некоторой точке. После этого там уравнение (8.78) не применимо. В окрестности этой точки мы должны принять во внимание нелинейные эффекты четвертого порядка. Например, уравнение (6.121) может приблизительно описать развитие волн, проходящих эту особенность. Естественно, что около особенности влияние нелинейностей, вязкости и дисперсии может существенно измениться.

3. Задача упрощается, если рассматриваются волны, распространяющиеся по воде, глубина которой очень слабо меняется в масштабе длины волны. Тогда, в пределах длины волны, мы можем рассматривать глубину как константу. В этом случае, если параметры волны далеки от резонансных, уравнение (8.78) дает

$$\begin{aligned} & (1 - ghC^{-2} - 0.5C^{-1} \bar{J}_r - ghC^{-3} \bar{J}_r - 2ghC^{-4} \bar{J}_r^2) \bar{J}_r \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) C^2 \bar{J}_{rr} \\ & - (1 + 2ghC^{-2}) AC^{-1} J_r \bar{J}_r - 6ghAC^{-4} (A J_r^2 \bar{J}_r + \bar{J}_r^2 J_r) \\ & (\rho^{-1} h^{-1} \bar{s} - 2gh_a C^{-1}) \bar{J} - 2\bar{\mu} \rho^{-1} (2C^{-2} \bar{J}_{rr} - 2h_a h^{-1} C^{-1} \bar{J}_r) = \\ & = A^2 C^{-1} (0.5 + ghC^{-2} + 2ghC^{-3} A J_r) J_r^2 + \int \bar{A} dr + \bar{C}. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Здесь и ниже $\bar{C}$ — константа интегрирования. В следующем разделе этой главы мы изучим развитие волны в окрестности особых случаев условия (8.79).

8.5. Каскад резонансов и усиление длинных волн в окрестности нелинейных резонансов

Цель этого раздела состоит в том, чтобы изучить возможность образования резонансных длинных океанских волн. Развитие системы в области резонанса зависит от многих обстоятельств. В частности, результат развития может определяться в первую очередь нелинейными и диссипативными эффектами. После интегрирования уравнение (8.80) дает

$$\begin{aligned} & [1 \quad ghC^2 \quad (1+2ghC^2)AC^{-1}J_r \quad 6ghA^2C^4J_r^2 \\ & -(0.5C^{-1} + ghC^3 + 6ghAC^4J_r)\bar{J}_r \quad 2ghC^4\bar{J}_r^2]\bar{J}_r = \\ & \left(\frac{1}{3}h^2 \quad \sigma\rho^{-1}g^{-1} \right) C^2\bar{J}_{rr} \quad \rho^{-1}h^{-1}\bar{s}\bar{J} \quad 4\bar{J}\rho^{-1}C^2\bar{J}_{rr} = \\ & = f(J_r) + \int \bar{A}dr + \bar{C}. \end{aligned} \quad (8.81)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(J_r) &= A^2C^{-1}(0.5 + ghC^2 + 2ghC^3AJ_r)J_r^2 \\ \text{и } \bar{A} &= \left[\left(\frac{1}{3}h^2 - \rho^{-1}h\sigma \right) \bar{K}_1 + 4\bar{J}\rho^{-1}\bar{K}_2 \right] A^2. \end{aligned}$$

Видно, что в (8.81) линейная составляющая решения (8.59) — функция J_r — порождает силу, определяющую решение уравнения (8.81) (т.е. нелинейную составляющую в (8.59)). Выше линейная составляющая J_r определена так, что ее аргумент зависит от дисперсии. В противоположность этому здесь основное внимание уделяется проявлению нелинейности. При этом предполагается, что волна очень сильно усиливается в резонансной области, однако эта область проходится так быстро, что влияние дисперсии на нелинейную эволюцию волны не успевает проявиться. Поэтому в этом разделе при изучении резонансных нелинейных эффектов мы пренебрегаем в (8.81) влиянием дисперсии, т.е. полагаем, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}h^2 \quad \sigma\rho^{-1}g^{-1} \right) C^2\bar{J}_{rr} = 0 \\ \text{и } \bar{A} &= \left[\left(\frac{1}{3}h^2 - \rho^{-1}h\sigma \right) \bar{K}_1 + 4\bar{J}\rho^{-1}\bar{K}_2 \right] A^2 = 0. \end{aligned} \quad (8.82)$$

Эффекты дисперсии на нелинейное резонансное усиление волн будут рассмотрены в разделе 8.6. Этому же вопросу будет посвящена значительная часть объема части III этой книги.

8.5.1. Простейший нелинейный резонанс

Пусть скорость волны не зависит от нелинейности и J_r . В этом случае $C = C_0 + C_d$ и уравнение (8.81) может быть переписано в упрощенном виде:

$$-1.5C^{-1}\bar{J}_r^2 + (2C_d - 3AJ_r)C^{-1}\bar{J}_r - \rho^{-1}h^{-1}\bar{s}\bar{J} - 4\mu\rho^{-1}C^{-2}\bar{J}_r = f(J_r) + \bar{C}, \quad (8.83)$$

где C_d определяется выражением (8.69). В (8.83) $\bar{J}$ рассматривается как волна умеренной амплитуды, и поэтому там кубические нелинейные члены отброшены. Напомним, что изучается случай медленно изменяющегося дна.

Рассмотрим два примера резонансного усиления волн.

Пример 1. Пусть

$$J_r = \varepsilon \sin / r. \quad (8.84)$$

Затем принимаем, что

$$C_d = \frac{1}{6}(gh)^{0.5}h^2 / ^2 \quad (8.70) \text{ и } \bar{C} = -1.5A^2C^{-1}1^2. \quad (8.84a)$$

Тогда простейшая версия уравнения (8.83) переписывается в виде:

$$1.5C^{-1}\bar{J}_r^2 - \left(\frac{1}{3}h / ^2g^{-1} + 3C^{-1}AJ_r\right)\bar{J}_r + 1.5A^2C^{-1}1^2 \cos^2 / r = 0. \quad (8.85)$$

Это уравнение имеет два непрерывных решения и одно разрывное решение, составленное из непрерывных решений. Случай разрывного решения будет подробно рассмотрен в разделе 8.6 и в части III книги. Непрерывные решения уравнения (8.85) определяются следующим выражением:

$$\bar{J}_r^8 = 0.5[-b(8(b^2 + 4A^21^2 \cos^2 / r)^{0.5})]. \quad (8.86)$$

Здесь $b = \frac{1}{3}h / ^2g^{-1} + 3C^{-1}AJ_r$. Теперь, используя (8.59), (8.60), мы можем найти поднятие $\eta \approx hu_a$:

$$\eta_8 = h\varepsilon AC^{-1} \sin / r - hC^{-1}\bar{J}_r^8. \quad (8.87)$$

В точках, где $b = 0$, решение (8.87) дает

$$\eta \approx h\varepsilon AC^{-1}(\sin / r + \cos / r). \quad (8.88)$$

Вдали от резонансной полосы, где $h > 0$,

$$\eta = h\varepsilon AC^{-1} \sin / r. \quad (8.89)$$

Решение (8.88) качественно иллюстрирует резонансное усиление гармонических океанских волн, когда $u^{(2)}$ может равняться и даже превосходить линейную составляющую решения (8.59).

Пример 2. Пусть

$$J_r = \varepsilon \operatorname{sech} / r. \quad (8.90)$$

В этом случае (8.85) дает

$$15C^{-1}\bar{J}_r^2 + \left(\frac{1}{3}h/r^2 g^{-1} + 3C^{-1}AJ_r \right) \bar{J}_r - 15A^2C^{-1/2} \tanh^2 / r = 0. \quad (8.91)$$

Это уравнение имеет два непрерывных решения и одно разрывное решение, составленное из непрерывных решений. Непрерывные решения определяются следующим выражением:

$$\bar{J}_r^8 = 0.5[-b/8(b^2 + 4A^2/r^2 \tanh^2 / r)^{0.5}]. \quad (9.92)$$

Выражение для η_8 имеет вид, аналогичный (8.87). В точках, где $b=0$, решение (8.92) дает

$$\eta \approx h\varepsilon AC^{-1}(\operatorname{sech} / r + \tanh / r). \quad (8.93)$$

Вдали от резонансной полосы, где $h \rightarrow 0$, функция $\bar{J}_r \rightarrow 0$ и

$$\eta \rightarrow h\varepsilon AC^{-1} \operatorname{sech} / r. \quad (8.94)$$

Решение (8.93) показывает возможность резонансного усиления уединенных океанских волн, при котором амплитуда нелинейной волны может равняться амплитуде первоначальной (линейной) волны.

Мы думаем, что резонансные решения (8.88) и (8.93) качественно показывают возможность резонансного механизма образования длинных катастрофических океанских волн при прохождении ими вытянутых подводных возвышенностей. В частности, решение (8.93) дает удвоение высоты начальной волны (8.94) в резонансе.

8.5.2. Квадратичный нелинейный резонанс

В пределах рассмотренного выше резонанса амплитуда волны $\bar{J}$ может так сильно возрасти, что величина $1 - ghC^{-2} - \frac{1}{2}C(1 + 2ghC^{-2})\bar{J}_r$ в (8.81) может практически упасть до нуля. Это приводит к вырождению уравнения. Условие

$$C^2 \approx (C + C_n)^2 \approx gh + \frac{1}{2}C(1 + 2ghC^{-2})\bar{J}_r, \quad (8.95)$$

было названо квадратичным нелинейным резонансом [35]. Чтобы изучить соответствующие резонансные волны, мы должны решить уравнение (8.81) в ок-

рестности (8.95). Это весьма сложная задача. В частности, потому что C в (8.95) зависит от неизвестной $\bar{J}_r$. Примем, как первое грубое приближение, что $C^2 = gh$. Тогда уравнение (8.95) определяет упрощенное выражение для скорости волны $C \approx \sqrt{gh} + C_n$, где $C_n = 1.5\bar{J}_r$. Пусть

$$\hat{\eta} = h\bar{J}_a, \quad (8.96)$$

где $\hat{\eta}$ — нелинейная составляющая поверхностной волны. Тогда мы имеем

$$C = \sqrt{gh}(1 - 1.5C\bar{J}_a / \sqrt{gh}) = \sqrt{gh}(1 + 1.5\hat{\eta} / h). \quad (8.97)$$

Выражение (8.97) согласуется с хорошо известной скоростью распространения нелинейных волн [1, стр. 262]. Из (8.97) следует, что около побережья нелинейный эффект может сильно изменить скорость волны C . Скорость C зависит также от дисперсии. Поэтому мы можем приближенно записать:

$$C = \sqrt{gh}(1 + 1.5\hat{\eta} / h) + C_d, \quad (8.98)$$

т.е. в некотором приближении, скорость не зависит от взаимодействия волновых и дисперсионных эффектов. При этом

$$C^2 = gh + 3\sqrt{gh}\bar{J}_r + 2\sqrt{gh}C_d. \quad (8.99)$$

Здесь C_d определяет (8.69). Теперь мы переписываем (8.81) в окрестности (8.99). Рассматривая невязкую жидкость и очень медленно изменяющуюся глубину, из (8.81) получим, что

$$2ghC^2\bar{J}_r^3 - (3ghC^2AJ_r + 0.5C + ghC^1)\bar{J}_r^2 + (C^2 - gh)\bar{J}_r - C^2(AC^1J_r + 2ghC^3AJ_r + 3ghC^4A^2J_r^2)\bar{J}_r = f(J_r) + \bar{C}. \quad (8.100)$$

Затем используем (8.99). В этом случае уравнение (8.100) приближенно дает

$$2\bar{J}_r^3 - (3ghC^2AJ_r + 1.5\sqrt{gh})\bar{J}_r^2 + \sqrt{gh}(3\bar{J}_r + 2C_d)\bar{J}_r + gh(AC^1J_r - 2C^1AJ_r - 3C^2A^2J_r^2)\bar{J}_r = f(J_r) + \bar{C}. \quad (8.101)$$

Учитывая (8.96) и отбрасывая члены, содержащие J_r , мы имеем около квадратичного резонанса, что

$$\hat{\eta}^3 - 0.75C^1\sqrt{gh}h\hat{\eta}^2 - \sqrt{gh}C^2C_dh^2\hat{\eta} + 0.5C^1h^3[f(J_r) + \bar{C}] = 0. \quad (8.102)$$

Как пример использования полученного уравнения рассмотрим следующую уединенную волну:

$$J_r = \varepsilon \operatorname{sech}^2 / r, \quad \bar{C} = 0. \quad (8.103)$$

Принимая во внимание только основную резонансную вынуждающую компоненту в $f(J_r)$ (8.82), мы записываем (8.102) в следующем виде:

$$\hat{\eta}^3 - 0.75C^1\sqrt{gh}h\hat{\eta}^2 - \sqrt{gh}C^2C_dh^2\hat{\eta} + 0.75A^2h^3C^2\operatorname{sech}^4 / r = 0, \quad (8.104)$$

где $C_d = -\frac{4}{3}(gh)^{0.5}h^{2/3}$ (8.71). Это кубическое нелинейное алгебраическое

уравнение ясно иллюстрирует резонансное усиление уединенной волны около прибрежной линии, где $C_d \neq 0$. Уравнение (8.104) будет использоваться в главе 10 при исследовании прибрежной эволюции цунами.

8.5.3. Кубический нелинейный резонанс

Около резонанса (8.99) волна $\bar{J}_r$ может вырасти настолько, что величина $1 - ghC^2 - C^4 \bar{J}_r - 2ghC^3 \bar{J}_r - 3ghC^4 \bar{J}_r^2$ в (8.81) уменьшится до нуля и

$$C^2 \approx gh + C\bar{J}_r + 2ghC^3 \bar{J}_r + 3ghC^4 \bar{J}_r^2. \quad (8.105)$$

Условие (8.105) назовем кубическим нелинейным резонансом. Используя (8.105), мы находим приближенно, что $C = \sqrt{gh + C_n}$, где

$$C_n = 15\bar{J}_r - \frac{3}{32}(gh)^{0.5}\bar{J}_r^2.$$

В пределах резонансной полосы

$$C = \sqrt{gh + 15\bar{J}_r} - \frac{3}{32}(gh)^{0.5}\bar{J}_r^2 + C_d, \quad (8.106)$$

где C_d определяется (8.69).

Таким образом, уравнение (8.80) определяет каскад резонансов. В пределах этого каскада может иметь место эволюция уравнений, описывающих пространство длинных волн. Эта эволюция отражает сложный характер конкуренции нелинейных, дисперсионных и пространственных эффектов, имеющих место в океане над участками «мелкой воды». В частности, мы полагаем, прибрежная эволюция длинных волн определяется этим каскадом. Сначала имеет место простой нелинейный резонанс. Если амплитуда волны увеличивается достаточно сильно, то могут иметь место следующие нелинейные резонансы. Развитием волн внутри этого каскада можно объяснить усиление океанских волн, бегущих над подводными вытянутыми возвышенностями.

Подчеркивается, что в разделах 8.4 и 8.5 мы начали рассмотрение важной для нашего исследования проблемы самовозбуждения катастрофических океанских волн. Волновое уравнение (8.58) сводится к линейному (8.62) и нелинейному (8.63) уравнениям. Соотношения типа закона Грина определяют решение линейного уравнения и дисперсионное отношение для линейной составляющей решения. Уравнение для нелинейной компоненты $\bar{J}(r)$ определяет резонансное усиление волны. Иногда это уравнение может быть упрощено к нелинейному алгебраическому уравнению. В точном резонансе амплитуда

волны может вырасти в два и более раз. Возникающая катастрофическая волна может иметь очень крутой фронт (см. (8.93)).

8.6. Нелинейные составляющие самовозбуждающихся резонансных волн. Общая квадратичная теория

В предыдущем разделе мы дали несколько примеров аналитического рассмотрения нелинейных компонент самовозбуждающихся резонансных волн. Здесь мы распространим наш анализ на более общие случаи.

Если взаимодействие первичной волны J и вторичной, нелинейной ее составляющей $\bar{J}$ незначительно, то уравнение (8.80) дает

$$B\bar{J}_r + \alpha_* \bar{J}_r^2 + \beta_* \bar{J}_r^3 + b_1 \bar{J} + \chi \bar{J}_{rr} - k \#_* \bar{J}_{rrr} = F + \bar{F} + \bar{C}. \quad (8.107)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B &= ghC^2 - 1 - 4\bar{\mu}\rho^{-1}h_a h^{-1}C^{-1}, \#_* = 0.5C^{-1} + ghC^{-3}, \beta_* = 2ghC^{-4}, \\ k &= -\left(\frac{1}{3}h^2 - \sigma\rho^{-1}g^{-1}\right)\#_*^{-1}C^{-2}, b_1 = \rho^{-1}h^{-1}\bar{s} - 2gh_a C^{-1}, \chi = 4\bar{\mu}\rho^{-1}C^{-2}, \\ F &= -C^{-1}(0.5 + ghC^{-2})J_r^2, \bar{F} = -C^{-1}(ghC^{-3}J_r + ghC^{-4}J_r^2)J_r^2. \end{aligned} \quad (8.108)$$

Обсуждение резонанса начнем с рассмотрения случая, когда $\bar{F} \rightarrow 0$, $b_1 = 0$ и влиянием нелинейных эффектов можно пренебречь. Пусть первичная волна определяет функцию F в (8.107) следующим образом:

$$F = 1(1 + \cos 2/r). \quad (8.109)$$

Уравнение (8.107) примет следующий упрощенный вид:

$$B\bar{J}_r + \chi \bar{J}_{rr} - k\alpha_* \bar{J}_{rrr} = 1(1 + \cos 2/r) + \bar{C}. \quad (8.110)$$

Пусть $\bar{C} = -1$ в (8.110). Полное решение уравнения (8.110) состоит из решения однородного уравнения плюс частное решение. Однако, так как рассматриваются периодические волны, мы рассмотрим только частное решение, которое может быть представлено в виде:

$$\bar{J}_r = A_* \cos(2/r + \varphi), \quad (8.111)$$

где A_* и φ определяются соотношениями

$$A_* = -\varepsilon[(B + 4k\#_*^{-2})^2 + (2\chi)^2]^{-0.5}, \quad (8.112)$$

и

$$\varphi = \arg \tan[-2\chi(B + 4k\#_*^{-2})^{-1}]. \quad (8.113)$$

Из (8.112) видно, что амплитуда A_* зависит от дисперсии, кинематической вязкости и глубины. Зависимость от h очень важна. Из-за этой зависимости ам-

плитуда A_* может сильно вырасти около критической точки, где скорость C равна $\sqrt{gh}$. При резонансе величина A_* неограничена, если $\kappa = \chi = 0$.

Из (8.113) видно, что фаза сильно зависит от дисперсии, кинематической вязкости и скорости C . Далеко от резонанса первичная волна и волна $\bar{J}_r$ имеют почти одинаковые фазы. Однако около резонанса они расходятся почти на 90° . Когда волна $\bar{J}_r$ проходит резонанс, ее фаза почти на 180° отличается от фазы первичной волны.

Увеличение амплитуды в резонансе ограничено вязкими эффектами и дисперсией. Однако эти эффекты незначительны, например, для прибрежной волны. В этих случаях учет нелинейных эффектов очень важен.

8.6.1. Структура фронта волны

В этом разделе рассматриваются только квадратичные нелинейные волны. Примем, что

$$\bar{F} = 0 \text{ и } b = 0.25B^2\alpha_*^{-1} + \bar{C}.$$

В этом случае (8.107) дает

$$(\bar{J}_r + 0.5B\alpha_*^{-1})^2 + \chi\alpha_*^{-1}\bar{J}_{rr} + b_1\alpha_*^{-1}\bar{J} - \alpha_*^{-1}(F + b) = \kappa\bar{J}_{rrr}. \quad (8.114)$$

Решение ищется в виде:

$$\bar{J}_r = \alpha_*^{0.5}[-0.5B\alpha_*^{0.5} + \sqrt{b + \bar{F}} \cdot (r + \varphi)]. \quad (8.115)$$

Здесь $(r + \varphi)$ — неизвестная функция, а φ — волновая фаза. Подставляя (8.115) в (8.114), получим

$$\begin{aligned} & (b + F)(\alpha_*^2 - 1) + \chi\alpha_*^{0.5}[\alpha_*^{-1}(b + F)^{0.5} + 0.5 \cdot (b + F)^{0.5}F_r] = \\ & = \alpha_*^{0.5}\kappa(b + F)^{0.5}[\alpha_*^{-1}(b + F) + \alpha_*^{-1}F_r - 0.25 \cdot (b + F)^{-1}F_r^2 + 0.5 \cdot F_{rr}]. \end{aligned} \quad (8.116)$$

Здесь $\alpha_* = (r + \varphi)$. Мы приняли, что $b_1 = 0$. Используя (8.116), мы будем изучать образование резонансных катастрофических волн, имеющих очень крутые фронты.

Исследование начнем с рассмотрения структуры фронтов. Для этого примем, что α_* — быстро переменная функция, а F — медленно изменяющаяся функция, такая, что мы можем пренебречь членами $-0.25 \cdot (b + F)^{-1}F_r^2 + 0.5 \cdot F_{rr}$ в (8.116). Однако член $\alpha_*^{-1}F_r$ учитывается. В этом случае мы, приближенно, имеем, что

$$\begin{aligned} & (b + F)(\alpha_*^2 - 1) + \chi\alpha_*^{0.5}[\alpha_*^{-1}(b + F)^{0.5} = \\ & = \alpha_*^{0.5}\kappa(b + F)^{0.5}[\alpha_*^{-1}(b + F) + \alpha_*^{-1}F_r]. \end{aligned} \quad (8.117)$$

Можно видеть, что это уравнение принимает во внимание нелинейность, вязкость и дисперсию. Рассматривается очень пологий наклон дна, когда $h_a \rightarrow 0$. Полагаем далее

$$\eta = \eta_0 + \eta_1, \quad (8.118)$$

где η_0 и η_1 . Пусть в пределах фронта волны функция η_0 может меняться очень сильно, поэтому производная η_{0r} может быть очень большой в пределах крутого фронта волны. В то же время влияние вязкости и дисперсии на волну мало. В этом случае уравнение (8.117) дает два уравнения

$$\sqrt{b+F}(1 - \eta_0^2) = [\chi \alpha_*^{0.5} - k \#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r] \eta_{0r}, \quad (8.119)$$

$$[\chi \alpha_*^{-1} - k(b+F)^{-1} F_r] \eta_{1r} + 2 \#_*^{0.5} \sqrt{b+F} \eta_{0 \cdot 1} = \kappa \eta_{0rr}. \quad (8.120)$$

Теперь, используя (8.119) и (8.120), мы можем проанализировать влияние некоторых физических эффектов на волновое развитие. Во-первых, рассмотрим главный компонент η_0 выражения (8.118), используя уравнение (8.119).

Эффект нелинейности. Пусть $\kappa = \chi = 0$ и $b+F \neq 0$. Тогда $\eta_0 = \pm 1$. Теперь, пренебрегая вкладом η_1 и используя (8.118), (8.115), мы имеем два решения:

$$\eta_r^{(2)} = \bar{J}_r = 0.5 B \#_*^{-1} 8 \#_*^{0.5} \sqrt{b+F}. \quad (8.121)$$

Используя эти решения, мы можем построить единственное разрывное решение. Примеры такого решения будут даны в части III. Таким образом, в рассматриваемом варианте анализа квадратная нелинейность может сформировать разрывной фронт волны. Мы будем рассматривать разрывное решение как основу последующего анализа. Ниже другие члены уравнений (8.119) и (8.120) будут включены в рассмотрение и их преобразующий эффект будет обсужден.

Эффект слабой вязкости и слабой дисперсии. В этом случае из (8.119) следует уравнение

$$\sqrt{b+F} [\chi \alpha_*^{0.5} - k \#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r] \eta_1 = \eta_{0r} (1 - \eta_0^2)^{-1}. \quad (8.122)$$

После интегрирования находим

$$\eta_0 = \tanh \left\{ \int [\chi \alpha_*^{0.5} - k \#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r]^{-1} (b+F)^{0.5} dr + C^* \right\}. \quad (8.123)$$

Здесь C^* — константа интегрирования. Решение (8.123) очень хорошо моделирует разрывное решение (8.121), если

$$\int [\chi \alpha_*^{0.5} - k \#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r]^{-1} (b+F)^{0.5} dr + C^* \rightarrow 0.$$

Таким образом, (8.123) описывает аналитически ударные волны. Последний результат — важен. Мы использовали его, когда получали уравнение (8.119). Рассмотрим частные случаи решения (8.123).

1. Если $k \#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r \approx 0$, тогда (8.123) дает

$$\eta_0 = \tanh \left[\chi^{-1} \alpha_*^{0.5} \int (b + F)^{0.5} dr + C^* \right]. \quad (8.124)$$

Решение (8.124) — некоторая аналогия решения Честера [83] для резонансной волны в газе.

2. Пусть $\chi \alpha_*^{0.5} \gg 0$, тогда

$$\eta_0 = \tanh \left[-k^{-1} \#_*^{0.5} \int (b + F)^{1.5} F_r^{-1} dr + C^* \right]. \quad (8.125)$$

Таким образом, слабая дисперсия может преобразовать разрывной фронт волны в крутой непрерывный волновой фронт.

3. Пусть $\chi \alpha_*^{0.5} \ll \#_*^{0.5} (b + F)^{-1} F_r$. В этом случае (8.123) дает

$$\eta_0 = \tanh \left\{ \chi^{-1} \alpha_*^{0.5} \int [1 + k \#_*^{-1} (b + F)^{-1} F_r] (b + F)^{0.5} dr + C^* \right\}. \quad (8.126)$$

Из рассмотрения решений (8.123)–(8.126) видно, что они описывают фронт волны, на котором может иметь место очень быстрое, почти разрывное, изменение параметров волны.

Теперь, пренебрегая вкладом η_1 и используя (8.118), (8.115), мы можем записать непрерывное решение исходного уравнения (8.107) в следующем виде:

$$\bar{J}_r = u_r = 0.5 B \#_*^{-1} + \#_*^{0.5} \sqrt{b + F} \tanh \left\{ \int [\chi \alpha_*^{0.5} - k \#_*^{0.5} (b + F)^{-1} F_r]^{-1} (F + b)^{0.5} dr + C^* \right\}. \quad (8.127)$$

Согласно (8.127), нелинейность, слабая кинематическая вязкость и слабая дисперсия производят крутой, но непрерывный фронт волны. Фронт расположен в окрестности точки, где

$$\int [\chi \alpha_*^{0.5} - k \#_*^{0.5} (b + F)^{-1} F_r]^{-1} (F + b)^{0.5} dr + C^* = 0.$$

Теперь, используя представленные выше решения, мы можем рассмотреть компоненту η_1 (8.118) и уточнить выражение (8.127).

Эффект волновой компоненты η_1 . Этот эффект определен уравнением (8.120). Его решение имеет вид:

$$\eta_1 = y^{-1}(r) \left\{ k \int [\chi \alpha_*^{-1} - k(b + F)^{-1} F_r]^{-1} \eta_0 y(r) dr + \bar{C} \right\}, \quad (8.128)$$

где

$$y(r) = \exp \left\{ 2 \alpha_*^{0.5} \int \sqrt{b + F} [\chi \#_*^{-1} - k(b + F)^{-1} F_r]^{-1} \eta_0 dr \right\}. \quad (8.129)$$

Используя (8.128), (8.123), (8.118) и (8.110), запишем решение уравнения (8.109) в виде:

$$\bar{J}_r = u_r^{(2)} = 0.5 B \#_*^{-1} + \alpha_*^{0.5} \sqrt{b + F} \tanh \left\{ \int [\chi \#_*^{0.5} - k \#_*^{0.5} (b + F)^{-1} F_r]^{-1} (b + F)^{0.5} dr + C^* \right\} +$$

$$+ \alpha_*^{0.5} \sqrt{b+F} y^{-1}(r) \left\{ k \int [\chi \#_*^{-1} - k(b+F)^{-1} F_r]^{-1} \cdot_{orr} y(r) dr + \bar{C} \right\}. \quad (8.130)$$

Рассмотрим специальный случай уравнения (8.120), когда член $2\#_*^{0.5} \sqrt{b+F} \cdot_{0-1}$ пренебрежимо мал. Предположим также, что в пределах волнового фронта функция F изменяется очень слабо. Тогда

$$\begin{aligned} \cdot_{-1} &= [\chi \alpha_*^{0.5} - k\#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r]^{-1} \bar{C} + \\ &+ k \alpha_*^{0.5} \sqrt{b+F} [\chi \#_*^{0.5} - k\#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r]^{-2} \\ &\operatorname{sech}^2 \left\{ \int \sqrt{b+F} [\chi \alpha_*^{0.5} - k\#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r]^{-1} dr + C^* \right\}. \end{aligned} \quad (8.131)$$

Для этого специального случая (8.130) имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{J}_r = u_r^{(2)} &= 0.5 B \#_*^{-1} + \\ &+ \alpha_*^{0.5} \sqrt{b+F} \tanh \left\{ \int [\chi \#_*^{0.5} - k\#_*^{0.5} (b+F)^{-1} F_r]^{-1} (F+b)^{0.5} dr + C^* \right\} + \\ &+ \#_*^{0.5} \sqrt{b+F} \cdot_{-1}. \end{aligned} \quad (8.132)$$

Выражения (8.131) и (8.132) явно учитывают эффекты нелинейности, внутренней вязкости и дисперсии. Учет $\cdot_{-1}$ привел к образованию внутри фронта *волны, подобной солитону*.

Представленные решения и выражения позволяют изучить трансрезонантное изменение структуры фронта поверхностной волны. Для этого надо изменять скорость волны C в окрестности резонансной скорости $\sqrt{gh}$.

8.7. Влияние скорости волны, дисперсии и кубической нелинейности на зарождение хаотических волн

Здесь мы кратко рассмотрим влияние скорости волны, дисперсии и кубической нелинейности на процесс прохождения волной резонансной полосы.

8.7.1. Малые делители и сингулярные решения

Вернемся к уравнению (8.110). Запишем его, пренебрегая затуханием волн:

$$\bar{J}_{rrr} + \Omega^2 \bar{J}_r = 1 \cos 2/r. \quad (8.133)$$

Мы приняли в (8.110), что $\Omega^2 = -B(k\#_*)^{-1}$. В (8.133) мы переопределили амплитуду 1. Подчеркнем, что, в отличие от классического уравнения движения точечной массы в (8.133), первый член, который учитывает дисперсию, очень сильно меняется с глубиной (см. (8.108)). Напомним также, что $B = ghC^2 - 1$. Таким образом, $\Omega^2 \bar{J}_r$ тоже зависит от глубины. Видно, что возможна ситуация, когда левая часть уравнения (8.133) очень мала и необходим учет нелинейностей. Но пока мы продолжим рассмотрение (8.133). Общее решение имеет вид:

$$\bar{J}_r = A \sin(\Omega r + 2) + \frac{1}{\Omega^2 - 4} \cos 2r, \quad (8.134)$$

где амплитуда A и фаза 2 определяются начальными условиями. Решение, таким образом, представляет собой суперпозицию волн с собственной частотой Ω и вынуждающей частотой 2 . Решение содержит малый делитель. Решение несправедливо, когда выполняется следующее резонансное условие:

$$\Omega^2 = 4\omega^2. \quad (8.135)$$

Проследить поведение решения в пределе $\Omega \rightarrow 2$ можно, записав (8.134) в виде:

$$\bar{J}_r = A_* \sin(\Omega r + 2^*) + \frac{1}{\Omega^2 - 4} (\cos 2r - \cos \Omega r), \quad (8.136)$$

что всегда можно сделать, переопределив соответствующим образом амплитуду и фазу в (8.134). Предел $2/\Omega$ находим по правилу Лопиталя:

$$\bar{J}_r = A_* \sin(\Omega r + 2^*) + \frac{1}{2\Omega} r \sin \Omega r. \quad (8.137)$$

Решение содержит сингулярный член, включающий r . Подобные члены встретятся нам в решениях, построенных в главе 9. Пока подчеркнем, что этот член показывает неограниченный линейный рост амплитуды волны $\bar{J}_r$ при резонансе. Физически это соответствует извлечению (высасыванию) вторичной волной $\bar{J}_r$ энергии из первичной волны J_r [88]. Такое поведение волны принципиально отличается от поведения, описываемого квадратично-нелинейным уравнением (8.114), изученного нами в главе 8.6.

8.7.2. Трансрезонансное зарождение хаотических волн

Давайте рассмотрим влияние кубической нелинейности на волны $\bar{J}_r$. Запишем уравнение (8.107) в следующем упрощенном виде:

$$\bar{J}_{rrr} + \Omega^2 \bar{J}_r - \beta_*(k\alpha_*) \bar{J}_r^3 = 1 \cos 2r. \quad (8.138)$$

В этом случае резонанс по-прежнему имеет место, если $2/\Omega$. Но по мере возрастания амплитуды волны $\bar{J}_r$, ее частота будет тоже меняться, выводя волну из полосы резонансного возбуждения. В результате даже в точном резонансе (8.135) амплитуда волны $\bar{J}_r$ ограничена. Однако, при очень больших 1 , возможно зарождение многих дополнительных гармоник, кратных 2 . В этом режиме волновое движение приобретает хаотические черты, и может выглядеть чрезвычайно беспорядочным [88].

При учете вязкости уравнение (8.138) становится более сложным:

$$\bar{J}_{rrr} - \chi(k\alpha_*)^1 \bar{J}_{rr} + \Omega^2 \bar{J}_r - \beta_*(k\alpha_*)^1 \bar{J}_r^3 = 1 \cos 2r. \quad (8.139)$$

Это уравнение, записанное для однонаправленной волны, совпадает с хорошо изученным уравнением Дюффинга. Согласно ему, при малых Γ будут возбуждаться волны с частотой $2/\Gamma$. При увеличении Γ происходит бифуркация этого периода и возникает волна с удвоенной частотой $4/\Gamma$. При дальнейшем росте Γ бифуркации продолжают (учетверение периода и т.д.) до тех пор, пока движение волн не становится хаотичным.

Эти качественные рассуждения подкрепляются расчетами, приведенными в [89, 90]. Там изучались колебания точечной массы, описываемые уравнением

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + x - x^2 = F \sin \omega t. \quad (8.140)$$

Это уравнение соответствует (8.139). Поэтому результаты для точечной массы вполне переносимы на случай волны. Рассмотрим эти результаты, используя

рис. 91 из [89]. Рисунок демонстрирует динамику явлений, которые могут иметь место внутри резонансной полосы.

При расчетах амплитуда вынуждающих колебаний менялась, величина диссипативных потерь была фиксирована ($\beta=0.1$). При наименьшей из рассмотренных амплитуд вынуждающих колебаний ($F=0.0562$) внутри резонансной полосы могли возникать колебания двух разных амплитуд. Обе амплитуды хорошо поддаются расчету и явно отличны друг от друга. Частотный участок, на границах которого происходят скачки вверх-вниз, четко определен. Все сказанное соответствует расчетам, представленным на рис. 91(a), и полностью согласуется с хорошо известными результатами теории нелинейных колебаний. Если амплитуда вынуждающих колебаний растет, то частотный участок, на границах которого происходят скачки вверх-вниз, уменьшается. При некотором значении $F=0.08$, длина этого участка практически обращается в нуль и его границы становятся неопределенными (рис. 91(b)). При этом в расчетах бесконечно малое изменение исходных параметров может дать как конеч-

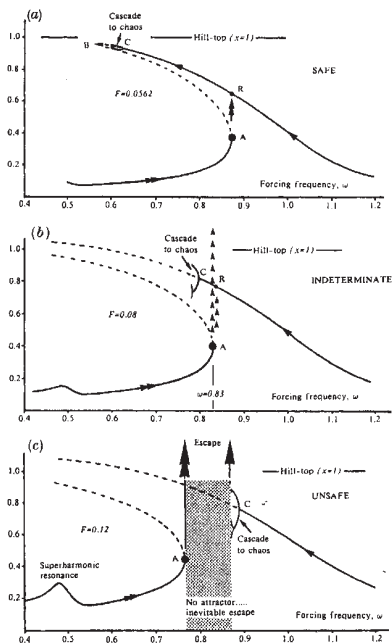


Рис. 91. Резонансные кривые, соответствующие уравнениям (8.139) или (8.140), которые демонстрируют сложное поведение системы, состоящей из точечной массы или океанской волны, проходящей резонансную полосу [89].

ную, так и бесконечно большую амплитуду колебаний. Если происходит дальнейшее увеличение амплитуды F , то внутри резонансной полосы возникает область хаотических вынужденных колебаний и бесконечных амплитуд. Когда вынуждающая частота попадает в эту область, то любое малейшее изменение параметров приводит к сколь угодно большому изменению решения (рис. 91(c)). Таким образом, приведенные на рис. 91 расчеты полностью соответствуют теории, предложенной 100 лет назад Пуанкаре. Уже в 1892 году Пуанкаре знал, что неинтегрируемая задача трех тел может давать полностью хаотические траектории их движения. Отметим также, что, хотя расчеты, представленные на рис. 91, получены для точечной массы, они, согласно развитой в книге теории, качественно справедливы и для достаточно сильных волн, например, в океане.

9. Решения типа Даламбера для волн в конечных резонаторах

Философия Природы написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами, — я разумею Вселенную, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики.

Галилей

Резонансы (резонансные частицы) — короткоживущие возбужденные состояния андронов.

Физический энциклопедический словарь,
Москва, 1984.

В открытом океане волны являются дисперсионными, и их скорость зависит от частоты, поэтому в общем случае волны в океане являются некогерентными. При этом нелинейность как бы является источником шума, и в этом случае возможно только весьма кратковременное существование резонансных условий для зарождения катастрофических волн. В противоположность, длинные слабо-дисперсионные и недисперсионные волны являются когерентными. При распространении они порождают новые волны, которые могут складываться, а их эффекты накапливаться. Самое эффективное накопление имеет место, когда выполняются резонансные условия. Эти случаи усиления волн являются самыми интересными с точки зрения приложений.

Выделены два типа резонансов. В первом случае имеет место выполнение некоторых критических условий для скоростей волн (см. разделы 8.1, 8.2, 8.5), во втором — выполняются некоторые условия для частот (8.135). Видимо, одновременное выполнение обоих условий — редкое событие. Можно предположить, что зарождение катастрофических океанских волн связано с таким совпадением.

Мы записали в главе 8 ряд решений, часто не конкретизируя вид первичной волны F , поэтому эти решения справедливы для различных волн. С другой стороны, наше исходное уравнение (8.58) (см. также (8.80) и (8.107)) также имеет весьма общий вид. Из него как частный случай следуют уравнения, которые справедливы для резонансных колебаний различных сплошных сред как в неограниченных, так и в конечных резонаторах (например, трубах). Развивая такой подход, мы решили в этой главе привести весьма общие решения уравнений для длинных волн, которые справедливы как для конечных, так и бесконечных сред.

В случае одномерного распространения и малой амплитуды эти волны описываются решением Даламбера. Здесь это решение обобщается на случай высоко-нелинейных волн. При этом учитываются слабо-дисперсионные и вязкие эффекты. Согласно этому решению, любая периодическая волна на поверхности океана может произвести все возрастающее количество гармоник с быстро растущими амплитудами. Стабильность эволюции волны нарушается, эффекты, вначале пренебрежимо малые, становятся доминирующими. Все это отражает тот факт, что из-за нелинейности среды возникающая на поверхности океана волна теряет устойчивость. Однако до этого момента волна может достигнуть катастрофических размеров.

9.1. Деформируемые координаты. Аналитическое решение нелинейного волнового уравнения

Кубически-нелинейные и слабо-дисперсионные волны, распространяющиеся на поверхности слабовязкой жидкости, описываются следующим уравнением:

$$u_{tt} - C^2 u_{aa} = (\beta u_a + \beta_1 u_a^2) u_{aa} + 4\beta \rho^{-1} u_{taa} + k u_{aat} + \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t - 4k \left(u_a u_{at} + \frac{1}{2} u_{at}^2 \right)_a. \quad (9.1)$$

Здесь $C^2 = gh$ и $\beta = -3C^2$, $\beta_1 = 6C^2$, $k = \frac{1}{3} h^2$, а член $4k \left(u_a u_{at} + \frac{1}{2} u_{at}^2 \right)_a$ имеет второй порядок малости, так как рассматривается мелкая вода. Здесь мы используем обозначение $k = \frac{1}{3} h^2$. Его не надо путать с коэффициентом k в уравнении (8.107), где $k = - \left(\frac{1}{3} h^2 \quad \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right)_{\#}^* C^2$ (см. (8.108)). Используя одно

и то же обозначение, мы подчеркиваем, что оба коэффициента определяют дисперсионный член. Уравнение (9.1) справедливо для плоского дна, когда $h_a = h_{aa} = 0$. Уравнения, подобные (9.1), описывают также волны в вязком и теплопроводящем газе (см., например, [5, стр. 481]), в пузырьковых жидкостях (см. уравнение (I.70) из [77]), в стержнях и слоях из нелинейных вязкоупругих материалов [75, 76, 91].

Уравнение (9.1) следует из уравнения (6.121):

$$(1 + u_a)(u_{tt} - C^2 u_{aa}) - \frac{1}{3} h^2 (1 + u_a)^3 u_{aat} + \frac{4}{3} h^2 (1 + u_a)^4 u_{at} u_{aat} - 2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} (2h u_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa} u_t) - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} u_t = 0, \quad (9.2)$$

где

$$C_1^2 \approx gh(1+u_a)^3 - \frac{4}{3}h^2u_{att}. \quad (9.3)$$

Подставляя (9.3) в (9.2), мы получаем

$$u_{tt} - C_0^2(1+u_a)^3u_{aa} + \frac{4}{3}h^2u_{aa}u_{att} - \frac{1}{3}h^2u_{aatt} + \frac{4}{3}h^2u_a u_{aatt} + \frac{4}{3}h^2u_{at}u_{aat} - \\ - 2\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}(2hu_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa}u_t) - \rho^{-1}h^{-1}\bar{s}u_t = 0. \quad (9.4)$$

Это уравнение дает (9.1). Уравнение (9.1) может быть решено методом, предложенным в [76]. Введем координаты r и s :

$$r = t - aC^{-1} + \frac{1}{4}\beta uC^{-3}, \quad s = t + aC^{-1} - \frac{1}{4}\beta uC^{-3}. \quad (9.5)$$

Эти координаты назовем деформируемыми, так как они зависят от неизвестного перемещения u . Далее находим выражения для членов в (9.1). Например,

$$u_t = u_r r_t + u_s s_t = u_r \left(1 + \frac{1}{4}\beta C^{-3}u_t\right) + u_s \left(1 - \frac{1}{4}\beta C^{-3}u_t\right) \\ \approx (u_r + u_s)[1 + A_*(u_r - u_s) + A_*^2(u_r - u_s)^2],$$

где $A_* = -\frac{3}{4}C^{-1}$ и подстрочные r и s определяют частные производные по r и s .

Подставляя найденные выражения в (9.1) и пренебрегая членами четвертого порядка, мы можем записать (9.1) в виде:

$$u_{rs} = A_*(u_s u_{ss} - u_r u_{rr}) + a_* u_r u_s (u_{rr} + u_{ss}) + b_* [u_{rr}(u_s)^2 + u_{ss}(u_r)^2] + \\ + c_* [u_{rr}(u_r)^2 + u_{ss}(u_s)^2] + \frac{1}{4}\rho^{-1}h^{-1}\bar{s}(u_r + u_s) + \\ + \frac{1}{2}kC^{-1}[(u_{at}^2)_s - (u_{at}^2)_r - 2(u_a u_{at})_{ss} + 2(u_a u_{at})_{rr}] + \\ + C^{-2} \left[\bar{\mu}\rho^{-1}(u_{rrr} - u_{rrs} - u_{ssr} + u_{sss}) + \frac{1}{4}k(u_{rrrr} - 2u_{rrss} + u_{ssss}) \right]. \quad (9.6)$$

Здесь $a_* = 5A_*^2 - 2D_*$, $b_* = 2A_*^2 + D_*$, $c_* = 4A_*^2 + D_*$, $D_* = \frac{1}{4}\beta_1 C^{-4}$. Решение

ищется как сумма:

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots, \quad (9.7)$$

где $u^{(1)}$ & $u^{(2)}$ & $u^{(3)}$. Подставляя (9.7) в (9.6) и приравнявая члены одного порядка, получим три линейных дифференциальных уравнения для $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и $u^{(3)}$:

$$u_{rs}^{(1)} = 0, \quad (9.8)$$

$$u_{rs}^{(2)} = A_*(u_s u_{ss} - u_r u_{rr}) + \frac{1}{4} \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}(u_r + u_s) C^{-2} \left[\bar{\mu} \rho^{-1} (u_{rrr} - u_{rrs} - u_{ssr} + u_{sss}) + \frac{1}{4} k(u_{rrrr} - 2u_{rrss} + u_{ssss}) \right], \quad (9.9)$$

$$u_{rs}^{(3)} = A_*(u_s u_{ss} - u_r u_{rr}) + a_* u_r u_s (u_{rr} + u_{ss}) + b_* [u_{rr} (u_s)^2 + u_{ss} (u_r)^2] + c_* [u_{rr} (u_r)^2 + u_{ss} (u_s)^2] + \frac{1}{2} k C^{-1} [(u_{at}^2)_s - (u_{at}^2)_r - 2(u_a u_{at})_{ss} + 2(u_a u_{at})_{rr}]. \quad (9.10)$$

Величина $u^{(1)}$ определяется решением Даламбера:

$$u^{(1)} = J(r) + j(s). \quad (9.11)$$

Подставляя (9.11) в уравнение для $u^{(2)}$, после интегрирования найдем

$$u^{(2)} = J_2^*(r) + j_2^*(s) + \frac{1}{2} A_*(rj^2 - sj^2) + C_0^{-2} [-\bar{\mu} \rho^{-1} (sJ \gg rj \gg) + \frac{1}{4} k(sJ \gg rj \gg) + \frac{1}{4} \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}(sJ + rj)]. \quad (9.12)$$

Здесь $J_2^*(r)$ и $j_2^*(s)$ — произвольные функции и $J = J(r)$, $j = j(s)$. Штрих обозначает дифференцирование относительно соответствующей переменной: r или s (9.5). Решение (9.12) можно рассматривать как некоторый аналог решения (8.137), которое также содержит сингулярный член.

Затем рассматривается уравнение для $u^{(3)}$. Это уравнение переписывается, используя решения (9.11) и (9.12). Затем формальное решение этого уравнения записывается в виде:

$$u^{(3)} = J_3^*(r) + j_3^*(s) + A_* \frac{1}{2} \int (j^2 + 2j \mathfrak{H}_s^{(2)}) dr - A_* \frac{1}{2} \int (J^2 + 2J \mathfrak{H}_r^{(2)}) ds + \iint \left\{ \frac{1}{2} a_* j \mathfrak{H} J^2 + \frac{1}{2} a_* J \mathfrak{H} j^2 + b_* [J \mathfrak{H} j^2 + j \mathfrak{H} J^2] + \frac{1}{3} c_* (J^3) + \frac{1}{3} c_* (j^3) + \frac{1}{2} k C^{-1} [(u_{at}^2)_s - (u_{at}^2)_r - 2(u_a u_{at})_{ss} + 2(u_a u_{at})_{rr}]^{(1)} \right\} dr ds. \quad (9.13)$$

Здесь $J_3^*(r)$ и $j_3^*(s)$ — произвольные функции. Рассматривая величины третьего порядка, мы пренебрегли вязкостью и дисперсионными эффектами. Используя (9.12), мы находим из (9.13), что

$$u^{(3)} = J_3^*(r) + j_3^*(s) + \frac{1}{2} A_*^2 (r^2 j^2 j \gg s^2 J^2 J \gg)$$

$$\left(\frac{1}{2} A_*^2 - b_* \right) (j \mathfrak{H} J^2 dr + J' \int j^2 ds) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} a_* (jJ^2 + Jj^2) + \frac{1}{3} c_* (sJ^3 + rj^3) + A_* rj\dot{j}_2^{*} - A_* sJ\dot{J}_2^{*} + \\
& + \frac{1}{2} kC^{-1} \int [u_{at}^2 - 2(u_a u_{att})_s] dr - \frac{1}{2} kC^{-1} \int [u_{at}^2 - 2(u_a u_{att})_r]^{(1)} ds. \quad (9.14)
\end{aligned}$$

Здесь $J_2^* = J_2^*(r)$ и $j_2^* = j_2^*(s)$, $u = u^{(1)} + u^{(2)}$. Используя (9.11), (9.12), мы вычисляем интегралы в (9.14) и получаем конечное выражение для $u^{(3)}$. В результате, мы можем записать общее решение уравнения (9.1), используя полученные выражения для $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ и (9.7):

$$\begin{aligned}
u = & J + j + J_2^* + j_2^* + \left[J_3^* + kC^{-3} \left(0.5 \int J^2 dr - J\dot{J} \right) \right] + \\
& + \left[j_3^* + kC^{-3} \left(0.5 \int j^2 ds \right) \right] + \frac{1}{2} A_* (rj^2 - sJ^2) + \\
& + C^{-2} \left[-\bar{\mu} \rho^{-1} (sJ \gg rj) + \frac{1}{4} k(sJ \gg rj) \right] + \frac{1}{4} \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} (sJ + rj) + \\
& + \frac{1}{2} A_*^2 (r^2 j^2 + s^2 J^2) + \left(\frac{1}{2} A_*^2 - b_* \right) (j \dot{J} + J \dot{j}) + \\
& + \frac{1}{2} a_* (jJ^2 + Jj^2) + \frac{1}{3} c_* (sJ^3 + rj^3) + A_* \left(rj\dot{j}_2^{*} - sJ\dot{J}_2^{*} \right) + \\
& + kC^{-3} (sJ\dot{J} + 0.5sJ^2 - rj\dot{j} + 0.5rj^2 + Jj \gg jJ \gg) \quad (9.15)
\end{aligned}$$

Здесь $J_3^* = J_3^*(r)$ и $j_3^* = j_3^*(s)$. Выражения $[J_3^* + kC^{-3} (0.5 \int J^2 dr - J\dot{J})]$, $[j_3^* + kC^{-3} (0.5 \int j^2 ds - j\dot{j})]$ можно рассматривать как произвольные функции. Выражение (9.15) — приближенное решение уравнения (9.1). Подчеркиваем, что некоторые коэффициенты в (9.15) явно зависят от t . Таким образом, мы получили *резонансное по времени* решение уравнения (9.1).

9.1.1. Ограниченные во времени решения волнового уравнения

Выражение (9.15) может быть преобразовано, чтобы исключить явные, содержащиеся там сингулярные во времени члены. Сначала, следуя разделу 8.2.2, мы преобразуем выражение (9.12), которое содержит члены второго порядка. Указанные сингулярные члены будут устранены, если

$$J_2^*(r) = J_2(r) + \frac{1}{2} r A_* J^2 - r C^{-2} \left(\bar{\mu} \rho^{-1} J \gg \frac{1}{4} kJ \gg \right) - \frac{1}{4} r \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} J, \quad (9.16)$$

$$j_2^*(s) = j_2(s) - \frac{1}{2} s A_* j^2 - s C^{-2} \left(\bar{\mu} \rho^{-1} j \gg \frac{1}{4} kj \gg \right) - \frac{1}{4} s \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} j. \quad (9.17)$$

Здесь $J_2 = J_2(r)$ и $j_2 = j_2(s)$. Заметим, что последние выражения соответствуют выражениям (8.31) и (8.32), которые использовались в 8.2.2 для устранения сингулярностей. Теперь мы можем записать $u^{(2)}$ в виде:

$$u^{(2)} = J_2(r) + j_2(s) + \frac{1}{2} A_*(r-s)(J^2 + j^2) + C^2(s-r) \left[\bar{\mu} \rho^{-1}(J \gg j) + \frac{1}{4} k(J \gg j) \right] + \frac{1}{4} \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}(s-r)(J-j). \quad (9.18)$$

Затем, следуя [76] и используя выражения для $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, найдем $u^{(3)}$:

$$\begin{aligned} u^{(3)} = & J_3^*(r) + j_3^*(s) + A_*(rj\dot{j}_2 > sJ\dot{J}_2) + \\ & + \frac{1}{2} a_*(jJ^2 + Jj^2) + (b_* - \frac{1}{2} A_*^2) (J \int j^2 ds + j \int J^2 dr) + \\ & + \left(\frac{1}{3} c_* - \frac{1}{2} A_*^2 \right) (rj\dot{j}^3 + sJ\dot{J}^3) + A_*^2 \left(\frac{1}{2} s^2 - rs \right) J\dot{J}^2 + A_*^2 \left(\frac{1}{2} r^2 - rs \right) j\dot{j}^2 + \\ & + kC^3, sJ\dot{J} > + 0.5sJ\dot{J} > rj\dot{j} > 0.5rj\dot{j} > \\ & 0.5 \int j^2 ds + 0.5 \int J^2 dr + Jj\dot{J} > j\dot{j} > J\dot{J} > \end{aligned} \quad (9.19)$$

Сингулярные члены устраняются, и (9.19) упрощается, если

$$\begin{aligned} J_3^*(r) = & J_3(r) + rA_*(J\dot{J}_2 > r \left(\frac{1}{3} c_* - \frac{1}{2} A_*^2 \right) J^3 + \\ & + \frac{1}{2} r^2 A_*^2 J\dot{J}^2 - rkC^3 \left(\frac{1}{2} J\dot{J}^2 + J\dot{J} > \right) - kC^3 \left(0.5 \int J\dot{J}^2 dr - J\dot{J} > \right), \end{aligned} \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} j_3^*(s) = & j_3(s) - sA_*(j\dot{j}_2 > s \left(\frac{1}{3} c_* - \frac{1}{2} A_*^2 \right) j^3 + \\ & + \frac{1}{2} s^2 A_*^2 j\dot{j}^2 + ksC^3 \left(\frac{1}{2} j\dot{j}^2 + j\dot{j} > \right) + kC^3 \left(0.5 \int j\dot{j}^2 ds - j\dot{j} > \right). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Здесь $J_3 = J_3(r)$, $j_3 = j_3(s)$. Теперь, используя (9.20), (9.21) и (9.19), (9.18) и (9.11), мы можем записать приближенное решение (9.7) для уравнения (9.1), которое не содержит явно выраженных сингулярностей по времени:

$$\begin{aligned} u = & J + j + J_2 + j_2 + J_3 + j_3 + \frac{1}{2} A_*(r-s)(J^2 + j^2) + C^2(s-r) [\bar{\mu} \rho^{-1}(J \gg j) + \\ & + \frac{1}{4} k(J \gg j)] + \frac{1}{4} \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}(s-r)(J-j) + A_*(r-s)(J\dot{J}_2 > j\dot{j}_2) + \\ & + \frac{1}{2} a_*(jJ^2 + Jj^2) + \left(b_* - \frac{1}{2} A_*^2 \right) (J \int j^2 ds + j \int J^2 dr) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3}(c_* - 1.5A_*^2)(r-s)(j^3 - J^3) + \frac{1}{2}A_*^2(r-s)^2(J^2 - j^2) + \\
& + kC^3[(s-r)(J^2 - 0.5J^2 + j^2 - 0.5j^2) + Jj - Jj] \quad (9.22)
\end{aligned}$$

где

$$s - r = 2aC^{-1} - \frac{1}{2}\beta uC^3 \quad (9.23)$$

и $J_1, j_1, J_2, j_2, J_3 = J_3(r), j_3 = j_3(s)$ — неизвестные функции, определяемые начальными и граничными условиями. Мы рассматриваем (9.22) как приближенное решение волнового уравнения (9.1). Оно обобщает хорошо известное решение Даламбера.

Рассмотрим частные случаи (9.22).

1. Квадратично-нелинейные волны описываются решением

$$\begin{aligned}
u = J + j + J_2 + j_2 - aA_*C^{-1}(J^2 + j^2) + \frac{1}{2}aC^3[-4\bar{\mu}\rho^{-1}(J - j) + \\
+ k(J - j)] + \frac{1}{2}a\rho^{-1}h^{-1}\bar{s}C^{-1}(J - j). \quad (9.24)
\end{aligned}$$

2. Рассмотрим однонаправленную волну смещения u . В этом случае $j = j_2 = j_3 = 0$, и из (9.22) следует:

$$\begin{aligned}
u = J + J_2 + J_3 + \frac{1}{2}(r-s)A_*J^2 + (s-r)C^2\left(\bar{\mu}\rho^{-1}J - \frac{1}{4}kJ\right) + \\
+ \frac{1}{4}(s-r)\rho^{-1}h^{-1}\bar{s}J - 2aC^{-1}A_*J^2 + aC^3\left(\frac{2}{3}c_* - A_*^2\right)J^3 + \\
+ 2a^2C^2A_*^2J^2 + aC^4(J^2 + 2J^2) \quad (9.25)
\end{aligned}$$

Выражение (9.25) явно демонстрирует нелинейный эффект. Действительно, согласно линейной теории $u = u^{(1)} = J$, и волна распространяется без изменения профиля. Однако, из-за нелинейных членов, профиль волны u искажается, когда координата a изменяется. Например, если мы имеем в данной точке, скажем $a=0$, синусоидальную волну с частотой ω , тогда, согласно (9.25), гармоники с частотами 2ω и 3ω появляются в любой другой точке.

Подчеркнем, что мы получили выше формальные решения уравнения (9.1). Действительно, аргументы функций J, j, J_2, j_2, J_3, j_3 в решениях этого раздела зависят от неизвестной функции u . Некоторые коэффициенты также зависят от u (см. (9.22)). Поэтому эти решения не всегда могут быть легко использованы. Исключение составляет случай, когда смещение u изначально известно в некоторых точках жидкости, а именно на границах резонатора. В этом

случае граничные условия дают вполне определенные уравнения, которые являются исходными для последовательного определения J, j, J_2, j_2, J_3, j_3 .

9.2. Недеформируемые координаты. Аналитическое решение нелинейного волнового уравнения

Вначале мы получим резонансное во времени явное решение волнового уравнения. Решение отыскивается в виде суммы когерентных волн. Напомним, что когерентность означает сохранение разности фаз между складывающимися волнами. Учитывая сказанное переписываем уравнение (9.1), используя следующие новые переменные:

$$r = Ct - a, s = Ct + a. \quad (9.26)$$

В результате, мы получаем следующее кубическое нелинейное волновое уравнение:

$$\begin{aligned} 4C^2 u_{rs} = & -[2C^2 + \beta_1(u_r - u_s)](u_s - u_r)(u_{rr} - 2u_{rs} + u_{ss}) \\ & C^2(u_s - u_r)(u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}) + kC^2(u_{rrr} - 2u_{rrs} + u_{sss}) \\ & 4\rho^{-1}\bar{\mu}C(u_{rrr} - u_{srr} - u_{ssr} + u_{sss}) + h^{-1}\rho^{-1}\bar{s}C(u_r + u_s) + \\ & + 2k[(u_{at}^2)_s - (u_{at}^2)_r - 2C(u_a u_{at})_{ss} + 2C(u_a u_{at})_{rr}]. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Здесь $C^2 = gh$, $\beta_1 = 3C^2$, и подстрочные r и s относятся к частным производным r и s (9.26), соответственно. Затем используем (9.7) и записываем следующую систему линейных волновых уравнений:

$$u_{rs}^{(1)} = 0, \quad (9.28)$$

$$\begin{aligned} 4C^2 u_{rs}^{(2)} = & \beta(u_s - u_r)^{(1)} \left(u_{rr} - \frac{2}{3}u_{rs} + u_{ss} \right)^{(1)} + kC^2(u_{rrr} - 2u_{rrs} + u_{sss})^{(1)} \\ & 4\rho^{-1}\bar{\mu}C(u_{rrr} - u_{srr} - u_{ssr} + u_{sss})^{(1)} + h^{-1}\rho^{-1}\bar{s}C(u_r + u_s)^{(1)}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} 4C^2 u_{rs}^{(3)} = & \beta(u_s^{(2)} - u_r^{(2)})(u_{rr}^{(1)} - 2u_{rs}^{(1)} + u_{ss}^{(1)}) + \beta(u_s^{(1)} - u_r^{(1)})(u_{rr}^{(2)} - 2u_{rs}^{(2)} + u_{ss}^{(2)}) + \\ & + \beta_1(u_s^{(1)} - u_r^{(1)})^2(u_{rr}^{(1)} - 2u_{rs}^{(1)} + u_{ss}^{(1)}) + kC^2(u_{rrr}^{(2)} - 2u_{rrs}^{(2)} + u_{sss}^{(2)}) - 4C^2(u_s^{(1)} - u_r^{(1)})(u_{rs}^{(2)} + \\ & + 2k[(u_{at}^2)_s - (u_{at}^2)_r - 2C(u_a u_{at})_{ss} + 2C(u_a u_{at})_{rr}]^{(1)}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Здесь $\beta = -3C^2$. Для простоты мы пренебрежем эффектами вязкости в (9.30). Решение Даламбера для (9.28) остается прежним. Решение для величин второго порядка (9.12), в рассматриваемом случае, также сильно не меняется:

$$\begin{aligned} u^{(2)} = & J_2^*(r) + j_2^*(s) + \frac{1}{8}\beta C^2(rj^2 - sj^2 + 2jJ - 2jJ) + \frac{1}{4}k(sJ \gg rj \gg) \\ & \rho^{-1}\bar{\mu}C^{-1}(sJ \gg rj \gg) + \frac{1}{4}h^{-1}\rho^{-1}\bar{s}C^{-1}(sJ + rj). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Теперь, используя выражения (9.31) и (9.11), мы перепишем уравнение (9.30) в виде:

$$\begin{aligned}
 u_{rs}^{(3)} = & \frac{1}{16} C^4 \beta^2 \left\{ jJ \gg j \gg j \gg j \gg 3.5 j \gg j \gg (J^2) \gg \right. \\
 & \frac{1}{2} s [(J^2) \gg (J^2) \gg 2J \gg 2J \gg] + \\
 & + \frac{1}{2} r [(j^2) \gg (j^2) \gg 2j \gg 2j \gg] + 5j \gg (j^2) \gg \\
 & jJ \gg j \gg 3.5 j \gg (J^2) \gg 3.5 j \gg (j^2) \gg \\
 & j \gg j \gg J \gg j \gg \frac{1}{2} j^2 j \gg \frac{1}{2} J^2 J \gg \left. \right\} + \\
 & + \frac{1}{4} C^2 \beta_1 (j^2 J \gg 2j \gg J \gg j^2 j \gg 2j \gg J \gg J^2 j \gg) + \\
 & + \frac{1}{2} k C^2 [(u_{at}^2)_s - (u_{at}^2)_r - 2C(u_a u_{at})_{ss} + 2C(u_a u_{at})_{rr}]^{(1)} + .(r, s), \quad (9.32)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 .(r, s) = & (J \gg j) \left\{ \frac{1}{8} \beta C^2 [(j^2) \gg (J^2) \gg 2j \gg 2j \gg] + \frac{1}{4} k (J \gg j \gg) \right\} + \\
 & + \frac{1}{4} \beta C^2 [(J \gg j \gg J \gg) + (j \gg J \gg (J \gg + j \gg))] + \\
 & + \frac{1}{16} k \beta C^2 [(J \gg j \gg (J \gg sJ \gg rj \gg j \gg) + (j \gg J \gg (sJ \gg rj \gg 2J \gg 2j \gg))] + \\
 & + \frac{1}{4} k (u_{rrrr}^{(2)} - 2u_{ssrr}^{(2)} + u_{ssss}^{(2)}). \quad (9.33)
 \end{aligned}$$

Можно показать, что в (9.32)

$$\begin{aligned}
 (J^2) \gg (J^2) \gg 2J \gg 2J \gg = \\
 = (J^2) \gg (J^2) \gg \frac{2}{3} (J^3) \gg, \quad (9.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (j^2) \gg (j^2) \gg 2j \gg 2j \gg = \\
 = -(j^2) \gg (j^2) \gg \frac{2}{3} (j^3) \gg. \quad (9.35)
 \end{aligned}$$

Учитывая (9.34) и (9.35), мы интегрируем (9.32). После этого мы имеем

$$u^{(3)} = J_3^*(r) + j_3^*(s) + \frac{1}{16} C^4 \beta^2 \left\{ \frac{1}{2} j^2 J \gg \frac{1}{2} j \gg j^2 - 3.5 J \gg j^2 ds - 3.5 j \gg J^2 dr \right.$$

$$= (25C^4\beta^2 - 4C^2\beta_1)j\int J^2 dr + C^4\beta^2 jJJ >$$

В результате, после некоторых упрощений мы можем записать (9.37) в виде:

$$\begin{aligned} u^{(3)} = & J_3^*(r) + j_3^*(s) + \frac{1}{32}C^4\beta^2 [j^2 J > J^2 j >> 2jJJ > 2Jjj > s(2J\mathcal{J} \mathcal{J} > J^2 j \mathcal{J} \\ & r(2j\mathcal{J} \mathcal{J} > j^2 J \mathcal{J} > + s^2 J\mathcal{J} \mathcal{J} > r^2 j\mathcal{J} \mathcal{J} > \mathcal{J} > \frac{1}{16}(4C^2\beta_1 - 3C^4\beta^2)(jJ^2 + j^2 J) + \\ & + \frac{1}{12}(C^2\beta_1 - \frac{5}{8}C^4\beta^2) \left(3J\int j^2 ds + 3j\int J^2 dr + sJ^3 + rj^3 \right) + \\ & + k(sJ\mathcal{J} > + 0.5sJ^2 > rj\mathcal{J} > + 0.5rj^2 > + 0.5\int j^2 ds + 0.5\int J^2 dr + \\ & + Jj >>> jJ >>> j\mathcal{J} > \mathcal{J} \mathcal{J} > + \iint (r, s) dr ds. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Заключительный шаг — вычисление последнего члена в (9.38). Этот член определен несколькими интегралами. Вычислим эти интегралы. Например,

$$\begin{aligned} \iint (J > j > \mathcal{J} > \left\{ \frac{1}{8}\beta C^2 [(j^2) > (J^2) > 2j\mathcal{J} > 2j\mathcal{J} \mathcal{J} > + \frac{1}{4}k(J >>> + j >>>) \right\} dr ds = \\ = \frac{1}{4}\beta C^2 \left(Jj^2 > \frac{1}{3}sJ^3 + jJ^2 > j\int J^2 dr \frac{1}{3}rj^3 > J\int j^2 ds \right) + \\ + \frac{1}{4}k \left(s\int J\mathcal{J} > dr + r\int j\mathcal{J} > ds + Jj >>> jJ >>> \right) \end{aligned}$$

После подобных вычислений последний член в (9.38) представляется как

$$\begin{aligned} \iint (r, s) dr ds = & \frac{1}{4}\beta C^2 \left(Jj^2 > \frac{1}{3}sJ^3 + \frac{1}{3}rj^3 + jJ^2 > j\int J^2 dr + J\int j^2 ds \right) + \\ & + \frac{1}{4}G \left(sJ\mathcal{J} >>> \frac{1}{2}sJ^2 > rj\mathcal{J} > + \frac{1}{2}rj^2 > + Jj >>> jJ >>> \right) + \\ & + \frac{1}{16}k\beta C^2 \left[J >>> j >>> \mathcal{J} > \frac{1}{2}s^2 J\mathcal{J} > + \frac{1}{2}r^2 j\mathcal{J} > 2jJ >>> 2Jj >>> \right. \\ & + 2sJ\mathcal{J} > \frac{1}{2}sJ^2 > 2rj\mathcal{J} > + \frac{1}{2}rj^2 > + J\mathcal{J} > j\mathcal{J} > J\mathcal{J} \mathcal{J} > j) + j\mathcal{J} \mathcal{J} > J) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{4}\beta C^2 (j_2 J > J_2 j > + jJ_2 > Jj_2 > sJ_2 \mathcal{J} > rj_2 \mathcal{J} > + \\ & + \frac{1}{4}k \left[sJ_2 >>> rj_2 >>> \frac{1}{8}r^2 kj >>>> \frac{1}{8}s^2 kJ >>>> \right] \\ & + \frac{1}{8}k \left[C^2 \beta (j\mathcal{J} > J\mathcal{J} > + j\mathcal{J} > J\mathcal{J} > + k(J >>> + j >>>) \right] + \\ & + \frac{1}{16}k\beta C^2 \left[\frac{1}{2}r^2 (j\mathcal{J} >>> \frac{1}{2}s^2 (J\mathcal{J} >>> jJ >>> Jj >>> \right. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Теперь, используя (9.7), (9.11), (9.31), (9.38) и (9.39), найдем выражение для волны горизонтального смещения:

$$\begin{aligned}
u = & J + j + J_2^* + j_2^* + J_3^* + j_3^* + \frac{1}{8}\beta C^2(2jJ > 2jJ > + rj >^2 sJ >^2) + \\
& + \frac{1}{4}k(sJ >>> rj >>> \rho^{-1}\bar{\mu}C^{-1}(sJ >> rj >>) + \frac{1}{4}h^{-1}\rho^{-1}\bar{s}C^{-1}(sJ + rj) + \\
& + \frac{1}{32}C^4\beta^2(sJ >^2 j > rj >^2 J > 2sJ J > 2rj j > + s^2 J >^2 J > + r^2 j >^2 j > + j^2 J >> + \\
& + J^2 j >> 2j > J J > 2J j j > \frac{1}{16}C^2(4\beta_1 - 3C^2\beta^2 - 4\beta)(jJ >^2 + j >^2 J) + \\
& + \frac{1}{12}C^2\left(\beta_1 - \frac{5}{8}C^2\beta^2 - \beta\right)(sJ >^3 + rj >^3) + \frac{1}{4}C^2\left(\beta_1 - \frac{5}{8}C^2\beta^2 - \beta\right), J j > j^2 ds + \\
& + j j > J >^2 dr) + \frac{1}{8}k(2 + C^2\beta)(sJ J > rj j > + Jj >>> jJ >>) - \\
& - \frac{1}{8}k\left(1 + \frac{1}{4}C^2\beta\right)(sJ >>^2 rj >>^2) + \frac{1}{16}k\beta C^2 \times \\
& \left[sJ >> rj >> \frac{1}{2}s^2 J J >> + \frac{1}{2}r^2 j j >> + J j >> j >> J >> j >> - j) + j >> J > J) \right] + \\
& + \frac{1}{4}\beta C^2[j_2^* J > J_2^* j > + j(J_2^*) > J(j_2^*) > s(J_2^*) J > rj > j_2^*] + \\
& + \frac{1}{4}k\left[s(J_2^*) >>>(rj_2^*) >>> \frac{1}{8}r^2 kj >>> \frac{1}{8}s^2 kJ >>>\right] \frac{1}{8}k\beta C^2(jJ > J J > + j j > J j > + \\
& + \frac{1}{16}k\beta C^2\left[\frac{1}{2}r^2(j j >> \frac{1}{2}s^2(J J >> jJ >> Jj >>)\right] + \\
& + k\left(sJ J >>> \frac{1}{2}sJ >>^2 rj j >>> \frac{1}{2}rj >>^2 + Jj >>> jJ >> \right) \quad (9.40)
\end{aligned}$$

Здесь неизвестные функции $J = J(r)$, $j = j(s)$, $J_2^* = J_2^*(r)$, $j_2^* = j_2^*(s)$, $J_3^* = J_3^*(r)$ и $j_3^* = j_3^*(s)$ определяются начальными и граничными условиями. Подчеркнем, что некоторые коэффициенты в (9.40) явно зависят от t . При вычислениях в (9.40) появились члены:

$$\frac{1}{8}k^2(J >>> j >>> k(j j > J J > \text{ и } \frac{1}{2}k\left(\int J >>^2 dr \int j >>^2 ds\right).$$

Эти члены могут быть введены в неизвестные функции, поэтому в (9.40) они отброшены. Принципиальная трудность связана с интегралами $\int J >^2 dr$, $\int j >^2 ds$. Их выражения нельзя упростить или изменить. Однако эти интегралы устраняются в следующих важных частных случаях.

9.2.1. Частные случаи решения (9.40)

Рассмотрим некоторые случаи, когда решение (9.40) может быть упрощено.

1. Эффект взаимодействия волн J, J_2^*, j и j_2^* на решение может быть очень малым. Будем игнорировать это взаимодействие в величинах третьего порядка. В этом случае (9.40)) дает

$$\begin{aligned}
 u = & J + j + J_2^* + j_2^* + J_3^* + j_3^* + \frac{1}{8}\beta C^2(2jJ > 2j\mathcal{J} + rj >^2 \quad sJ >^2) + \\
 & + \frac{1}{4}k(sJ >>> rj >>> \rho^{-1}\bar{\mu}C^{-1}(sJ >> rj >>) + \frac{1}{4}h^{-1}\rho^{-1}\bar{s}C^{-1}(sJ + rj) + \\
 & + \frac{1}{12}\left(C^2\beta_1 - \frac{5}{8}C^4\beta^2 - \beta C^2\right)(sJ >^3 + rj >^3) + \frac{1}{4}k\left(sJ\mathcal{J} > \frac{1}{2}sJ >>^2 \quad rj\mathcal{J} > + \frac{1}{2}rj >>^2\right) + \\
 & + \frac{1}{16}k\beta C^2\left(2sJ\mathcal{J} > \frac{1}{2}sJ >>^2 \quad 2rj\mathcal{J} >>> \frac{1}{2}rj >>^2\right) + \frac{1}{4}C^2\beta(rj\mathcal{J} > j_2^*) > s(J_2^*)\mathcal{J} + \\
 & + \frac{1}{4}k\left(s(J_2^*) >>> r(j_2^*) >>> \frac{1}{8}r^2kj >>>> \frac{1}{8}s^2kJ >>>>\right) + k\left(sJ\mathcal{J} > + \frac{1}{2}sJ >>^2 \quad rj\mathcal{J} >>> \frac{1}{2}rj >>^2\right) + \\
 & + \frac{1}{32}k\beta C^2\left[r^2(j\mathcal{J} >>> + r^2j\mathcal{J} >> \quad s^2(J\mathcal{J} >> + s^2J\mathcal{J} >>]\right]. \quad (9.41)
 \end{aligned}$$

2. Многие члены в уравнении (9.40) содержат коэффициенты, явно зависящие от t . Если t достаточно большое, то эти члены будут преобладать над не сингулярными членами. В этом случае мы можем пренебречь в (9.40) кубическими нелинейными нерезонансными членами и записать, что

$$\begin{aligned}
 u = & J + j + J_2^* + j_2^* + J_3^* + j_3^* + \frac{1}{8}\beta C^2(2jJ > 2j\mathcal{J} + rj >^2 \quad sJ >^2) + \\
 & + \frac{1}{4}k(sJ >>> rj >>> \rho^{-1}\bar{\mu}C^{-1}(sJ >> rj >>) + \frac{1}{4}h^{-1}\rho^{-1}\bar{s}C^{-1}(sJ + rj) + \\
 & + \frac{1}{32}\beta^2 C^4(sJ >^2 j > rj >^2 J > 2sJ\mathcal{J} > \quad 2rj\mathcal{J} > + s^2J >^2 J > + r^2j >^2 j > + \\
 & + \frac{1}{12}\left(C^2\beta_1 - \frac{5}{8}C^4\beta^2 - \beta C^2\right)(sJ >^3 + rj >^3) + \\
 & + \frac{1}{4}k\left(sJ\mathcal{J} > \frac{1}{2}sJ >>^2 \quad rj\mathcal{J} > + \frac{1}{2}rj >>^2\right) + \frac{1}{32}k\beta C^2(4sJ\mathcal{J} >>> sJ >>^2 \quad 4rj\mathcal{J} >>> rj >>^2) + \\
 & + \frac{1}{16}k\beta C^2\left(sJ >>> rj >>> \frac{1}{2}s^2J\mathcal{J} >> + \frac{1}{2}r^2j\mathcal{J} >> \quad sJ >>> + rj >>>\right) \\
 & + \frac{1}{4}\beta C^2\left(s(J_2^*)\mathcal{J} > r(j_2^*)\mathcal{J} >\right) + \frac{1}{4}k\left(s(J_2^*) >>> r(j_2^*) >>> \frac{1}{8}r^2kj >>>> \frac{1}{8}s^2kJ >>>>\right) + \\
 & + \frac{1}{32}k\beta C^2\left[r^2(j\mathcal{J} >>> \quad s^2(J\mathcal{J} >>]\right) + k\left(sJ\mathcal{J} > + \frac{1}{2}sJ >>^2 \quad rj\mathcal{J} >>> \frac{1}{2}rj >>^2\right). \quad (9.42)
 \end{aligned}$$

3. Для однонаправленных волн $u(r)$ решение (9.40) дает

$$\begin{aligned}
 u = J + J_2^* + J_3^* & \frac{1}{8} \beta C^2 s J^2 + \frac{1}{4} k s J \gg \rho^{-1} \bar{C}^{-1} s J \gg \frac{1}{4} h^{-1} \rho^{-1} \bar{s} C^{-1} s J + \\
 + \frac{1}{32} s^2 \beta^2 C^4 J^2 J & \gg \frac{1}{12} \left(C^2 \beta_1 - \frac{5}{8} C^4 \beta^2 - \beta C^2 \right) s J^3 + \frac{1}{4} s k \left(J \gg \gg \frac{1}{2} J \gg \right) \\
 \frac{1}{32} k \beta C^2 (s^2 J \gg & \gg 4 s J \gg \gg s J \gg) - \frac{1}{4} s \beta C^2 (J_2^*) \gg \gg \frac{1}{4} k \left(s J \gg \gg \frac{1}{8} k s^2 J \gg \gg \right) \\
 \frac{1}{32} s^2 k \beta C^2 (J \gg & \gg \gg k \left(s J \gg \gg + \frac{1}{2} s J \gg \right). \quad (9.43)
 \end{aligned}$$

Подчеркиваем, что решения (9.40)–(9.43) действительны только в конечных интервалах изменения r и s , где нелинейные члены остаются меньшими, чем J и j и условия $u^{(1)} \ll u^{(2)} \ll u^{(3)}$ в (9.7) имеют место.

9.2.2. Резонансные решения волнового уравнения

Мы рассматриваем решения (9.40)–(9.43) как нелинейное обобщение решения Даламбера для линейного волнового уравнения. Они описывают развитие и взаимодействие одномерных бегущих длинных волн. Так как решения являются очень общими, то не легко оценить область их применения. Может легче определить нелинейные волны, которые, заведомо, не описываются этими решениями. В частности, в них некоторые коэффициенты явно зависят от t , поэтому решения не могут описать динамику периодических волн.

Решения могут быть преобразованы с тем, чтобы исключить сингулярные по времени члены из (9.40). Сначала с этой целью мы преобразуем величины второго порядка. Сингулярные члены в выражении (9.31) будут устранены, если

$$J_2^*(r) = J_2(r) + \frac{1}{8} r \beta C^2 J^2 - \frac{1}{4} r k J \gg \gg r \rho^{-1} \bar{C}^{-1} J \gg \gg \frac{1}{4} r h^{-1} \rho^{-1} \bar{s} C^{-1} J, \quad (9.44)$$

$$j_2^*(s) = j_2(s) - \frac{1}{8} s \beta C^2 j^2 - \frac{1}{4} s k j \gg \gg s \rho^{-1} \bar{C}^{-1} j \gg \gg \frac{1}{4} s h^{-1} \rho^{-1} \bar{s} C^{-1} j. \quad (9.45)$$

В результате, мы имеем

$$\begin{aligned}
 u^{(2)} = J_2 + j_2 + \frac{1}{8} \beta C^2 (r - s) (j^2 + J^2) + \frac{1}{4} \beta C^2 (j J - J j) + \\
 + \frac{1}{4} (r - s) \left[k (j \gg \gg J \gg \gg \gg 4 \rho^{-1} \bar{\mu} C^{-1} (J \gg \gg j \gg \gg h^{-1} \rho^{-1} \bar{s} C^{-1} (J - j)) \right]. \quad (9.46)
 \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, $J_2 = J_2(r)$ и $j_2 = j_2(r)$. Затем рассмотрим величины третьего порядка. При этом вязкие свойства жидкости игнорируются. Сначала выра-

жения (9.11) и (9.46) подставляются в (9.30). В частности, мы находим два следующих выражения

$$\begin{aligned} & (u_s^{(2)} \quad u_r^{(2)})(u_{rr}^{(1)} \quad 2u_{rs}^{(1)} + u_{ss}^{(1)}) = \\ & = \left\{ \frac{1}{4} \beta C^2 [(r-s)(j\dot{r} \gg J\dot{r} \gg j^2 \quad J^2 + 2j\dot{r} \gg j\dot{r} \gg jJ\dot{r}) + \right. \\ & \left. + \left[J\dot{r} \quad J\dot{r} \quad \frac{1}{2} k(j\gg J\gg) \frac{1}{4} k(r-s)(j\gg J\gg) \right] \right\} (J\gg j\gg) \end{aligned} \quad (9.47)$$

$$\begin{aligned} & (u_s^{(1)} \quad u_r^{(1)})(u_{rr}^{(2)} \quad 2u_{rs}^{(2)} + u_{ss}^{(2)}) = \frac{1}{4} \beta C^2 (j\gg J\gg) [(r-s)(J\dot{r} \gg + \\ & + (r-s)(j\dot{r} \gg + 4J\dot{r} \gg 4j\dot{r} \gg 3j\dot{r} \gg 3j\dot{r} \gg j\dot{r} \gg + jJ\dot{r} \gg + \\ & + (j\gg J\gg) \left[J\dot{r} \gg + j\dot{r} \gg \quad kj\gg \quad kJ\gg \right] \frac{1}{4} k(r-s)(j\gg J\gg)]. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Затем, используя (9.11), (9.46), вычислим интегралы, определяющие $4C^2 u^{(3)}$ в (9.30):

$$\begin{aligned} & \iint (u_s^{(2)} \quad u_r^{(2)})(u_{rr}^{(1)} \quad 2u_{rs}^{(1)} + u_{ss}^{(1)}) dr ds = \\ & = -\frac{1}{4} \beta C^2 \left(\frac{1}{3} sJ\dot{r}^3 + \frac{1}{3} rj\dot{r}^3 + J\dot{r} \int j\dot{r}^2 ds + j\dot{r} \int J\dot{r}^2 dr \right) + \\ & + \frac{1}{8} \beta C^2 \left(rJ\dot{r}^2 \quad rJ\dot{r}^2 j\gg Jj\dot{r}^2 + r^2 \int j\dot{r}^2 dr ds \quad 2s \int rJ\dot{r}^2 dr + j\dot{r} \int J\dot{r}^2 dr \right) + \\ & + \frac{1}{8} \beta C^2 \left(sj\dot{r}^2 \quad sJ\dot{r}^2 \quad jJ\dot{r}^2 + s^2 \int J\dot{r}^2 dr \quad 2r \int sj\dot{r}^2 ds + J\dot{r} \int j\dot{r}^2 ds \right) + \\ & + \frac{1}{4} \beta C^2 \left[jJ\dot{r}^2 + j\dot{r}^2 J \quad j\dot{r} \int JJ\dot{r} \quad J\dot{r} \int jj\dot{r} \quad \iint (jJ\dot{r}^2 + j\dot{r}^2 J) dr ds \right] + \\ & + r \int j\dot{r}^2 j\dot{r} ds + j\dot{r} J\dot{r} \quad J_2 j\dot{r} \quad s \int J\dot{r}^2 J\dot{r} \quad 2k \left(\frac{1}{2} j\dot{r}^2 \quad J\dot{r} \gg \right) \\ & 2k(j\dot{r} \gg \quad 0.5J\dot{r}^2) + k \left(\frac{1}{2} r^2 \int j\dot{r} \gg ds \quad r \int sj\dot{r} \gg ds + j\dot{r} \int rJ\dot{r} \gg \quad J\dot{r} \int sj\dot{r} \gg ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} s^2 \int J\dot{r} \gg ds + s \int rJ\dot{r} \gg dr \quad J\dot{r} \int sj\dot{r} \gg ds + j\dot{r} \int rJ\dot{r} \gg dr \right), \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\begin{aligned} & \iint (u_s^{(1)} \quad u_r^{(1)})(u_{rr}^{(2)} \quad 2u_{rs}^{(2)} + u_{ss}^{(2)}) dr ds = \frac{1}{4} \beta C^2 \left[jrJ\dot{r} \gg \quad j\dot{r} \int J\dot{r} \gg dr + \right. \\ & + \frac{1}{2} r^2 \int j\dot{r} \int j\dot{r} \gg ds \quad s \int rJ\dot{r} \int J\dot{r} \gg dr \quad rJ\dot{r} \gg \quad j\dot{r} \int J\dot{r} \gg dr \\ & \left. sjJ\dot{r} \gg \quad J \int j\dot{r} \gg ds + \frac{1}{2} s^2 \int J\dot{r} \int J\dot{r} \gg ds \quad r \int sj\dot{r} \int j\dot{r} \gg ds + sj\dot{r} \int J\dot{r} \gg \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + J \mathcal{J} \int j ds \Big] + \frac{1}{4} \beta C^2 \left(3.5 J^2 j + 3.5 J j^2 + \frac{1}{2} j^2 \mathcal{J}^2 + \frac{1}{2} j^2 J \gg \frac{4}{3} r j^3 + \frac{4}{3} s J^3 \right. \\
& \quad \left. 3 J \int j^2 ds - 3 j \int J^2 dr - \iint j \mathcal{J} \mathcal{J} dr ds - \iint j J \mathcal{J} dr ds \right) + \\
& \quad + j J_{\mathcal{J}} + r \int j \mathcal{J} ds - s \int J \mathcal{J} dr - J j_{\mathcal{J}} - 4 r k \int j \mathcal{J} ds + 4 s k \int J \mathcal{J} dr \\
& \quad 4 k j J \gg 4 k J j \gg k \left(s \int r J \mathcal{J} dr - \frac{1}{2} s^2 \int J \mathcal{J} dr - r J j \gg j \int J dr + s j \int J \right. \\
& \quad \left. J j \gg r J \mathcal{J} + J \mathcal{J} s j J \gg J \int j ds + \frac{1}{2} r^2 \int j \mathcal{J} ds - r \int s j \mathcal{J} ds \right), \quad (9.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint (u_s^{(1)} - u_r^{(1)})^2 (u_{rr}^{(1)} - 2u_{rs}^{(1)} + u_{ss}^{(1)}) dr ds = \\
& = J \int j^2 ds - j J^2 + \frac{1}{3} s J^3 + \frac{1}{3} r j^3 - j^2 J + j \int J^2 dr, \quad (9.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint (u_{rrr}^{(2)} - 2u_{ssr}^{(2)} + u_{sss}^{(2)}) dr ds = s J_{\mathcal{J}} \gg r j_{\mathcal{J}} \gg \frac{1}{4} \beta C^2 \left\{ 3 s (J \mathcal{J} \gg - 3 r (j \mathcal{J} \gg + \right. \\
& \quad + \left(sr - \frac{1}{2} s^2 \right) (J \mathcal{J} \gg + (J \int j ds - j J \gg) + \left(\frac{1}{2} r^2 - sr \right) (j \mathcal{J} \gg + \\
& \quad + (j \mathcal{J} - j \int J ds) - 2 [j \mathcal{J} \gg J \mathcal{J} \gg + (j \mathcal{J} \gg j \mathcal{J} \gg) \Big] + k \left[\left(\frac{1}{2} r^2 - sr \right) j \gg \gg \right. \\
& \quad \left. \left(sr - \frac{1}{2} s^2 \right) J \gg \gg 3 r j \gg \gg 3 s J \gg \gg 2 j \gg \gg 2 J \gg \gg \right\}, \quad (9.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint (u_s^{(1)} - u_r^{(1)}) u_{rs}^{(2)} dr ds = \frac{1}{4} \beta C^2 \left(\frac{1}{3} r j^3 - j J^2 - j^2 J + J \int j^2 ds + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{3} s J^3 + j \int J^2 dr \right) + \frac{1}{4} k \left(r \int j \mathcal{J} ds - s \int J \mathcal{J} dr + j J \gg J j \gg \right) \quad (9.53)
\end{aligned}$$

Используя эти выражения, находим из (9.30) следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& 4 C^2 u^{(3)} = J_3^*(r) + j_3^*(s) + \frac{1}{8} \beta^2 C^2 \left[5 J \int j^2 ds - 5 j \int J^2 dr \right. \\
& \quad \left. \frac{8}{3} s J^3 - r \frac{8}{3} j^3 + \left(\frac{1}{2} r^2 - rs \right) j \mathcal{J} j^2 + \left(\frac{1}{2} s^2 - sr \right) J \mathcal{J} J^2 + \right. \\
& \quad \left. + 2 \alpha (J^2 j - J \mathcal{J}^2 - 2 j J \mathcal{J} \gg j \mathcal{J} \mathcal{J}) + 7 J^2 j + 7 J j^2 + j \mathcal{J}^2 + j^2 J \gg 2 j j \mathcal{J} \gg 2 j \mathcal{J} J \right] + \\
& \quad + \beta \left\{ r j_{\mathcal{J}} \gg s J_{\mathcal{J}} \gg \frac{1}{4} k (r j \gg - 2 J \mathcal{J} \gg) - \frac{1}{4} k (2 j \mathcal{J} \gg s J \gg) + j_2 J \gg J_2 j \gg j J_{\mathcal{J}} - J j_{\mathcal{J}} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} s \beta C^2 (j \dot{j} \ddot{j} \ggg + 3kj \ggg + \frac{1}{2} skj \ggg) + s C^2 \left(\frac{1}{3} \beta C^2 j^3 + k \int j \dot{j} \ddot{j} ds \right) + \\
& + \frac{1}{2} k C^2 (\beta C^2 j \dot{j} \ddot{j} + kj \ggg) + 4k C^2 \left(\frac{1}{2} \int j \dot{j} \ddot{j} ds \right) \quad (9.55)
\end{aligned}$$

Здесь и выше

$$\int J' J'''' dr = J' J''' - 0.5 J'''' \quad \text{и} \quad \int j' j'''' ds = j' j''' - 0.5 j'''' . \quad (9.56)$$

Теперь, используя выше приведенные выражения, запишем следующее выражение для u , не содержащее время явно в коэффициентах:

$$\begin{aligned}
u = & J + j + J_2 + j_2 + J_3 + j_3 - \frac{1}{4} a \beta C^2 (j^2 + J^2) + \frac{1}{4} \beta C^2 (jJ - jJ) \\
& + \frac{1}{2} ak(j \ggg J \ggg - 2ap^{-1} \mu C^{-1} (J \ggg j \ggg) + \frac{1}{2} ah^{-1} \rho^{-1} \bar{s} C^{-1} (J - j) + \\
& + \frac{1}{4} C^2 \left\{ \frac{1}{8} \beta^2 C^2 \left[-5J \int j \dot{j} ds - 5j \int J \dot{j} dr + a \left(\frac{16}{3} j^3 - \frac{16}{3} J^3 + 4aj^2 j + 4aJ^2 J \right) + \right. \right. \\
& + 2a(J^2 j - Jj^2 - 2jJ \ggg + 2j \dot{j} \ddot{j}) + 7J^2 j + 7Jj^2 + j \dot{j}^2 + j^2 J \ggg + 2jj \dot{J} + \\
& \left. \left. 2j \dot{J} J \right] + \beta \left[j_2 J - J_2 j + jJ_2 - Jj_2 - 2aj_2 j + 2aJ_2 J - \frac{1}{4} kJ \ggg - \frac{1}{5} kj \ggg + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} ak \left(3J \ggg - \frac{1}{2} J^3 + 3j \ggg - \frac{1}{2} j^3 + j \ggg + J \ggg - J \ggg - j \ggg \right) + \\
& + \frac{1}{2} k(a^2 j \ggg - a^2 J \ggg - jJ \ggg + Jj \ggg) + \beta \left(J \int j \dot{j} ds - jJ^2 + \frac{2}{3} aJ^3 - \frac{2}{3} aj^3 - j^2 J + \right. \\
& \left. + j \int J \dot{j} dr \right) + k C^2 \left[2aJ_2 \ggg - 2aj_2 \ggg - \frac{3}{2} a \beta C^2 (J \dot{J} \ggg) + \frac{3}{2} a \beta C^2 (j \dot{j} \ggg) \right. \\
& + \frac{1}{2} a^2 \beta C^2 (J \dot{J} \ggg) - \frac{1}{4} \beta C^2 jJ \ggg - \frac{3}{2} akJ \ggg + \frac{1}{2} a^2 kJ \ggg + \\
& + \frac{1}{2} a^2 \beta C^2 (j \dot{j} \ggg) + \frac{1}{4} \beta C^2 j \dot{j} \ggg + \frac{3}{2} akj \ggg + \frac{1}{2} a^2 kj \ggg \left. \right] - \frac{1}{2} k \beta (j \dot{J} - j \dot{J}) \left\} \right. \\
& + \frac{1}{4} \beta C^2 \left(\frac{2}{3} aJ^3 - \frac{2}{3} aj^3 - jJ^2 - j^2 J + J \int j \dot{j} ds + j \int J \dot{j} dr \right) + \\
& + \frac{5}{2} ka(J \ggg + j \ggg) + \frac{3}{4} ka(J^2 + j^2) + \frac{5}{4} k(Jj \ggg + jJ \ggg). \quad (9.57)
\end{aligned}$$

Мы подчеркиваем, что решения (9.40), (9.57) являются функциями вполне определенных аргументов (9.26). Эта форма представления решений более

удобна — для того чтобы удовлетворять начальным и граничным условиям, — чем решение, записанное в деформируемых координатах (9.5) (см. раздел 9.1). В частности, в отличие от (9.40), решение (9.57) описывает периодические волны. Из решений следует, что очень трудно возбудить чисто гармоническую волну. Так как решение нелинейно, то вместе с первой начальной (ведущей) гармонической волной возбуждается вторая гармоника. Затем возбуждается третья гармоническая волна и т.д. Эти волны движутся от источника, взаимодействуя с первичной волной. Около источника амплитуды волн высших гармоник являются маленькими и могут только незначительно изменить форму волны. Однако амплитуды резонансно растут вместе с координатой a (9.57) и могут сильно изменить форму волны далеко от источника. Изменение формы также связано с дисперсионными и вязкими эффектами.

Очень важно отметить, что кубическая нелинейность в (9.57) может породить гармоническую волну, подобную начальной волне, но которая неограниченно растет при распространении. Этот механизм может быть ответственным за появление катастрофических волн. Он может существовать и в случае океанических (коротких) волн, так как уравнение (6.71) содержит кубически-нелинейный член. В третьей части книги (раздел 15.7 и глава 16) этот механизм будет внимательно изучен.

Рассмотрим некоторые случаи, когда решение (9.57) может быть упрощено.

9.2.3. Частные случаи резонансного решения

1. Для того чтобы упростить выражение (9.57), мы игнорируем там члены третьего порядка, учитывающие взаимодействие разнонаправленно бегущих волн. В этом случае (9.57) дает

$$\begin{aligned}
 u = & J + j + J_2 + j_2 + J_3 + j_3 - \frac{1}{4} a \beta C^2 (j^2 + J^2) + \frac{1}{4} \beta C^2 (jJ - jJ) \\
 & + \frac{1}{2} ak(j \gg J) + 2ap^{-1} \bar{\mu} C^{-1} (J \gg j) + \frac{1}{2} ah^{-1} p^{-1} \bar{s} C^{-1} (J - j) + \\
 & + \frac{1}{4} C^2 \left\{ \beta^2 C^2 a \left[-\frac{2}{3} J^3 + \frac{2}{3} j^3 + \frac{1}{4} aj \times j^2 \right] + \frac{1}{4} aJ \times J^2 \right\} + \\
 & + \beta a \left[-2j \times j > 2J \times J + \frac{3}{2} kJ \times J - \frac{1}{4} kJ \times J + \frac{3}{2} kj \times j - \frac{1}{4} kj \times j + \frac{1}{2} ak(j \times j \gg J \times J) \right] + \\
 & + \frac{3}{2} \beta_1 a (J^3 - j^3) + kC^2 \left[2aJ \gg 2aj \gg \frac{3}{2} a\beta C^2 (J \times J) + \frac{3}{2} a\beta C^2 (j \times j) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} a^2 \beta C^2 (J \times J) + \frac{3}{2} akJ \gg \frac{1}{2} a^2 kJ \gg + \frac{1}{2} a^2 \beta C^2 (j \times j) + \frac{3}{2} akj \gg + \frac{1}{2} a^2 kj \gg \right] \}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}a\beta C^2(J^3 - j^3) - \frac{1}{4}ak(J^2 + j^2 - 2J \times j) +$$

$$+ ak(2J \times j + J^2 + 2j \times j + j^2). \quad (9.58)$$

2. Многие члены в решении (9.57) имеют коэффициенты, явно зависящие от a . Если a достаточно большое, то эти члены будут доминировать в (9.57). Рассматривая этот случай, мы можем принять во внимание только члены третьего порядка с коэффициентами, которые включают a . Выражение (9.57) записывается в виде:

$$u = J + j + J_2 + j_2 + J_3 + j_3 - \frac{1}{4}a\beta C^2(j^2 + J^2) + \frac{1}{4}\beta C^2(j \times J - J \times j) +$$

$$\frac{1}{2}ak(j \times J \times J - 2a\rho^{-1}\bar{\mu}C^{-1}(J \times j \times j) + \frac{1}{2}ah^{-1}\rho^{-1}\bar{s}C^{-1}(J - j) +$$

$$+ \frac{1}{4}C^2 \left\{ \frac{1}{8}\beta^2 C^2 \left[-\frac{16}{3}aJ^3 + \frac{16}{3}aj^3 + 2a^2 j \times j \times j \right] + 2a^2 J \times J \times J \right\} +$$

$$+ 2a(J^2 j - J \times j \times j - 2jJ \times J + 2j \times j \times j) \Big] +$$

$$+ a\beta \left[-2j \times j \times J - 2J \times J \times j - \frac{1}{4}k(6J \times J \times J - J^2 + 6j \times j \times j - j^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}k(aj \times j \times J - aJ \times J \times j + j \times J \times J + J \times J \times j - J \times j \times j) \right] +$$

$$+ \frac{2}{3}a\beta_1(J^3 - j^3) + akC^2 \left[2J \times J \times j - 2j \times J \times J - \frac{3}{2}\beta C^2(J \times J \times j) + \frac{3}{2}\beta C^2(j \times j \times j) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}a\beta C^2(J \times J \times j) - \frac{3}{2}kJ \times J \times j - \frac{1}{2}akJ \times J \times J - \frac{1}{2}a\beta C^2(j \times j \times j) - \frac{3}{2}kj \times j \times j + \frac{1}{2}akj \times j \times j \right] \Big\}$$

$$\frac{1}{6}a\beta C^2(J^3 - j^3) - \frac{1}{4}ak(J^2 + j^2 - 2J \times j) +$$

$$+ ak(2J \times j + J^2 + 2j \times j + j^2). \quad (9.59)$$

3. Для однонаправленных бегущих волн последнее выражение дает

$$u = J + J_2 + J_3 + \frac{1}{4}a\beta C^2 J^2 + \frac{1}{2}akJ \times J \times J - 2a\rho^{-1}\bar{s}C^{-1}J \times j - \frac{1}{2}ah^{-1}\rho^{-1}\bar{s}C^{-1}J +$$

$$+ \frac{1}{4}C^2 \left\{ a\beta^2 C^2 \left(\frac{1}{2}aJ^2 J - \frac{2}{3}J^3 \right) + a\beta \left(2J \times J \times j - \frac{3}{2}kJ \times J \times j - \frac{1}{4}kJ^2 - \frac{1}{2}akJ \times J \times j \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}a\beta_1 J^3 + akC^2 \left[2J \times J \times j - 2j \times J \times J - \frac{3}{2}\beta C^2(J \times J \times j) - \frac{1}{2}a\beta C^2(J \times J \times j) - \frac{3}{2}kJ \times J \times j - \frac{1}{2}akJ \times J \times J \right] \right\}$$

$$\frac{1}{2}kC^2(\beta C^2 J J \gg k J \gg \gg) \left\{ \frac{1}{6}a\beta C^2 J^3 - \frac{1}{4}akJ^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}akJ J \gg + ak(2J J \gg J^2) \right\}. \quad (9.60)$$

Выражение (9.60) описывает длинные нелинейные волны, для которых эффекты вязкости и дисперсии являются маленькими.

Полученные решения позволяют изучать волны в бесконечных, полуограниченных и конечных протяженных объемах. Таким образом, следуя [74–77, 92, 93], мы записали общие приближенные решения для нелинейного волнового уравнения. В частности, решения описывают как нелинейные стоячие волны, так и взаимодействие бегущих волн в конечных удлиненных резонаторах. Коэффициенты решения содержат явно время t и координату a или только координату. Таким образом, полученные решения явно демонстрируют появление в них быстро растущих, резонансных членов. Именно эти члены определяют развитие волновой системы и по сравнению с ними остальные члены в определенном пределе становятся пренебрежимо малыми. Т.е. в процессе развития волн возникают резонансные моды, относительно которых другие моды можно считать пренебрежимо малыми, и в определенном смысле при этом решения упрощаются. Например, начиная с некоторого момента вместо (9.57) можно использовать (9.59). Возникает мысль, что благодаря резонансным членам сложность волновой системы может уменьшаться, а описание волновой динамики, в некоторых случаях, может быть существенно упрощено. Конечно, при это надо помнить, что решения справедливы, пока/если поправки к линейному решению Даламбера малы.

В заключение вернемся к исследованиям Пуанкаре. Они убедительно показали, что метод малого параметра не может обеспечить сходящееся решение для возмущенной системы. В частности, устойчивость орбит планет солнечной системы на протяжении длительного промежутка времени удовлетворительно исследована быть не может. Оценка динамики на протяжении ограниченного промежутка времени, основанная на некоторых усечениях ряда, — максимум того, что может быть достигнуто.

Здесь мы в достаточно общем виде показали, что нечто подобное имеет место и в случае длинных океанских волн. Уже в решениях идеализированных линейных задач возмущенной динамики появляются резонансные (сингулярные) члены (см. разделы 8.1 и 8.7). Аналогичные члены возникают и в общем случае решения уравнения длинных волн.

Все сказанное приводит к мысли о необходимости и возможности развития аналитических (пусть приближенных) методов решения, которые бы не приво-

дили к появлению сингулярных членов в решении нелинейных волновых уравнений. Замечательные примеры подобных решений можно найти в [93, 94].

Выше мы предложили искать решение для длинных волн в виде суммы (8.59), где $u^{(2)}$ определяется нелинейным волновым уравнением. Мы подчеркиваем, что такое представление открывает возможность исключения появления во время анализа «малых» делителей.

9.3. Метод возмущений, резонансные и когерентные волны

Пуанкаре [69], изучая движение небесных тел и исследуя нелинейные поправки к основному линейному решению, обнаружил появление нарастающих — резонансных (содержащих малые делители) членов в общем решении. Хотя малые делители были известны основоположникам классической динамики — Лагранжу и Лапласу, результат Пуанкаре полностью менял начертанную ими картину небесной механики. Лапласу представлялось, что как движения планет, так и бесконечный кругооборот природных явлений, можно описать математически вплоть до малейших деталей. Пуанкаре показал, что это не так. В частности, согласно Пуанкаре, применение теории возмущений к исследованию нелинейной динамики многих тел (планет) неизбежно приводит к появлению бесконечно возрастающих членов. Это же можно отнести и к нелинейной механике сплошных сред. Так что результаты, приведенные нами в предыдущем разделе, не удивительны.

Таким образом, Пуанкаре показал, что расхождение членов ряда теории возмущений вблизи резонансов присуще подавляющему большинству нелинейных динамических систем. Приблизительно в это же время он развил геометрический подход к решению нелинейных дифференциальных уравнений. Все это позволило ему наметить пути исследования поведения физических систем вблизи резонансов. Однако долгое время (приблизительно пятьдесят лет) важность результатов Пуанкаре не была оценена. Макс Борн скептически заметил: «Было бы поистине удивительно, если бы Природа укрылась от прогресса за аналитическими трудностями задачи многих тел» [70, 71]. С трудом верилось, пишет Пригожин [70, 71], что техническая трудность (расходимость вследствие резонансов) могла изменить концептуальную структуру динамики. Действительно, в ряде случаев математики и физики научились технически преодолевать эту трудность. Например, знаменитый метод перенормировки [96], развитый Фейнманом, Швингером и Дайсоном в 1944–1949 годах, позволил устранить из теории расходящиеся члены, возникающие при решении уравнений методом возмущений. Отметим, что этот метод, усовершенствованный Н. Н. Боголюбовым в 1957 году, лег в основу теории квантовой элек-

тродинамики, которая обладает фантастической точностью и предсказательной силой. Правда, когда этот метод был предложен, некоторые крупные физики сочли его «жульническим». И действительно, метод перенормировки не работает удачно при решении аналогичных проблем, возникающих при развитии общей теории «великого объединения законов физики». Знаменитый физик Р.Фейнман до конца жизни исследовал проблему катастрофических бесконечностей, препятствующих гармоничному объединению гравитации и квантовой механики. Он отметил: «По моим ощущениям — хотя я могу и ошибаться — существует не один способ решения этой задачи. Я не думаю, что есть только один способ, которым мы можем избавиться от бесконечностей» [97, стр. 144].

Но область применимости анализа Пуанкаре оказалась еще шире того, что мы отметили. Развитие науки показало, что его подход открыл путь новой статистической (хаотической) формулировке законов динамики. Понадобилось почти шестьдесят лет после Пуанкаре, прежде чем исследование великого математика А. Н. Колмогорова (1954), развитое В. И. Арнольдом и Ю. К. Мозером, строго доказало влияние начальных условий. Их малейшие изменения могут привести к хаотическому развитию [70, 71, 88]. Вместе с тем отметим, что основная идея Колмогорова, видимо, также связана с малыми делителями. Он с помощью определенной замены координат добился «сверхсходимости», которая в некоторых случаях парализует влияние малых делителей.

Несмотря на все эти трудности в математическом осмысливании, резонансы, которые в начале двадцатого века легли в основу развития средств коммуникаций, информационных систем и методов научных исследований и которые играют фундаментальную роль в физике, успешно изучались с помощью физических методов. В результате в течение прошлого столетия шесть физиков были награждены Нобелевской премией за исследование различных резонансных явлений (Изидор Исаак Рэби (1944), Феликс Блок и Эдвард Миллс Парсел (1952), Рудольф Людвиг Мессбауэр (1961), Альфред Кастлер (1966), и Луис Уолтер Альварес (1968)) (Isidor Isaac Rabi (1944), Felix Bloch and Edward Mills Purcell (1952), Rudolf Ludwig Mössbauer (1961), Alfred Kastler (1966), и Luis Walter Alvarez (1968)).

Согласно последним исследованиям в области теоретической физики, резонансы, в самом широком их понимании, лежат в основе устройства нашей Вселенной. Согласно теории струн, свойства элементарных «частиц» — их массы и константы различных взаимодействий — в точности определяются *резонансными* модами колебаний, реализуемыми внутренними струнами этих частиц [97]. С другой стороны, возникновение вихрей, которые в последующем сформировали спиралевидные галактики, также можно связать с резонансами (см. главу 23).

К исследованию резонансных явлений примыкают исследования когерентных волн. Обычно резонансные явления возможны только для когерентных волн. Интересно, что многие из нобелевских премий по физике, присужденные за последние годы, связаны с когерентными явлениями: в жидком гелии (1996), в холодных атомах (1997, 2001) и в лазерном излучении (2005). Исследования большинства советских и российских нобелевских лауреатов по физике также связаны с когерентными явлениями. К таким относятся Нобелевские премии, присужденные Льву Ландау (1962), Николаю Басову и Александру Прохорову (1964), Петру Капице (1978), Алексею Абрикосову и Виталию Гинзбургу (2003).

В отличие от дисперсионных волн, когерентные волны могут аккумулировать нелинейные эффекты. Только благодаря когерентности, произвольное волновое возмущение не вырождается со временем в беспорядочный шум. Это определяет их широкое использование в приложениях. Собственно говоря, вся современная информационная технология основана на использовании когерентных волн и уменьшении влияния дисперсии на передачу волновой энергии.

Все сказанное подчеркивает важность исследований резонансных явлений. В частности, как автор уже неоднократно подчеркивал, с природными резонансами связано возникновение катастрофических океанских волн. Возникает мысль, что резонансные волновые явления имеют много общего и могут быть одинаково математически описаны. Оказалось, что хотя физические причины образования и преобразования резонансных волн могут резко различаться, уравнения и аналитические решения, описывающие эти процессы, часто подобны [52, 53, 58, 65, 71, 97–104]. В частности, методы исследования резонансных колебаний точечных масс могут быть перенесены на исследование волн в конечных резонаторах.

Эволюция нелинейных волн, возбуждаемых в конечных резонаторах, обладает удивительной красотой, симметрией, общностью и, вместе с тем, простотой. Мы дадим здесь примеры такой эволюции, чтобы более полно ввести читателя в проблему резонансных волн. Далее в книге будет показано, что как методы исследования этих волн, так и полученные результаты, могут быть весьма полезны при анализе океанских катастрофических волн.

9.4. Нелинейные резонансные плоские волны в удлиненных резонаторах

Первое теоретическое исследование в этой области было опубликовано Бетчовым [105]. Он исследовал волны, возбуждаемые в закрытой, газонаполненной трубе колебаниями поршня. Было найдено, что ударные волны возни-

кают в трубе вблизи фундаментальной резонансной частоты. Затем Горьков [106] получил разрывное решение, удовлетворяющее условию постоянства массы газа в трубе. Интересно, что внимание Горькова на эту задачу обратили Ландау и Капица [106]. Результаты, полученные для газонаполненных труб, были очень важны, так как проясняли сложные процессы, связанные с неустойчивостью горения жидкого и твердого топлива и прочностью камер сгорания ракетных двигателей [107]. Здесь мы отметим только несколько основополагающих исследований, связанных с термически-возбуждаемыми ударными волнами в трубах и камерах сгорания [92, 108–112].

Честер [113] развил последовательную теорию резонансных колебаний газа в трубах. Он рассмотрел полный спектр линейных резонансных частот / ($\omega = N\pi a_0 / L$, где a_0 — звуковая скорость, L — длина трубы и $N=1, 2, 3, 4, \dots$) и нашел соответствующие нелинейные решения. Они описывают появление ударных волн в полосах частот вокруг каждой линейной резонансной частоты. Вне этих полос, но очень близко к их границам, колебания являются непрерывными, но не чисто синусоидальными. Приблизительно в то же самое время разрывные волны, возбужденные колеблющимся поршнем в полуоткрытых, заполненных водой вертикальных трубах, были изучены Натансоном [114, 115]. Он предложил кавитационную модель для этих волн. Галиев, Ильгамов и Садыков [74] обнаружили и математически описали появление ударных волн в закрытых трубах вблизи частот нелинейных резонансов $\omega = N\pi a_0 / 2L$.

В последующем было опубликовано много работ, посвященных анализу нелинейных волн в трубах. Превосходный обзор этих публикаций представлен в [116].

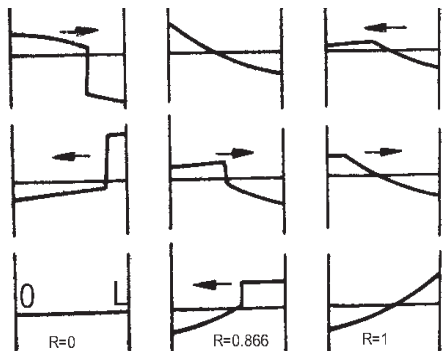


Рис. 92. Трансрезонансное развитие ударной волны, возбужденной при ($R=0$) и около ($R=0.866$ и $R=1$) фундаментального резонанса (R — трансрезонантный параметр) [35, 77].

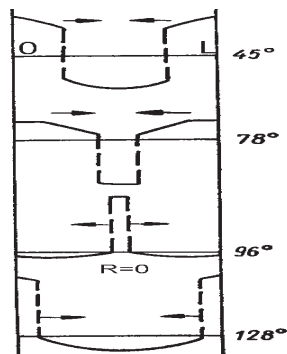


Рис. 93. Ударные волны, возбужденные в резонаторах на второй линейной резонансной частоте. Величины 45° , 78° , 96° и 128° соответствуют различным моментам времени [35, 77].

В частности, методы, развитые для газа, использовались для моделирования одномерных нелинейных резонансных волн в упругих панелях [117] и струнах [118], в стержнях и в слоях из нелинейных упругих материалов [75, 76, 91].

Было найдено, что в случае слабо-дисперсионных и слабо-вязких сред ударные волны, периодически отражающиеся от границ, возникают в резонаторе. Около фундаментального резонанса появляется одна ударная волна (см. рис. 92). Около второй резонансной частоты появляются две ударных волны (см. рис. 93). Превосходный обзор исследований нелинейных волн в конечных средах, опубликованных в 60-е и 70-е годы прошлого столетия, дан в [94].

По-видимому, первые исследования нелинейных резонансных волн на поверхности воды, возбуждаемой в контейнере, осуществил Тэйлор [119] и Нариманов [120].

Затем методы, развитые для газа, колеблющегося в трубах, использовались для моделирования одномерных нелинейных резонансных волн на водной поверхности [121–123]. В последующем, нелинейные колебания жидкости в контейнере изучались во многих публикациях [124–131]. Использовались экспериментальные, аналитические и численные методы. Превосходные обзоры результатов в этой области даны в [132, 133].

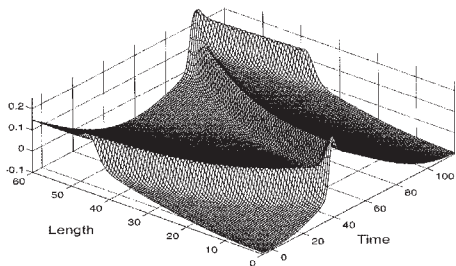


Рис. 94. Колебания поверхностной волны, возбужденной около фундаментального резонанса бака с водой [35].

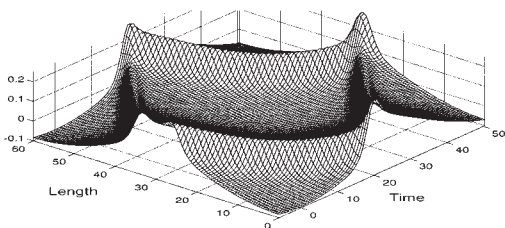


Рис. 95. Колебания двух поверхностных волн, возбуждаемых около второй резонансной частоты бака с водой [35].

9.4.1. Пример граничной задачи и уравнения, определяющего резонансные плоские волны

Примеров природных, технических и иных процессов, при которых возникают сильно-нелинейные резонансные колебания и волны, великое множество. Исходя из результатов разделов 9.1 и 9.2, можно было бы предполагать, что в случае конечных резонаторов исследование резонансных волн приведет

к очень сложному анализу и громоздким выражениям для неизвестных. Однако это, парадоксальным образом, не совсем так. Рост количества гармоник и их амплитуд при приближении к резонансу сменяется в непосредственной близости от точного резонанса уменьшением сложности определяющих уравнений. В частности, в главе 8 мы показали, что в окрестности резонанса исследование нелинейных волн может быть существенно упрощено, вплоть до сведения проблемы к решению алгебраического уравнения. Нечто подобное имеет место и в вытянутых резонаторах.

Чтобы показать это, рассмотрим одномерные плоские волны, возбуждаемые в резонаторе в результате вибраций одной из границ объема. Ограничимся учетом величин первого и второго порядка. Граничные условия записываются в следующем виде:

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = 0, \text{ при } a = 0, \quad (9.61)$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = l \cos \omega t, \text{ при } a = L, \quad (9.62)$$

здесь l и ω — амплитуда и частота акустического возбуждения. Вначале мы найдем резонансные частоты резонатора. Используя (9.22), мы находим из граничного условия (9.61), что

$$J = -j = F, J_2 = -j_2 = \Psi. \quad (9.63)$$

Теперь граничное условие (9.62) может быть представлено в форме

$$F(r) - F(s) + \Psi(r) - \Psi(s) + 3C_0^2 L [F(r)]^2 + [F(s)]^2 / 4 + 2\mu_0^{-1} C_0^3 L [F(r) + F(s)] + kC_0^3 L [F(r) + F(s)] / 2 = l \cos \omega t. \quad (9.64)$$

Мы приняли, что $\bar{s} = 0$, и ищем периодическое решение уравнения (9.64): $u(a, t) = u(a, t + 2\pi / \omega)$. Пусть эффект дисперсии больше, чем эффекты нелинейности и вязкости. В этом случае (9.64) дает

$$F(r) - F(s) + kC_0^3 L [F(r) + F(s)] / 2 = l \cos \omega t. \quad (9.65)$$

Пусть $y = \omega a_0^{-1} L$. Далее найдем

$$F(r) = - \frac{l}{2 \sin y + kL / 3 C_0^3 \cos y} \sin \omega r. \quad (9.66)$$

Неучтенные уравнением (9.65) члены в (9.64) определяют $\Psi(r)$. Они приведены в [35, 127]. Здесь они рассматриваться не будут.

Выражение (9.66) становится бесконечным, когда $2 \sin y + kL / 3 C_0^3 \cos y = 0$. Из последнего уравнения определяются приближенно следующие значения резонансных частот, учитывающие влияние дисперсии:

$$\Omega_{IN} = \Omega_{NI} + \omega^*, \quad (9.67)$$

где

$$\Omega_{Nl} = N\pi C_0 / L \quad (N=1, 2, 3, \dots) \text{ и } \omega^* = kC_0 L^{-3} \pi^3 N^3 (-1)^{N+1} / 2.$$

Если коэффициент k очень мал, то (9.67) дает хорошо известные значения резонансных частот: $\Omega_{Nl} = N\pi C_0 / L$.

Теперь мы рассмотрим граничное условие (9.64), предполагая, что вынуждающая частота близка к одной из резонансных частот (9.67). Около этих резонансов

$$\omega = \Omega_{Nl} + \omega_1^* + \omega_1,$$

где ω_1 — малое возмущение резонансной частоты. Используя выражение для Ω_{Nl} , мы находим

$$L = \omega^{-1} N\pi C_0 + \omega_1^{-1} (\omega_1^* + \omega_1) L. \quad (9.68)$$

Затем записывается следующее разложение функции $F(s)$ в ряд Тэйлора, справедливое на границе $a=L$:

$$\begin{aligned} F(s) = F[r + 2N\pi / \omega + 2N\pi / \omega^2 (\omega_1 + \omega_1^*) + 1.5C_0^{-1} u] = F(r) + \\ + [2N\pi \omega^{-2} (\omega_1 + \omega_1^*) + 1.5C_0^{-1} u] F'(r) + 0.5[2N\pi \omega^{-2} (\omega_1 + \omega_1^*) + \\ + 1.5C_0^{-1} u]^2 F''(r) + \dots \end{aligned} \quad (9.69)$$

В (9.69) использовано условие периодичности: $F(r + 2N\pi / \omega) = F(r)$. При учете сказанного и (9.69) граничное условие (9.64) приводится к уравнению

$$\begin{aligned} -2N\pi(\omega_1 + \omega_1^*) \omega^{-2} f + 3LC_0^{-2} f^2 / 2 + LC_0^{-3} (4\beta \rho^{-1} f + kf) = \\ = l \cos \omega t + d. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Здесь $f = F(r)$, d — неопределенная постоянная, $a = L$ и приведены только линейные и квадратично-нелинейные члены. Левосторонние члены уравнения (9.70) представляют вклады от трансрезонантного эффекта, нелинейного эффекта, вязкости и дисперсии. Легко видеть, что уравнение (9.70) есть упрощенный аналог уравнения (8.107).

Теперь, следуя разделу 8.6, мы можем привести (9.70) к следующему уравнению:

$$(f - 2R\sqrt{\varepsilon}\pi^{-1})^2 - \frac{4}{3}\beta \rho^{-1} C_0^{-1} f_\tau + \frac{1}{6}kL^2 C_0^{-1} f_{\tau\tau} = 1 \cos^2 \tau, \quad (9.71)$$

где

$$R = \pi(\omega_1 + \omega_1^*) C_0 (3/\sqrt{1})^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{4}{3} C_0^2 L^{-1}, \quad \tau = \omega t / 2. \quad (9.72)$$

Последнее уравнение аналогично уравнению (8.114). Поэтому метод анализа, развитый в разделе 8.6, полностью применим здесь. Пусть

$$f = \sqrt{\varepsilon} [2R\pi^{-1} + \cos(\tau) \cos \tau]. \quad (9.73)$$

Эта функция соответствует (8.115). В результате, (9.71) дает

$$\frac{4}{3} \rho^{-1} C_0^{-1} (\dots \tan \tau) + \frac{1}{6} k^{-2} C_0^{-1} (\dots 2 \dots \tan \tau \dots) = \sqrt{\epsilon} (1 - \dots^2) \cos \tau. \quad (9.74)$$

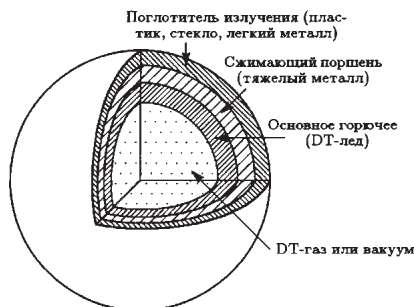
Здесь $\dots = (\tau)$. Уравнение (9.74) мы рассматриваем как некоторый аналог уравнения (8.116). Различные решения этого уравнения будут рассмотрены в главе 13.

Таким образом, оказалось, что исследование резонансных волн в вытянутом конечном резонаторе приводит к решению уравнения, выведенного ранее для резонансных волн, распространяющихся в бесконечной среде. Этот важный результат подчеркивает единую природу усиления резонансных волн. Выше это положение проиллюстрировано случаями одномерных волн. Оно остается справедливым и для сферических резонансных волн. Мы рассмотрим эти волны в следующем разделе.

9.5. Нелинейные резонансные сферические волны

Использование сферических концентраторов волновой энергии хорошо известно. В частности, они используются в различных технологических и химических процессах, в очистке жидкостей и в медицине. В последние десятилетия особое внимание привлекает связанная с подобной концентрацией идея управляемого *термоядерного синтеза* [134], основанная на всестороннем облучении небольшой термоядерной многослойной сферической мишени мощным лазерным импульсом (рис. 96).

Излучение мгновенно испаряет верхний слой мишени и создает сходящуюся ударную сферическую волну. В ней материал мишени нагревается и сжимается. Ставится цель довести параметры сферического сжатия до обеспечивающих начало реакции синтеза с выделением полезной энергии. Одна



из трудностей реализации этого проекта связана с неустойчивостью Рихтмайера-Мешкова (рис. 97), наблюдаемой при взаимодействии *крутого фронта волны с поверхностью контакта разноплотных сред*. Из-за нее фронт сходящейся сферической волны искривляется, одномерность процесса нарушается, а эффективность сжатия мишени резко падает.

Следовательно, чтобы добиться параметров, следующих из одномерной моде-

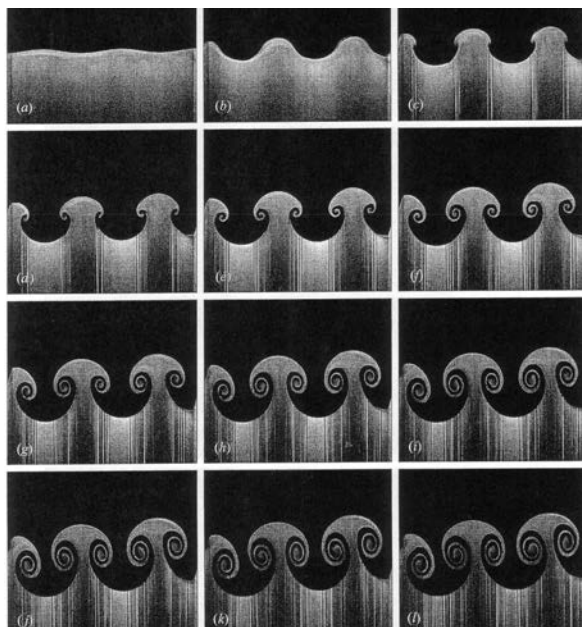


Рис. 97. Пример развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова на поверхности раздела двух жидкостей [135].

ли, надо исключить из процесса сжатия влияние неустойчивости Рихтмайера-Мешкова [134,135]. Возможно, надо внести в материал мишени начальные несовершенства, которые не позволяли бы развиваться этой неустойчивости. Начальные несовершенства могут играть ту же роль, как и дефекты, которые специально вносятся в твердое тело с тем, чтобы помешать развитию трещин и — таким парадоксальным образом — увеличить его прочность.

Сейчас имеется и другая идея создания процесса управляемого термоядерного синтеза, связанная с концентрацией энергии сходящихся сферических волн. Идея этого проекта изложена Нигматулиным и его соавторами в нескольких статьях [136–138].

Известно [139, 140], что схлопывание пузырька газа или пара, при действии акустического поля давления, может привести к весьма кратковременному возникновению в центральной области пузырька очень высокого давления и сверхвысоких температур.

Заметим, что нагрев жидкости колеблющимися в ней пузырьками давно и хорошо известны. Автору последнее явление описал в середине 70-х годов прошлого века известный исследователь — профессор Ганиев [141]. Оказалось, что кроме нагрева пузырек может излучать очень короткий импульс све-

та — вплоть до фотона [142, 143]. Таким образом, пузырек работает как своеобразный преобразователь распределенного акустического давления в световую энергию. Эффективность преобразования резко возрастает, если пузырек находится в колбе и возбуждается с частотой, равной ее резонансной частоте [144]. В результате при сонолюминесценции ионная температура газа может достигать порядка 106 К.

Другая возможность улучшения параметров сжатия связана с использованием облака пузырьков вместо одного пузырька. В [137, 138] найдено, что, подбирая специальным образом жидкость (дейтерированный ацетон), способ нуклеации облака паровых пузырьков, а также амплитуду акустического поля, можно на два порядка увеличить ионную температуру. Акустическое поле создает на сферической границе облака периодические сферические одномерные волны давления. Эти волны, фокусируясь около центра облака и отражаясь от него, генерируют на кратчайшее мгновение огромные температуры и давление. Если в этом центре есть атомы дейтерия и трития, а температура и плотность газа в точке фокусировки будут достаточно велики на достаточно время, то в фокусе помимо сонолюминесцентной искры может возникнуть *ядерная реакция синтеза*. Важно подчеркнуть, что описанная динамика фокусирования имеет место внутри скопления (облака, роя) множества специальным образом созданных пузырьков. Пузырьки, оказывающиеся на фронте сходящейся сферической ударной волны, схлапываются, порождая высокие давления и усиливая волну. В частности, при этом могут возникать высокоскоростные струи, подобные показанным на рис. 52–57. Известно, что появление этих струй при схлапывании пузырьков приводит к разрушению самых прочных материалов, обтекаемых кавитирующей жидкостью. Эти струи также результат неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Появление и действие этих струй аналогичны хорошо известным в военном деле кумулятивным струям. Возможно, подобные струи формируются на фронте сходящейся ударной волны и соударение этих струй в бесконечно малой окрестности центра облака определяет появление там на кратчайшее мгновение огромных температур и давления.

9.5.1. Аналитическое описание динамики облака сферических пузырьков

Важно подчеркнуть, что эффективность сжатия зависит сильно от того, насколько вынуждающая частота близка к резонансной частоте пузырькового облака или пузырька газа. Определение этих частот — сложная проблема [140], так же как и изучение возбуждаемых нелинейных резонансных волн. Сложность исследования связана с пространственным характером колебаний

сферических волн. Поэтому аналитических исследований резонансных нелинейных сферических волн опубликовано немного. В них использовался метод, аналогичный методу изучения резонансных волн в трубах [74, 145–150].

Сначала были выполнены исследования для газовых сфер [145, 150], затем для сферических объемов, содержащих пузырьковую жидкость [77, 146, 147], а немного спустя для твердой сферы [150]. Было найдено, что сферические ударные или солитон-подобные периодические волны могут возбуждаться около линейных резонансных частот.

Мы остановимся на аналитическом исследовании резонансных колебаний пузырьковой жидкости в сферическом резонаторе. Из приведенных данных автоматически можно получить результаты для газовых и твердых сфер.

Уравнение, описывающее сферические волны в пузырьковой жидкости, записывается в следующем виде:

$$a_0^2(\varphi_{rr} + 2r^{-1}\varphi_r) - \varphi_{tt} = a_0^2(X-1)\varphi_{it}\varphi_{tt} + 2\varphi_r\varphi_{rt} - 2a_0^2\varphi_{ttt}. \quad (9.75)$$

Здесь φ — потенциал скорости ($\partial\varphi/\partial r = v$, где v — скорость частиц среды), r — радиальная эйлерова координата, X — величина, зависящая от содержания газа в жидкости, a_0 — скорость звука в среде, $2a_0^2\varphi_{ttt}$ — член, учитывающий влияние вязкости. Это уравнение получено в [35]. Вывод этого уравнения будет дан в разделе 18.5 этой книги. Следуя разделу 9.1, решение уравнения (9.75) ищем в виде:

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots, \quad (9.76)$$

где цифровые индексы определяют порядок малости. Подставляя (9.76) в (9.75) и приравнявая величины одинакового порядка, получаем систему дифференциальных уравнений для последовательного определения $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$:

$$a_0^2(\varphi_{rr}^{(1)} + 2r^{-1}\varphi_r^{(1)}) - \varphi_{tt}^{(1)} = 0, \quad (9.77)$$

$$a_0^2(\varphi_{rr}^{(2)} + 2r^{-1}\varphi_r^{(2)}) - \varphi_{tt}^{(2)} = a_0^2(X-1)\varphi_t^{(1)}\varphi_{tt}^{(1)} + 2\varphi_r^{(1)}\varphi_{rt}^{(1)} - 2a_0^2\varphi_{ttt}^{(1)}. \quad (9.78)$$

Решение уравнения (9.77) запишем как сумму бегущих волн:

$$\varphi^{(1)} = r^{-1}[f_1(\xi) + f_2(\zeta)], \quad (9.79)$$

здесь

$$\xi = a_0 t - r \text{ и } \zeta = a_0 t + r. \quad (9.80)$$

Теперь (9.78) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} a_0^2(r\varphi_{rr}^{(2)} - (r\varphi_r^{(2)})_r) &= 2a_0r^{-3}[r(f_2 f_1)(f_2 f_1) - \\ &- (f_2 + f_1)(f_2 f_1) + (f_1)^2 - (f_2)^2 + r^{-1}(f_2 + f_1)(f_2 + f_1) + \\ &+ 0.5(X-1)a_0r(f_2 + f_1)(f_2 f_1) - 0.52a_0r^2(f_2 f_1)], \end{aligned} \quad (9.81)$$

где штрих над функцией обозначает дифференцирование относительно аргумента и $f_1 = f_1(\xi)$ и $f_2 = f_2(\zeta)$. Согласно [145], записываем следующее общее решение неоднородного волнового уравнения (9.81):

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} = & r^{-1} [\bar{F}_1(\xi) + \bar{F}_2(\zeta)] + a_0^{-1} r^{-2} (f_1 + f_2)(f_1' + f_2') \\ & - 0.25(X+1)a_0^{-1} r^{-1} \iint r^{-1} (f_1' + f_2')(f_1'' + f_2'') d\xi d\zeta + \\ & + 0.25\delta a_0^{-1} r^{-1} (\xi f_1'' + \zeta f_2'') \end{aligned} \quad (9.82)$$

Здесь $\bar{F}_1(\xi)$ и $\bar{F}_2(\zeta)$ — неизвестные функции. Решение (9.82) содержит резонансные (сингулярные) члены вида $\xi f_1''$ и сложный интеграл. Мы ищем здесь ограниченные решения, поэтому выражения для скорости v_r и давления p ,

$$p - p_0 = -\rho_0(\varphi_t + 0.5v_r^2 - 0.5a_0^2 v_t^2) + (\eta + 2\nu)a_0^2 v_{rr}, \quad (9.83)$$

не должны содержать сингулярных членов. В (9.83) p_0 — невозмущенное давление. Формула (9.83) определяет давление, если величины η и ν определяют сдвиговую и делитационную вязкости.

Давайте упростим (9.82) к виду, более удобному при формулировке краевых условий. Сперва рассмотрим интеграл в (9.82). Вблизи произвольной граничной поверхности $r = R$ множитель $1/r$ под интегралом можно представить как

$$r^{-1} = [R - (R - r)]^{-1} = R^{-1} [1 + (R - r)R^{-1} + (R - r)^2 R^{-2} + \dots]. \quad (9.84)$$

В результате, выражения (9.79), (9.82) и (9.76) дают следующее приближенное решение, справедливое вблизи границы $r = R$:

$$\begin{aligned} \varphi = & r^{-1} (f_1 + f_2 + \bar{F}_1 + \bar{F}_2) + a_0^{-1} r^{-2} (f_1 + f_2)(f_1' + f_2') \\ & - 0.25(X+1)a_0^{-1} R^{-1} (0.5\zeta f_1'^2 + 0.5\xi f_2'^2 + f_1' f_2' + f_1 f_2'') + \\ & + 0.25\delta a_0^{-1} r^{-1} (\eta f_2'' + \zeta f_1'') \end{aligned} \quad (9.85)$$

Выражение (9.85) удовлетворяет уравнению (9.75), если величина

$$0.5(X+1)a_0^{-1} r^{-2} [(f_1' + f_2')^2] \ll r R^{-1} \quad (9.86)$$

имеет третий порядок малости. Таким образом, решение (9.85) применимо в окрестности границы, где $\sqrt{(1 - r R^{-1})^2} \ll 1$. Теперь исключим из (9.85) сингулярные члены. Они исчезают, если мы положим в (9.85), что

$$F_1 = \bar{F}_1 + 0.125(X+1)a_0^{-1} R^{-1} (\xi f_1'^2 - 2f_1' f_1'') = 0.25\delta a_0^{-1} \xi f_1'' \bar{C} \xi^2, \quad (9.87)$$

$$F_2 = \bar{F}_2 + 0.125(X+1)a_0^{-1} R^{-1} (\zeta f_2'^2 - 2f_2' f_2'') = 0.25\delta a_0^{-1} \zeta f_2'' \bar{C} \zeta^2. \quad (9.88)$$

Здесь $\bar{C}$ — произвольная постоянная. В результате, потенциал скорости для установившихся колебаний определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \varphi = & r^{-1} (f_1 + f_2 + F_1 + F_2 + 4\bar{C}a_0 r t) + \\ & + a_0^{-1} r^{-2} [1 - 0.25r R^{-1}(X+1)](f_1 + f_2)(f_1' + f_2') \end{aligned}$$

$$-0.25(X+1)a_0^{-1}R^{-1}[(f_1^>)^2 - (f_2^>)^2] + 0.52a_0^{-1}(f_1^>>f_2^>>). \quad (9.89)$$

Неизвестные функции в (9.89) должны быть найдены из начальных и граничных условий конкретных задач.

9.5.2. Ударные сферические волны, возбуждаемые давлением в пузырьковом облаке

Рассмотрим волны, возбуждаемые гармонически изменяющимся давлением. Источник давления расположен на поверхности $r = R$. Там мы имеем, что

$$p - p_0 = l \cos \omega t \quad (r = R). \quad (9.90)$$

Пусть бесконечно близко к центру сферы:

$$4\pi r^2 \varphi_r = 0 \quad (r \rightarrow 0). \quad (9.91)$$

Здесь l и ω — амплитуда и частота акустического возбуждения. Подчеркнем, что решение (9.89) и условия (9.90) и (9.91) описывают сильно идеализированную модель поведения пузырьковой среды вблизи $r = 0$. Там, во время схлapyивания волны, давление стремительно растет, а механические свойства среды меняются. Поэтому, вообще говоря, около $r = 0$ решение (9.89) и указанные условия определяют весьма грубое приближение к реальности. С другой стороны, по-видимому, влияние процессов в центре локально и не меняет в целом характера возбуждаемых в системе волн, которые в первую очередь здесь рассматриваются.

Рассмотрим краевое условие (9.91). Легко видеть, что оно удовлетворяется, если

$$\begin{aligned} J(a_0 t - r) &= f(a_0 t - r), \quad j(a_0 t + r) = f(a_0 t + r), \\ J_2(a_0 t - r) &= \Psi(a_0 t - r), \quad j_2(a_0 t + r) = \Psi(a_0 t + r). \end{aligned} \quad (9.92)$$

Условие (9.90) дает

$$\begin{aligned} a_0 R(f_1^> + f_2^> + 4\bar{C}R) + [1 - 0.25(X+1)][(f_1^> + f_2^>)^2 + (f_1^>>f_2^>>)(f_1 + f_2)] - \\ - 0.5R(X+1)(f_1^>f_1^> - f_2^>f_2^>) + 0.52R^2(f_1^>>f_2^>>) + \\ + 0.5[R^{-1}(f_1 + f_2) + f_1^> - f_2^>]^2 - 0.5(f_1^> + f_2^>)^2 - \rho_0^{-1}R(\lambda + 2\nu)(f_1^>>f_2^>>) = \\ = l\rho_0^{-1}R^2 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (9.93)$$

где должны быть учтены равенства (9.92) и $r = R$. Как первое приближение из (9.93) следует, что

$$f_1^>(\xi) - f_2^>(\xi) = l a_0^{-1} \rho_0^{-1} R \cos \omega t \quad (9.94)$$

и

$$f_1^>(a_0 t - r) = 0.5 l a_0^{-1} \rho_0^{-1} R \frac{\sin \omega / a_0 (a_0 t - r)}{\sin \omega / a_0 R}. \quad (9.95)$$

Решение (9.95) определяет линейные резонансные частоты:

$$\Omega_N = N\pi a_0 / R. \quad (9.96)$$

Легко видеть, что линейное решение (9.95) не справедливо вблизи резонансных частот

$$\omega = \Omega_N + \omega_1. \quad (9.97)$$

Здесь ω_1 — малое возмущение частоты Ω_N . Рассматривая резонансную полосу, мы будем использовать следующее разложение в ряд Тэйлора:

$$f(\omega_0 t + R) = f + \frac{1}{2} \omega_1^2 R^2 f'' + \dots \quad (9.98)$$

Здесь

$$f'' = f(\omega_0 t - R) = f(\omega_0 t - R - 2N\pi a_0 \omega_1^{-1}). \quad (9.99)$$

Затем мы переписываем (9.93), используя (9.98), (9.99) и (9.92), в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_0 \omega_1^2 f'' + (a_0 \omega_1^2 R^2 - 0.52) f'' + R^2 (f')^2 = \\ = l p_0^{-1} (0.5 - \cos^2 \frac{1}{2} \omega t) + 2a_0 \bar{C}. \end{aligned} \quad (9.100)$$

Это уравнение соответствует уравнению (9.70), описывающему резонансные волны, возбуждаемые в трубе. Левая часть уравнения (9.100) содержит два линейных и один нелинейный член. Вдали от резонанса, когда первый член в (9.100) является доминирующим, акустическое решение (9.95) следует из (9.100). При приближении к резонансу влияние этого члена падает. В резонансе он равен нулю. В отличие от первого, влияние второго линейного члена мало как вблизи, так и вдали от резонанса. В резонансе он не равен нулю. Его влияние относительно первого члена растет в резонансе. Первый член противодействует увеличению крутизны волны и выполняет функции вязкостного члена, хотя он не зависит явно от вязкостных свойств среды. Появление этого члена мы связываем с пространственным (трехмерным) характером колебаний сферических волн. Этот член описывает возникновение как бы «пространственной» вязкости в линейных величинах второго порядка. Второй член в (9.100), который зависит как от частоты, так и вязкости среды, характеризует влияние дисперсии на волну. Нелинейный член зависит от R^2 . Этот член определяет тенденцию возникновения крутого, и даже разрывного, фронта волны.

Таким образом, имеется сильная зависимость линейных членов от близости к точному резонансу. Величина ω_1 определяет трансрезонансную эволюцию волны. Если влияние первого члена пренебрежимо мало, а влияние второго члена соответствует вкладу нелинейного члена, то в системе могут возникнуть волны, подобные солитонам (см. главу 13). Вместе с тем возбуж-

дение ударных волн, имеющих непрерывный фронт, возможно в некоторой окрестности резонанса, когда

$$(a_0 / l^2 - R^2 - 0.52) = 0. \quad (9.101)$$

Следовательно, в резонансной области баланс между нелинейными, диссипативными и дисперсионными эффектами меняется вместе с возбуждающей частотой. В целом, проведенный анализ показал, что трансрезонансная эволюция сферических волн сложнее трансрезонансной эволюции плоских одномерных волн.

Мы примем, что $\tau = \omega t / 2$, и будем искать решение (9.100) в форме

$$f = \sqrt{\varepsilon}(\tau) \cos \tau \quad (9.102)$$

для случая

$$\bar{C} = 0.5 l a_0^{-1} \rho_0^{-1} \text{ и } \sqrt{\varepsilon} = l \rho_0^{-1} R^2. \quad (9.103)$$

В результате, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_1 R^2 (\cos \tau - \tan \tau) + \frac{1}{8} R^2 / a_0^2 (2 a_0 / l^2 - R^2 - 0.52) (\cos \tau - \tan \tau) = \\ = -\sqrt{\varepsilon} (1 - \cos \tau) \cos \tau. \end{aligned} \quad (9.104)$$

Это уравнение соответствует уравнению (9.74), описывающему плоские резонансные волны. Различные приближенные решения уравнения (9.104) представлены в [79, 150, 151]. В частности, найдено, что если второй член в (9.104) пренебрежимо мал, то уравнение (9.104) имеет решение, описывающее ударную волну. Количество ударных волн в сферическом облаке зависит от номера резонанса. Если $N = 1$, то формируется одна волна (см. рис. 98). Если $N = 2$, то формируются две волны (см. рис. 99).

Цель рисунков, в первую очередь, проиллюстрировать формирование резонансных волн в случае пространственного резонатора. Вместе с тем, они качественно описывают процесс усиления сферической волны в процессе ее скла-

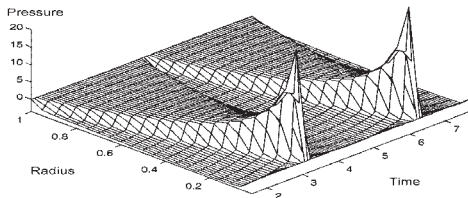


Рис. 98. Ударная сферическая волна давления, возбуждаемая в окрестности первого резонанса [150].

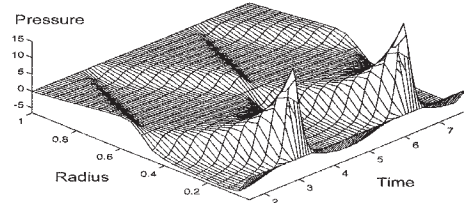


Рис. 99. Ударные сферические волны давления, возбуждаемые в окрестности второго резонанса [150].

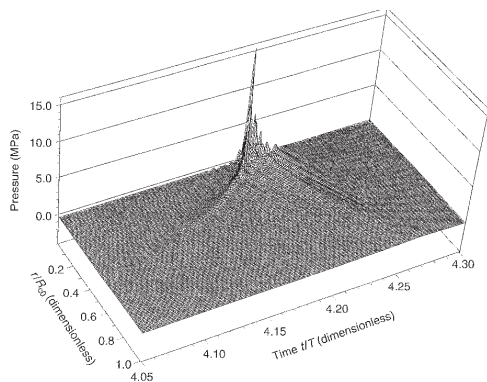


Рис. 100. Пример усиления давления в центре пузырькового облака [152].

пывания. Это видно, в частности, из сравнения наших результатов с данными численных результатов, представленных на рис. 100.

Таким образом, гармоническое всестороннее внешнее акустическое давление, действующее на сферическое облако пузырьков, может сформировать ударную волну, сходящуюся к центру. Ударная волна фокусируется и при этом вызывает схлапывание мельчайших пузырей. В результате энергия концентрируется около центра облака (рис. 100), где

возникают огромные давления и температуры. Конечно, этот процесс сильно зависит от изменения плотности и скорости звука в пределах пузырькового облака и многих других параметров.

Заключение. Эта и предыдущая главы имеют важнейшее значение для последующего изучения катастрофических волн. Мы рассмотрели несколько механизмов их возникновения благодаря резонансному эффекту. Для последующего важно, что исследование этих волн сводится к решению уравнений, имеющих практически один и тот же вид как для поверхностных волн, так и волн в одномерных и пространственных (сферических) резонаторах. Результаты, явным образом связывающие катастрофические явления с резонансным усилением волн, будут дополнительно обсуждаться в следующей главе и частях III, V этой книги.

10. Трансрезонансная прибрежная эволюция океанских волн и формирование катастрофических цунами

В конце мы поместим само солнце в центр Вселенной. Все это определяется упорядоченностью событий и гармонией всей Вселенной, если только мы поглядим на факты, как говорится, «открытыми глазами».

Коперник

В этой главе мы продолжаем исследование, начатое в главах 7–9, где было показано, что при своем распространении океанская (первичная) волна из-за эффекта нелинейности может генерировать вторичную волну. Амплитуда этой волны, при определенных резонансных условиях, может быть равной и даже превышать амплитуду первичной волны. Это явление названо *самовозбуждением*. Мы отмечали, что этот эффект может объяснить причину возникновения катастрофической волны. Здесь мы продолжим наше исследование резонансных условий самовозбуждения указанных волн. Точность анализа проверяется сравнением аналитических, числовых и экспериментальных данных.

Развивая теорию настоящей части книги, мы имели в виду моделирование данного Дарвином описания прибрежной эволюции цунами. Согласно этому описанию — эволюция определяется профилем дна у берега. В этой главе мы изучаем влияние нелинейности и изменения глубины на развитие волны. Образование катастрофических цунами в прибрежной зоне объясняется тем, что при определенном профиле изменения глубины имеет место резонанс вызванных землетрясением океанских волн.

10.1. Нелинейные волны в канале с трапецевидной возвышенностью на дне

Моделирование прибрежных волн и цунами — сложная проблема, результаты исследования которой обобщены в статьях, обзорах и книгах [7, 8, 11, 13, 21, 24, 47, 67, 153–155]. Часто при ее решении используются численные методы решения соответствующих уравнений. Другой, более приемлемый для нас подход определяется использованием метода Грина. Именно он используется в этой книге.

Пусть длинная волна возбуждается на конце однородного канала постоянной или переменной глубины. Как она развивается в зависимости от измене-

ния дна и пройденного расстояния? Можем ли мы изучать это развитие, используя нелинейное обобщение закона Грина? Исследуем эти вопросы.

Пусть волна в точке $a=0$ задана как функция времени

$$\eta = F(t). \quad (10.1)$$

Тогда, используя (8.36) и рассматривая однонаправленную волну, мы можем записать:

$$\eta \approx h^{0.5} g^{0.5} (AJ_{\geq} + J_{\geq}) + \frac{3}{2} ah^{0.5} g^{1.5} J_{\geq} = F(t). \quad (10.2)$$

Здесь $a = 0$ и $h = h_0$, h_0 — глубина канала вне топографии. Кроме этого приняли, что дно канала и амплитуда волны меняются очень плавно, так что $h_a \rightarrow 0$ и $h_{aa} \rightarrow 0$, $A_a \rightarrow 0$. С учетом сказанного (10.2) дает

$$J_{\geq} = h_0^{0.5} g^{0.5} (A^1)_{a=0} F(t) \text{ и } J_{\geq} = 0. \quad (10.3)$$

Теперь, учитывая (8.24), где $\bar{s} = 0$, мы записываем:

$$\eta \approx h^{0.5} g^{0.5} \bar{C} h^{0.75} g^{0.25} h_0^{0.5} g^{0.5} (\bar{C}^{-1} h^{0.75} g^{0.25})_{a=0} F(r) + \frac{3}{2} ah^{0.5} g^{1.5} h_0^{-1} g (A^1)_{a=0} (A^1)_{a=0} F(r) F_{\times}(r). \quad (10.4)$$

Следуя подразделу 8.3.2, мы полагаем в (10.4), что $A = 1$. В этом случае (10.4) дает формулу

$$\eta \approx h^{0.25} h_0^{0.25} F(r) + \frac{3}{2} ah^{0.5} g^{0.5} h_0^{-1} F(r) F_{\times}(r). \quad (10.5)$$

Эта формула позволяет нам исследовать эволюцию волн, распространяющихся над подводными возвышенностями.

Пусть волна в точке $a=0$ задана в виде:

$$\eta = F(t) = l \cos \omega t. \quad (10.6)$$

Теперь (10.5) определяет следующее выражение для поверхностной волны:

$$\eta = -h^{0.25} h_0^{0.25} l \cos \omega r + 0.75 a / l^2 h^{0.5} g^{0.5} h_0^{-1} \sin 2 / r. \quad (10.7)$$

Это выражение получено в [35]. Для длинных волн, приблизительно,

$$\phi = (gh)^{0.5} a \text{ в } r = t - ?(a).$$

В [35] рассмотрен также случай очень слабого наклона дна. При этом результат Грина не использовался. Получено следующее выражение:

$$\eta = -h^{0.5} h_0^{0.5} l \cos \omega r + 0.75 a / l^2 h^{0.5} g^{0.5} h_0^{-1} \sin 2 / r. \quad (10.8)$$

Используя (10.7) и (10.8), мы моделируем экспериментальные данные, описанные в [68]. В экспериментах изучались волны умеренной амплитуды, распространяющиеся по каналу, на дне которого помещена трапецевидная возвышенность (рис. 101). Источник волн расположен в крайней левой точке

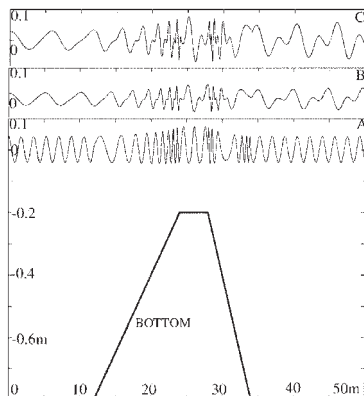


Рис. 101. Пример эволюции волн по длине канала: кривая А соответствует периоду возбуждаемой волны 1.01 сек и амплитуде 0.041м; кривая В — период возбуждаемой волны 2.02 сек и амплитуда 0.02 м; кривая С — период возбуждаемой волны 2.525 сек и амплитуда 0.029 м.

поверхности воды, где $a = 0$. В [68] экспериментальные результаты также моделировались с помощью численных методов. Подчеркиваем, что в экспериментах [68] глубина менялась в широких пределах, поэтому, строго говоря, используемая здесь модель длинной волны, применима только вблизи вершины погруженного в воду препятствия.

Результаты наших вычислений представлены на рис. 100 и 102–104. Большинство кривых на рис. 100, 102–104 вычислены с помощью (10.7). Нижняя кривая А (рис. 100) была вычислена согласно линейной части (10.8): $\eta = -h^{0.5}h_0^{0.5}l \cos \omega t$, а точечные кривые на рис. 103 вычислены согласно всему выражению (10.8).

Кривые на рис. 101 определяют профили волн в различных точках канала. Они найдены в результате экспериментов и численных расчетов, проведенных в Голландии [156].

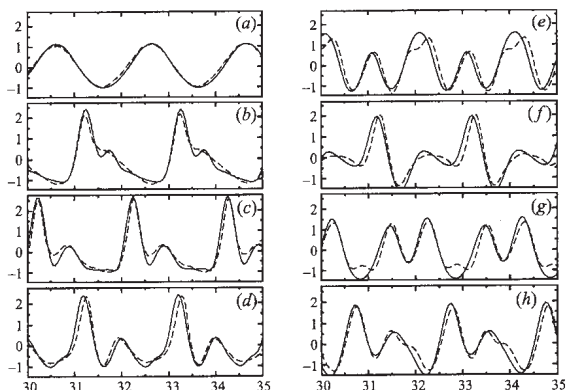


Рис. 102. Эволюция поверхностной волны над трапецевидной возвышенностью. Сплошные линии — расчет, пунктирные линии — эксперимент. Период волны соответствует 2.02 сек, начальная амплитуда — 0.02 м. Вертикальный масштаб — 0.02 м в одном делении. Кривые рассчитаны для различных точек канала: (a) $a = 4$ м; (b) $a = 25$ м; (c) $a = 27$ м; (d) $a = 29$ м; (e) $a = 31.4$ м; (f) $a = 34.6$ м; (g) $a = 38$ м; (h) $a = 42$ м [68].

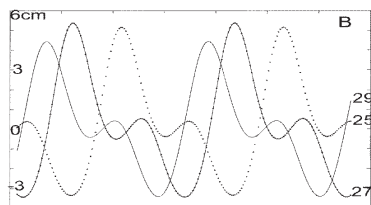


Рис. 103. Волны, вычисленные согласно выражению (10.7) в различных точках ($a = 25, 27, 29$ м) вершины возвышенности. Период возбуждаемой волны 2.02 сек, амплитуда 0.02 м.

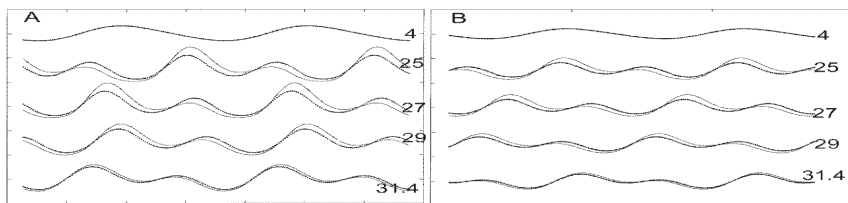


Рис. 104. Волны, вычисленные согласно выражениям (10.7) (сплошные линии) и (10.8) (точечные) в различных точках ($a = 4, 25, 27, 29, 31.4$ м) канала. Картина А соответствует 2.525 сек (период возбуждаемой волны) и 0.029 м (амплитуда). Картина В соответствует 2.02 сек (период возбуждаемой волны) и 0.02 м (амплитуда).

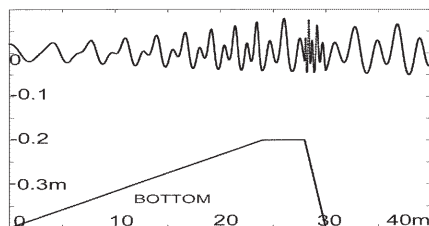


Рис. 105. Эффект изменения рельефа дна на развитие поверхностной волны: период возбуждаемой волны — 2.02 сек и амплитуда — 0.02 м.

При прохождении над передним склоном возвышенности профиль волны сильно меняется и ее амплитуда увеличивается (см. рис. 100–104). Это — следствие вхождения волны в полосу резонанса. В результате фронт волны начинает напоминать фронт опрокидывающейся волны. Интересно, что, согласно рис. 101 (А и В), 102 и 105, волны над вершиной и за вершиной имеют тенденцию к опрокидыванию в противоположных направлениях. Внача-

ле при распространении возникает тенденция к опрокидыванию в направлении движения волны. Однако непосредственно за вершиной ситуация меняется, и возникает тенденция к опрокидыванию волны в направлении против распространения волны.

Рис. 103 показывает колебания поверхности воды в различных пунктах вершины возвышенности. Можно видеть, что профили волны, вычисленные для точек $a = 25, 27, 29$ м, согласуются с экспериментальными данными (см. рис. 3 (b, c, d) и 4 (b, c, d) из [68]).

Сравнение волн, вычисленных согласно выражениям (10.7) и (10.8), представлено на рис. 104. Найдено, что выражение, использующее закон Грина (10.7), описывает экспериментальные данные лучше, чем (10.8).

Мы также изучали эффект изменения угла подъема возвышенности на развитие волн. Волны, вычисленные для новой формы возвышенности, показаны на рис. 105. Нелинейное преобразование волн начинается прямо около источника. Однако, в целом, характер волнообразования остается прежним.

Из рис. 101–105 следует, что начально-гармоническая волна преобразовывается в волну с крутым фронтом, когда она движется в направлении вершины

подводной возвышенности. Сравнение кривых рис. 101 с экспериментальными данными показывает, что квадратичное нелинейное обобщение закона Грина может описать развитие волны вблизи вершины подводной топографии, если дисперсионный эффект является маленьким. Например, если период исходной волны 2.02 сек, а амплитуда 0.02 м или период исходной волны 2.525 сек и амплитуда 0.029 м (см. рис. 101). Если дисперсионный эффект не является маленьким, то обобщение теории Грина, используемое выше, не применимо. В частности, дисперсионный эффект не является маленьким, если период исходной волны 1.01 сек и амплитуда 0.041 м (см. рис. 101). В последнем случае развитое нелинейное обобщение закона Грина не дает согласия с экспериментом. Вместе с тем линейная формула (10.8), которая не учитывает закон Грина и согласно которой рассчитана кривая А рис. 101, дает определенное согласие с экспериментом (см. [68]).

Из сопоставления результатов расчетов с использованием формулы (10.7) и данных экспериментов [68] (см., в частности, рис. 101 и 102) следует, что очень простая формула (10.7) описывает сложную эволюцию волн над подводной топографией — эволюцию, которую не всегда можно легко описать даже с помощью численных методов исследования. Показанная эволюция напоминает также представленную на рис. 90.

10.2. Нелинейная эволюция уединенной волны над трапецевидной возвышенностью на дне

На примере начально гармонических волн мы показали, что обобщенный подход Грина позволяет описать эволюцию длинных волн над подводной топографией. Продолжим это исследование. Теперь рассмотрим уединенную волну, распространяющуюся по каналу переменной глубины. Пусть при $a = 0$ профиль волны задан в виде:

$$\eta = l \operatorname{sech}^n \omega t. \quad (10.9)$$

В этом случае обобщенная формула Грина (10.5) записывается в виде:

$$\eta = h^{0.25} h_0^{0.25} l \operatorname{sech}^n \omega r - 1.5na / l^2 h^{0.5} g^{0.5} h_0^{-1} \operatorname{sech}^{2n+1} / r \sin \frac{1}{r}. \quad (10.10)$$

Эволюция уединенной волны изучалась для случая $n = 2$. Найдено, что она сильно зависит от глубины над вершиной возвышенности. Если глубина достаточно большая, то волна, фактически, не изменяется во время распространения (рис. 106 А). Амплитуда увеличивается, и профиль волны делается круче, когда глубина уменьшается (рис. 106 В). Если глубина уменьшается дальше, то амплитуда сильно увеличивается и волна преобразовывается в сложную волновую структуру, имеющую крутой задний фронт (рис. 106 С и D).

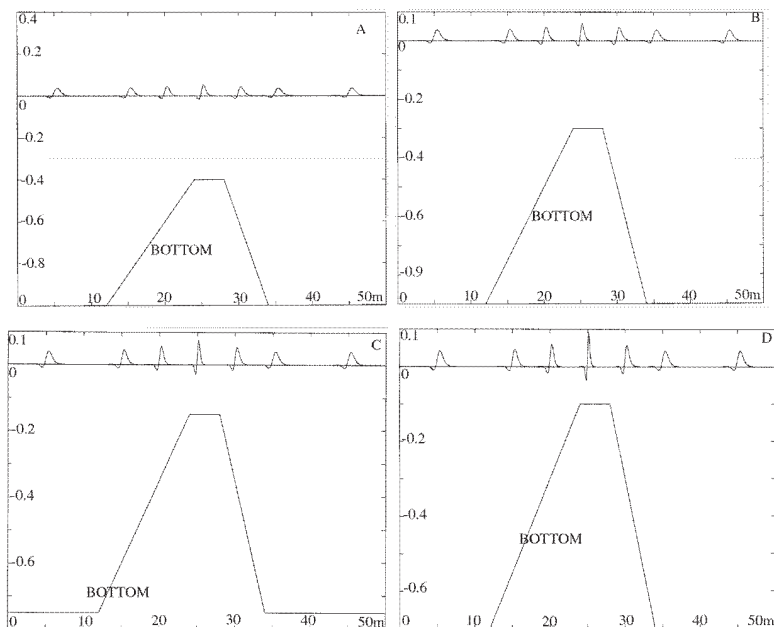


Рис. 106. Эффект изменения глубины на развитие уединенной волны над трапецевидной возвышенностью. Волна распространяется слева направо. Кривые А, В, С и D вычислены для различных глубин над вершиной подводного рельефа. Уменьшение глубины (от А до D) определяет местный резонанс волны. Этот резонанс ясно демонстрируют кривые С и D.

Таким образом, обнаруживается тенденция к опрокидыванию волны, проходящей над топографией, назад. Первоначально гладкие волны могут сильно увеличивать амплитуду и уменьшать длину, когда они перемещаются над подводным рельефом. Это — типично резонансное явление. Мы уже отмечали, что подобный резонанс может объяснить много катастрофических волновых явлений как на поверхности океана, так и на поверхности Земли.

10.3. Волны в канале с полукруглой возвышенностью на дне

Мы показали, что волны с крутыми фронтами могут возникать над вершинами подводных возвышенностей. В частности, периодические волны могут опрокидываться в двух различных направлениях: по ходу и против хода распространения. Для уединенных волн это явление наблюдалось в [157], где изучались уединенные волны, распространяющиеся вдоль канала, содержащего цилиндрическую полукруглую возвышенность. Изучалось влияние глубины погружения возвышенности на эволюцию уединенной волны. В результате

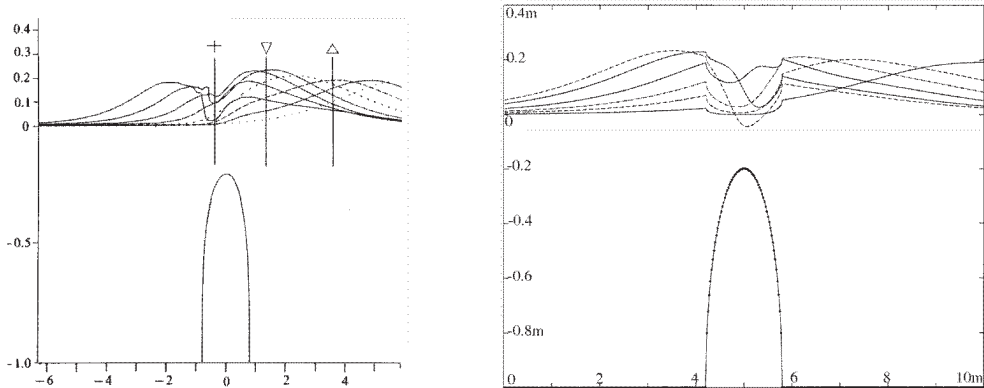


Рис. 107. Развитие уединенной волны над подводной возвышенностью. Волна бежит справа налево. Случай $l=0.191$ м, $R=0.8$ м и $l/h_{\min} \approx 1$, $l/h_0 \approx 0.2$.

эволюции волна может принять совершенно различные формы, зависящие от начальной амплитуды волны, радиуса R возвышенности и изменения глубины. Глубина менялась от h_0 (h_0 — глубина вне возвышенности) до $h_{\min}$ ($h_{\min}$ — минимальная глубина воды над возвышенностью). Мы моделируем эволюцию волн над возвышенностью, используя теорию, развитую выше.

Отметим, что в [157] изучалась эволюция волн, амплитуда которых была вполне сопоставима с минимальной глубиной, а длина существенно выходила

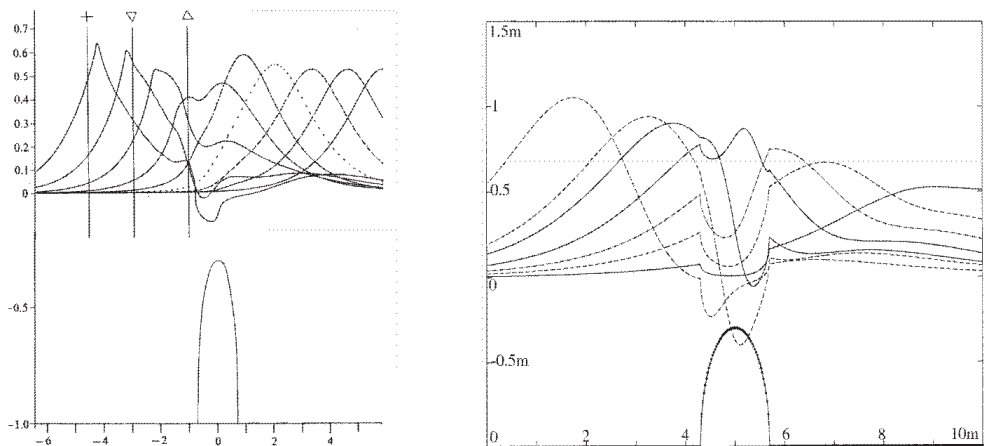


Рис. 108. Развитие уединенной волны над подводной возвышенностью. Волна бежит справа налево. Случай $l = 0.514$ м, $R = 0.7$ м и $l/h_{\min} \approx \frac{5}{3}$, $l/h_0 \approx 0.5$.

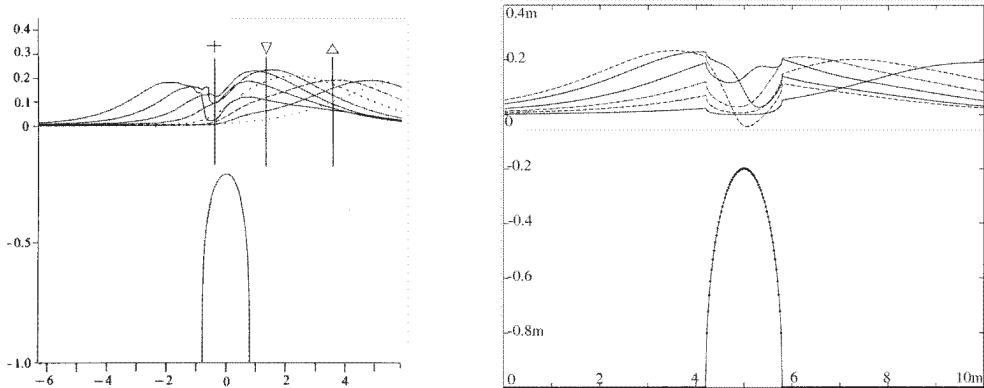


Рис. 109. Развитие уединенной волны над подводной возвышенностью в случае $l=0.311$ м, $R = 0.6$ м и $l/h_{\min} = \frac{3}{4}$, $l/h_0 = 0.3$. Волна бежит справа налево.

за рамки применимости простейшего варианта теории длинных волн. Возможно, это определило то, что подход, основанный на законе Грина, дал в этом случае неудовлетворительные результаты. Поэтому здесь мы от него отказались, а использовали формулу, аналогичную выражению (10.8).

Пусть $\eta = l \operatorname{sech} \omega t$ в $a=0$. Для этого случая формула, подобная (10.8), может быть представлена в виде:

$$\eta = h^{0.5} h_0^{0.5} l \operatorname{sech} \omega r - 1.5a/l^2 h^{0.5} g^{0.5} h_0^{1.5} \operatorname{sech}^3 / r \sinh / r. \quad (10.11)$$

На рис. 107–109 результаты, следующие из (10.11), сравниваются с данными числовых вычислений [157]. Рассматриваются случаи, когда $l = 0.191$ м, $R = 0.8$ м, $h_0 = 0.2$ м (рис. 107); $l = 0.311$ м., $R = 0.6$ м, $h_0 = 0.4$ м (рис. 108) и $l = 0.514$ м, $R = 0.7$ м, $h_0 = 0.3$ м (рис. 109). Левые стороны рисунков соответствуют численным вычислениям [157], кривые правых сторон соответствуют расчетам по формуле (10.11).

Видно, что уединенные волны могут сильно менять свою форму над подводным рельефом. В частности, плавное изменение фронтальной части волны сменяется на скачкообразное. При этом фронт может опрокидываться в двух различных направлениях: вперед, как волны около побережья, и назад против направления движения волны. В целом, этот результат согласуется с данными раздела 10.1, где было изучено развитие начальных гармонических волн над возвышенностью.

10.4. Линейное развитие уединенной волны над наклонным дном

Пусть в точке $a = 0$ глубина постоянная и

$$\eta = l \operatorname{sech}^2 \omega t. \quad (10.12)$$

Тогда, согласно закону Грина, имеем, что

$$\eta \sim h^{0.25} h_0^{0.25} l \operatorname{sech}^2 \omega t. \quad (10.13)$$

Для очень слабого наклона мы можем пренебречь изменением глубины. Тогда

$$\eta \sim h^{0.5} h_0^{0.5} l \operatorname{sech}^2 \omega t. \quad (10.14)$$

Используя (10.13) и (9.143), мы будем моделировать данные, представленные на рис. 7 и 8 из [68]. Результаты показаны на рис. 110. Тонкие линии рассчитаны согласно (10.14), толстые линии найдены, используя закон Грина (10.13).

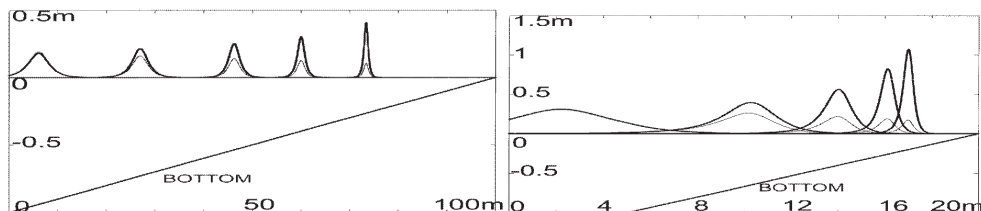


Рис. 110. Влияние изменения наклона дна на развитие уединенной волны в прибрежной зоне

Слева — очень слабый наклон дна (1:100). Профили моделируют данные рис. 8 из [68].

Справа — более сильный наклон дна (1:15). Профили моделируют данные рис. 7 из [68].

Сравнение между волнами, представленными на рис. 110, и числовыми данными из [68] показывает, что закон Грина описывает прибрежное развитие волны лучше, чем решение (10.14). Вместе с тем (10.13) не описывает эволюцию волн очень близко к прибрежной линии.

Закон Грина описывает хорошо числовые результаты только для случая мелкого дна (слева на рис. 110). В целом, профили волны на рис. 110, вычисленные для наклона дна 1:15, не согласуются с численными вычислениями (рис. 8 из [68]). В то же самое время, на расстоянии от побережья ~ 10 м несоответствие между аналитическим и числовыми решениями не является заметным.

Обсуждение. Напомним, что мы использовали выше в этой главе теорию длинных волн в ее квадратично-нелинейном варианте. Известно, что несмотря на серьезные ограничения, эта модель часто правильно описывает развитие волн. Вместе с тем, не может не удивлять, что такие простые выражения, как

(10.7), (10.8), (10.10) и (10.11), описывают качественно волны значительной амплитуды, распространяющиеся над быстро меняющейся глубиной.

Волны, возникающие над подводной топографией, напоминают океанские волны, описанные в [82] (см. рис. 90). Эти волны определяются как нерегулярные морские волны, возникающие при наличии потока, текущего над переменным донным рельефом. Они изучались сотрудниками Института Океанологии российской Академии Наук [82, 160]. Волны и потоки были измерены в проливе, соединяющем Онежскую губу и Белое море. Эти волны наблюдались во время приливов и чаще в случаях ветра, дующего против потока. Эти волны были короче и имели более крутой фронт, чем обычные ветровые волны. В целом, эти волны, описанные в 1985 году, напоминают экстремальные волны, которые начали так активно обсуждаться в последнее десятилетие.

Согласно сопоставлению расчетов и экспериментов (разделы 10.1 и 10.4), закон Грина описывает эволюцию волн над плавно меняющейся подводной топографией только в случае достаточно длинных волн, если они не достигают большой амплитуды. Именно такие волны представлены на рис. 101 (В, С) и рис. 110. В случае более коротких волн, имеющих высоту порядка глубины, закон Грина только ухудшает расчеты, выполненные без его использования, но на основе модели длинных волн.

Мы подчеркиваем, что любые нелинейные уточнения закона Грина в близкой окрестности береговой линии не могут быть успешными, так как у закона Грина есть особенность при $h = 0$. Поэтому там мы должны использовать обобщение закона Грина, которое учитывает донное трение (разделы 7.5 и 8.3). Это отдельная тема исследования, которой мы коснемся в разделах 10.5 и 15.3.

10.5. Моделирование описанной Чарльзом Дарвином эволюции цунами в прибрежной зоне

Известно, что на поверхности океана могут быть образованы очень длинные волны. В частности, это цунами, возбуждаемые подводными землетрясениями, а также подводными оползнями и, намного менее часто, вулканическими извержениями или метеоритами, которые поражают океанскую поверхность. Амплитуда цунами в открытом океане порядка 1 метра. Профиль волны имеет слишком слабый наклон, чтобы цунами было замечено судами. Однако когда цунами входят в мелкие прибрежные воды, они могут быть преобразованы в катастрофические волны, которые могут достигать высоты 30 метров и иметь крутой опрокидывающийся фронт.

Дарвин сообщил: *...огромная волна следует не сразу за землетрясением, а спустя некоторое время, иногда даже через полчаса, ...кажется, что волна*

поднимается сперва в открытом море; далее, поскольку явление это наблюдается всегда, то оно должно вызываться одной и той же причиной; я подозреваю, что место, где зарождается большая волна, следует искать на той черте, где наименее возмущенные воды глубокого океана встречаются с водой, лежащей ближе к берегу, и разделяющее движение суши; в этом случае оказывается также, что волна бывает крупнее или мельче в зависимости от пространства мелкой воды, приведенной в движение вместе с дном, на котором она покоится... [161, стр. 374]. Эти строки, а также материал, приведенный в части I книги, показывают, что Дарвин описал образование и прибрежную динамику вызванных землетрясением океанских волн. Он был первым, кто дал качественный, но научный анализ этого явления и подчеркнул сложный характер прибрежного развития цунами.

Рассмотрим цунами, образованное в открытом океане. Как эта волна эволюционирует, когда она распространяется к берегу? Для описания этого развития часто используется уравнение Кортвега-де Вриза. Цунами рассматривают как длинную, слабо-дисперсионную волну умеренной амплитуды, распространяющуюся в мелкой воде. Однако недавно было показано [47, 67], что расстояние от эпицентра землетрясения до берега может быть слишком маленьким, чтобы проявились эффекты, описываемые КдВ. Дисперсионный эффект может быть очень маленьким, в то время как нелинейные эффекты могут быть большими, поэтому у берега можно пренебречь дисперсией и использовать соответствующие формулы раздела 8.6 и результаты, приведенные в [3, 155]. Некоторые результаты такого применения уже представлены в части I этой книги, где мы обсуждали сообщения Дарвина о цунами. Ниже мы рассмотрим математическую технику моделирования цунами. Наша цель состоит в том, чтобы подчеркнуть резонансную природу развития цунами в прибрежной зоне. Открытый океан здесь рассматривается как источник первичных волн.

Аналитическое выражение для цунами ищется в виде (8.59):

$$u = A(a)J(s) + u^{(2)}. \quad (10.15)$$

Здесь $J(s)$ — первичная волна, пришедшая из глубокого океана, $A(a)$ учитывает влияние дна на прибрежное развитие этой волны, $u^{(2)}$ определяет влияние нелинейностей. Все сказанное соответствует теории, развитой в главе 8. Там же определены выражения для $A(a)$. Второй член в (10.154) определяется кубическим нелинейным уравнением (7.76):

$$\hat{\eta}^3 - 0.75C^{-1}\sqrt{gh}\hat{\eta}^2 - \sqrt{gh}C^{-2}C_a h^2 \hat{\eta} + 0.75C^{-3}h^3 A^2 \sqrt{gh}J_s^2 = 0. \quad (10.16)$$

Здесь $\hat{\eta} = hu_a^{(2)}$, $C = \sqrt{gh} + C_a$ и $s = t + \int C^{-1}(a)da$. Волна J_s задана. Поднятие воды определяется выражением

$$\eta = hAC^{-1}J_s + \hat{\eta} \quad (10.17)$$

Можно предполагать, что влияние $\hat{\eta}$ мало далеко от берега, и там уравнение (10.16) имеет одно действительное решение, описывающее волну малой амплитуды. Однако три действительных решения могут существовать около берега. При их отыскании мы используем методику решения уравнения (10.16), представленную в разделе 20.5. Используя эти решения и их комбинации, мы можем построить различные выражения для η (10.17).

Основные результаты расчетов, проведенных согласно (10.16) и (10.17) для различных J_s , с целью продемонстрировать фундаментальные особенности прибрежного развития цунами, описанные Дарвином, приведены в части I этой книги. Здесь мы остановимся, в основном, на технических деталях выполнения расчетов.

Во-первых, мы рассматриваем случай, когда начальная волна

$$J_s = \varepsilon \operatorname{sech} s \quad (10.18)$$

и C_d) $\frac{5}{6}(gh)^{0.5}h^{2/2}$ (8.72). На рис. 111 анализируются два решения уравнения (10.16). Кривые 1–3 на А определены одним решением, кривые 1–3 на В

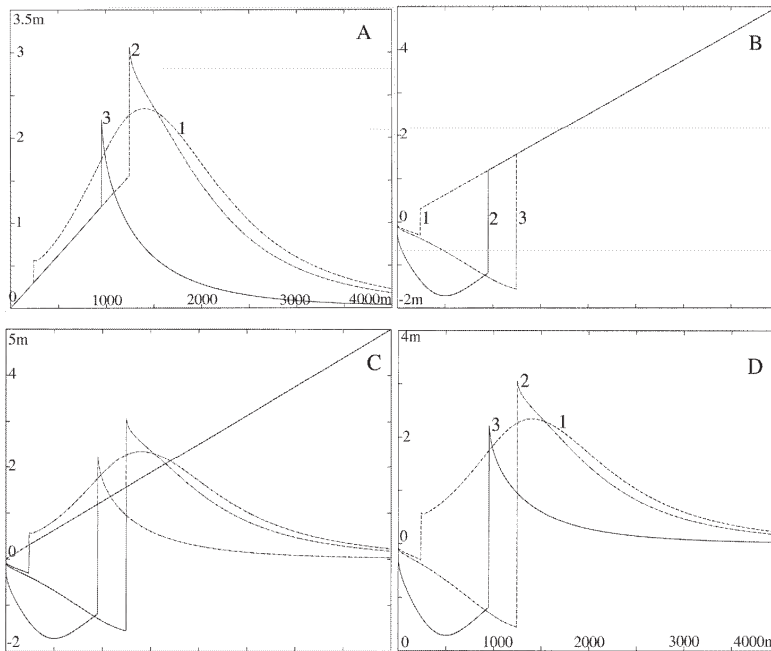


Рис. 111. Профили 1, 2 и 3 — решения (10.16). Эти профили показывают изменение решения вблизи берега и рассчитаны при $t = -180$ (1), -170 (2) и -100 с (3) и $J_s = \varepsilon \operatorname{sech} s$.

определены другим решением уравнения (10.16). Видно, что эти кривые имеют разрывы. Кривые А можно интерпретировать как поверхностные волны; кривые В нельзя так интерпретировать. Наложение этих кривых дает линии, представленные на С. Из рис. 111 С видно, что, используя кривые А и В, мы можем построить новые разрывные решения уравнения (10.16), которые можно интерпретировать как поверхностные волны. Решения, которые показаны на D, являются комбинацией различных частей кривых, показанных на А и В. Они определяют новый тип поверхностных волн, отличный от показанных на рис. 111 А.

Таким образом, мы показали, что кубическое уравнение (10.16) имеет два различных разрывных решения, описывающих поверхностные волны (рис. 111 А, D). Используя эти решения, мы можем описать два сценария развития уединенной волны,двигающейся к побережью. Первый сценарий определяется решением, показанным на рис. 111 А. Второй сценарий — решением, показанным на рис. 111 D.

Первый сценарий. Сначала рассматриваем волны, соответствующие первому сценарию. Результаты вычислений представлены на рис. 112 для следующих различных моментов времени: -230 (кривая 1), -180 (2), -150 (3) и -100 секунд (4).

Из рис. 112 видно, что прибрежное развитие волны сильно зависит от профиля дна и расстояния от прибрежной линии. Далеко от этой линии поверхность волны является гладкой. Профиль волны начинает быстро изменяться около берега. Из-за уменьшения глубины на фронте волны возникает скачок уровня воды (рис. 112 А, сплошные кривые 3). В частности, этот скачок может сформироваться на вершине волны. Мы можем предположить, что этот скачок соответствует образованию гигантского опрокидывающего цунами. В от-

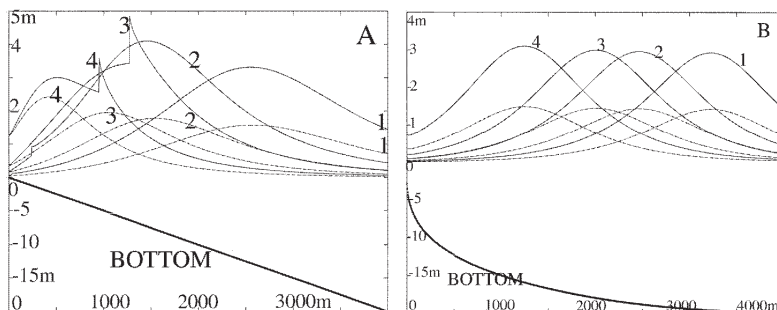


Рис. 112. Эффект наклона дна и изменения глубины на развитие волны согласно первому сценарию: А (линейный наклон), В (нелинейный наклон). Сплошные линии определяются полным нелинейным решением, прерывистые линии рассчитаны согласно Грина.

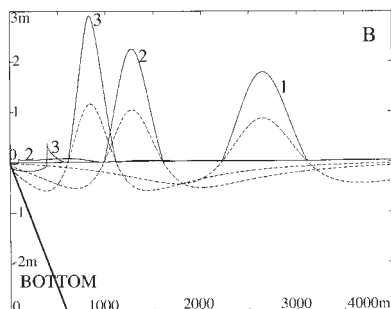


Рис. 113. Прибрежное развитие цунами. Сплошные линии определяют полное нелинейное решение, прерывистые линии вычислены согласно закону Грина. Кривые найдены для следующих различных моментов времени: -230 (1), -160 (2) и -130 (3).

применения методики, соответствующей рис. 111 А, этот отлив меньше, чем отлив, определяемый начальной волной.

Второй сценарий, составное решение. Некоторые эффекты, соответствующие второму сценарию, были изучены в части I (раздел 3.4). Теперь, основываясь на нем, исследуем влияние донного трения. Это влияние может быть решающим для прибрежной эволюции цунами. Это показано на рис. 114. Там кривые А и В рассчитаны для линейно-изменяющейся глубины и двух значений коэффициента трения $\bar{\tau}$ в (7.67). Эти кривые соответствуют кривым рис. 62 А, рассчитанным без учета трения. Остальные картинки (С, D, Е) нарисованы для криволинейного дна и трех значений коэффициента трения $\bar{\tau}$ в (8.24). Эти картинки соответствуют рис. 63, построенному без учета трения. Сплошные кривые на рис. 114 построены по уравнению (10.16), начальная волна задавалась в виде (10.18).

Из расчетов следует, что прибрежное развитие цунами сопровождается как возникновением крутых фронтов, так и сильным изменением амплитуды и профиля волны. Волна, имеющая одну вершину вдали от берега, может эволюционировать в трехвершинную структуру (см. кривые на рис. 114 (С и D)). Мы полагаем, что подобная прибрежная эволюция цунами соответствует описанию Дарвина: *...Около получаса после удара ... была замечена огромная волна, движущаяся через западный проход, который отделяет остров Кирикина от материка... Затем волна опрокинулась, выплеснулась вперед и ... пошла назад... Через несколько минут... появилась вторая волна, имеющая*

личие от этого, волна, фактически, не изменяется, если прибрежная глубина является большой (рис. 112 В).

Дарвин сообщил об отливе воды перед фронтом цунами. Чтобы явно продемонстрировать это явление, мы изменяем форму начальной уединенной волны. Вместо (10.18) мы использовали следующее выражение:

$$J_s = 1 \operatorname{sech}^2 / s - 0.51 \operatorname{sech} [/_1 (s - 40C^{-1})], \quad (10.19)$$

которое качественно описывает N-волну [153]. Такая волна имеет центральное возвышение и понижения перед и позади возвышения.

Согласно рис. 113, отлив воды может возникнуть перед цунами. Однако в случае

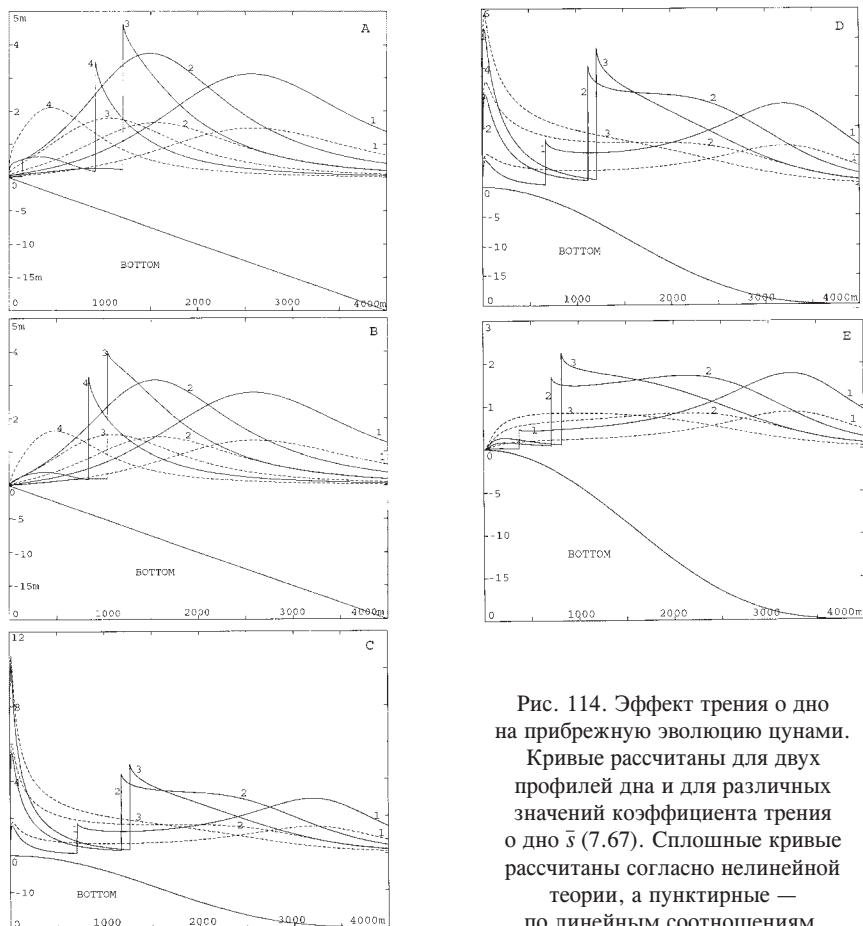


Рис. 114. Эффект трения о дно на прибрежную эволюцию цунами. Кривые рассчитаны для двух профилей дна и для различных значений коэффициента трения о дно $\bar{s}$ (7.67). Сплошные кривые рассчитаны согласно нелинейной теории, а пунктирные — по линейным соотношениям.

больший импульс, чем первая;... После нескольких минут ужасного затишья третья огромная волна была замечена между Кирикином и материком, очевидно, большая, чем любая из прежних двух... (см. раздел 2.2).

Наши результаты качественно согласуются также с описаниями Дарвина, которые представлены в части I этой книги. Расчеты с использованием модифицированных выражений для закона Грина не изменили принципиально картину эволюции. В частности, трение о дно существенно изменило амплитуду волны (см. рис. 63 и 114), но не изменило характера формирования крутого фронта волны и закона его движения, т.е. отмеченное Дарвином не связано напрямую с донным трением, а определяется профилем дна и нелинейным эффектом. Согласно расчетам (рис. 113 и 114), перед основной волной вблизи бе-

рега возникает всплеск воды, своеобразный предвестник. Возможно, он соответствует всплеску перед фронтом цунами, который можно разглядеть на рис. 82.

Согласно обоим сценариям, в первые моменты подхода фронтальной части волны цунами к берегу там возникает фронт разрыва, движущийся в сторону глубокого океана. Появление его связывается с тем, что при $a \rightarrow 0$ имеет место резонанс, который усиливает даже очень малые пришедшие к берегу возмущения.

В заключение, заметим, что мы использовали сильно упрощенную математическую модель прибрежной эволюции цунами. Однако наша модель оказалась достаточной, чтобы описать сложное прибрежное поведение цунами, описанное Дарвином. Мы показали, что два типа цунами, имеющие принципиально различные профили, могут возникать в случае одних и тех же глубин и начальных условий. Первый тип, обсужденный в части I этой книги, соответствует стене воды, движущейся к берегу. Перед этой стеной возникает сильный отлив воды от берега. Второй тип цунами, представленный на рис. 112 А, соответствует волне, подобной солитону, на вершине которого имеется скачок уровня воды. В этом случае профиль цунами напоминает прибрежную волну перед началом ее опрокидывания. Интересно сопоставить сказанное с профилями цунами, которые можно разглядеть на рис. 59. Там можно различить как волну, имеющую очень крутой, но не опрокидывающийся фронт, так и опрокидывающуюся волну и волну, преобразующуюся в струю. Рис. 59, так же как и 13 демонстрирует разнообразие волн, профили которых, по нашему мнению, характеризуют разные этапы трансрезонансной прибрежной эволюции цунами.

Имеется еще и другой важный результат, который определенным образом следует из проведенных расчетов. Этот результат связан с бытующим мнением о том, что использование численных методов сводит на нет все проблемы расчетов цунами. С этим можно согласиться в случаях открытого океана, где амплитуда волны весьма мала по сравнению с глубиной, а влияние нелинейности почти отсутствует. Однако вблизи берега, если глубина мала и меняется очень плавно, возникает зона резонанса, где влияние нелинейности возрастает очень сильно. Там численный анализ встречается с проблемой решения большой системы высоко-нелинейных алгебраических уравнений. Каждое из них может напоминать (10.16) и иметь несколько сильно отличающихся решений. Для всей же системы возможность получения ее совершенно различных решений возрастает взрывообразно с количеством в ней уравнений. Поэтому расчет может дать результат очень и очень далекий от реальности. С этой трудностью автор связывает то, что в литературе, практически, отсутствуют численные

расчеты прибрежной эволюции цунами в случаях очень плавно меняющегося дна. При этом высота волны может увеличиваться в десять и более раз. Именно этот случай наиболее интересен для жителей побережья. Действительно, согласно приведенным расчетам, катастрофический эффект цунами определяется, в значительной степени, не силой землетрясения и местоположением его источника, а профилем прибрежного дна, что подчеркивал Дарвин. Это позволяет, иногда, проведение качественно правильного расчета волны цунами. Дело в том, что кратная ошибка в интенсивности подводного землетрясения может быть несущественной для предсказания амплитуды цунами у берега, если там влияние нелинейности становится более важным, чем влияние интенсивности землетрясения. Чтобы проиллюстрировать этот тезис, примем, что у берега величина цунами определяется кубическим корнем из амплитуды волны над очагом землетрясения. Тогда, иногда, не очень важно, какова амплитуда волны над очагом землетрясения. Например, пусть в безразмерных координатах эта амплитуда равна 0.06, 0.2 или 0.6. Т.е. над очагом землетрясения отличие в амплитуде до 10 раз. Все эти волновые амплитуды дадут у берега цунами с амплитудой порядка от 0.4 до около 1. Т.е. у берега отличие в величине цунами будет не в 10 раз, а около 2 раз. Имеется полная аналогия с топографическим эффектом, который рассматривался в первой части книги. Влияние этого эффекта зачастую важнее, чем интенсивности землетрясения.

Проведенный сугубо приближенный анализ цунами призван, в первую очередь, описать аналитически наблюдения Дарвина. Он вскрывает резонансную природу усиления цунами у берега и, возможно, будет способствовать развитию более совершенных аналитических и численных методов расчета прибрежной эволюции цунами. Наконец, мы отмечаем, что, благодаря простоте, вычисления могут быть выполнены очень быстро, что может представлять определенный практический интерес.

10.6. Заключение

Было бы поистине удивительно, если бы Природа укрылась от прогресса за аналитическими трудностями задачи многих тел.

Макс Борн

В этой части книги мы попытались посмотреть на теорию поверхностных волн под несколько непривычными углами зрения. Здесь мы кратко напомним, в чем новизна такого взгляда, в чем суть развитых математических методов и к каким основным результатам они привели.

1. Мы развили теорию океанских волн, основанную на описании движения жидкости в переменных Лагранжа. Конечный результат теории сводится к нескольким уравнениям, которые приближенно описывают различные волны: на мелководье, на воде умеренной глубины и в глубоком океане.

2. Проблема исследования катастрофических волн — проблема исследования эволюции нелинейных волн. При изучении последних часто используются методы возмущений. При этом возникает проблема «малых» делителей и сингулярных членов, которая представляет принципиальную трудность для решения многих задач, хотя почти все, что мы знаем о нелинейных явлениях в трудно наблюдаемых физических процессах, основано на проведении подробных и тщательных вычислений с использованием метода возмущений.

3. Зарождение катастрофических волн связывается с резонансными явлениями и появлением сингулярных членов как в исходных уравнениях, так и в решениях. Знаменитая проблема «малых» делителей, определяющая возникновение резонансов, формулируется как основная для исследования катастрофических волн.

4. Анализ резонансных волн упрощается, если перемещение волны представить в виде суммы $u = A(a)J(r) + u^{(2)}$ (8.59), где $A(a)J(r)$ — линейная составляющая, описывающая первичную океанскую волну, вбегающую в резонансную область (полосу), а $u^{(2)}$ определяет возникающую быстро растущую нелинейную резонансную поправку. Линейная составляющая известна. Указанное представление сводит задачу исследования свободных океанских волн к исследованию вынужденных волн.

5. В случае конечных резонаторов и слабых нелинейных волн нелинейные члены в волновых уравнениях остаются всегда меньше, чем линейные члены, однако это положение может не выполняться в краевых условиях. В окрестностях резонансов внутри резонатора начинает укладываться конечное количество волн, поэтому на краях влияние линейных составляющих решения уменьшается (в точном резонансе исчезает), а влияние нелинейных членов резко возрастает. В результате могут возникнуть волны, имеющие крутой фронт и большую амплитуду.

6. Имеется аналогия между резонансными вынужденными длинными гравитационными волнами и резонансными волнами, возбуждаемыми в удлинённых и сферических резонаторах. Эти волны описываются подобными уравнениями (8.117), (9.74) и (9.104). Вблизи резонансов влияние некоторых линейных эффектов падает до нуля, а управляющее уравнение существенно упрощается. В некоторых случаях задача сводится к решению алгебраического уравнения.

7. Развитые подходы к исследованию катастрофических волн апробируются на данных многих экспериментов, в частности, на исследовании прибрежной эволюции волн цунами. Результаты находятся в хорошем согласии с экспериментами и наблюдениями Дарвина.

В конце заключения посмотрим на волновые процессы с самой общей точки зрения. Смело можно сказать, что они являются наиболее распространенными в окружающем нас мире. Детали волновых движений меняются в зависимости от несущей волну среды (физическая среда, социальная среда или информационная среда), но основные законы распространения, колебаний и эволюции волн универсальны. Если мы хотим понять функционирование Вселенной и общества, то необходимо разобраться во всех деталях распространения волн, их взаимодействия друг с другом и влияния параметров окружающей среды на существование и эволюцию волн.

Фундаментальным понятием, связанным с теорией волн, является резонанс. Это понятие давно переросло рамки механических явлений, с которыми оно ранее обычно связывалось. Невозможно назвать ту область знаний, где бы это понятие нельзя было бы употребить. Однако, хотя явление резонанса хорошо известно, вместе с тем, работ, посвященных эволюции волн в окрестности резонанса, опубликовано не очень много. Видимо, это связано с тем, что в резонансной области нелинейные явления начинают играть важную роль, и возникают специфические трудности исследования и решения нелинейных уравнений.

В этой части книги мы исследовали явление резонанса применительно к поверхностным океанским волнам. Показано, что именно резонансом во многих случаях объясняется возникновение катастрофических волн. При этом основное внимание было уделено длинным волнам, распространяющимся над переменной глубиной. Это исследование будет продолжено в следующей части. Вместе с тем значительное внимание будет уделено катастрофическим волнам, возникающим на поверхности глубокого океана.

Литература

- [1] Hart, I.B., 1961. The World of Leonardo da Vinci. Macdonald, London.
- [2] G. Galilei. Dialogues Concerning Two New Sciences (1638). Translated by H. Crew and A. De Salvio. Northwestern Univ. Press, Evanston and Chicago, 1946.
- [3] M. Faraday, 1831. On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surface. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **121**, 299–340.
- [4] M. Faraday. Entry in *Faraday's Diary*. (Ed. T. Martin. London, G. Bell, 1932).
- [5] Lamb, H., 1932. Hydrodynamics. 6th edn. Dover Publications: New York.
- [6] Debnath, L., 1994. Nonlinear Water Waves. Academic Press: New York.
- [7] Пелиновский, Е.Н., 1996. Гидродинамика Волн Цунами. Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород.
- [8] Mader, C.L., 2004. Numerical Modeling of Water Waves. CRC Press: London
- [9] Куркин, А.А., Пелиновский, Е.Н., 2004. Волны-убийцы: Факты, Теория и Моделирование. Нижегород. гос. техн. ун-т, Нижний Новгород.
- [10] Mei, C.C., Stiassnie, M.S., Yue, D.K.–P., 2005. Theory and Applications of Ocean Surface Wave. Part 2. Nonlinear Aspects, World Scientific: NJ.
- [11] Tsunami and Nonlinear Waves. Ed. A. Kundu, Springer, 2007.
- [12] Advanced numerical models for simulating tsunami waves and runup. Eds. P. L.–F. Liu, H. Yeh, C. Synolakis, World Scientific, 2008.
- [13] Nonlinear Wave Dynamics. Ed. P. Lynett. World Scientific, 2009.
- [14] Kharif, C., Pelinovsky, E., Slunyaev, A., 2009. Rogue Waves in the Ocean. Springer.
- [15] Osborne, A.R., 2010. Nonlinear Ocean Waves. Academic Press.
- [16] Peregrine, D.H., 1983. Breaking waves on beaches. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 149–178.
- [17] Mei, C.C., Liu, P.L.–F., 1993. Surface waves and coastal dynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **25**, 215–240.
- [18] Kirby, J.T., 1997. Nonlinear, dispersive long waves in water of variable depth. In *Gravity Waves in Water of Finite Depth*: J.N.Hunt, Ed.; Computational Mech. Publications; Boston, 55–168.
- [19] Oron, A., Davis, S.H., Bankoff, S.G., 1997. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Modern Phys.*, **69** (3), 931–980.
- [20] Dias, F., Kharif, C., 1999. Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **31**, 301–349.

- [21] Gisler, G.R., 2008. Tsunami simulations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **40**, 71–90.
- [22] Zhi, L., Sibgatullin, N.R., 1997. An improved theory of long waves on the water surface. *J. Appl. Maths. Mech.*, (PMM), **61**, 177–182.
- [23] Madsen, P.A., Schaffer, H.A., 1998. Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **356**, 3123–3184.
- [24] Carrier, G.F., Wu, T.T., Yeh, H., 2003. Tsunami run-up and draw-down on a plane beach. *J. Fluid Mech.*, **475**, 79–99.
- [25] Lui, X., Duncan, J.H., 2003. The effects of surfactants on spilling breaking waves. *Nature*, **421**, 520–523.
- [26] Green, A.E., Naghdi, P.M., 1976. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.*, **76**, 237–246.
- [27] Camassa, R., Holm, D.D., Hyman, J.M., 1994. A new integrable shallow water equation. *Adv. Applied Mech.*, **31**, 1–33.
- [28] Liu, P.L.F., 2003. Wave propagation modeling in coastal engineering. *J. Hydraulic Res.*, **40**(3), 229–240.
- [29] Airy, G.B., 1845. Tides and Waves. In *Encyclopaedia Metropolitana*, London.
- [30] Andrews, D.G., McIntyre, M.E., 1978. An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian mean flow. *J. Fluid Mech.*, **89** (4), 609–646.
- [31] Dingemans, M.W., 2009. Some reflections on the generalized Lagrangian mean. In *Nonlinear Wave Dynamics*, Ed. P. Lynett, World Scientific.
- [32] Dingemans, M.W., 1997. *Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms*. World Scientific, Singapore.
- [33] Fujima, K., 2007. Tsunami runup in Lagrangian description. In *Tsunami and Nonlinear Waves*. Ed. A. Kundu, Springer.
- [34] Galiev, Sh.U., 2005. Strongly-nonlinear two-speed wave equations for coastal waves and their application. *Physica D*, **208**, 147–171.
- [35] Galiev, Sh.U., 2008. Strongly-nonlinear wave phenomena in restricted liquids and their mathematical description. In *New Nonlinear Phenomena Research*, Ed. T.Perlidze, 109–300, Nova Science Publishers, NY.
- [36] Новожилов В.В., 1958. Теория упругости. Судпромгиз, Ленинград. (Novozhilov, V.V., 1961. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press: New York.)
- [37] Stokes, G.G., 1847. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cam. Philosophical Soc.*, **8** (4), 441–455.
- [38] Benassai, G., 2006. *Introduction to Coastal Dynamics and Shoreline Protection*. WIT Press.

[39] Fedorov, A.V., Melville, W.K., 1998. Nonlinear gravity-capillary waves with forcing and dissipation. *J. Fluid Mech.*, **354**, 1–42.

[40] Longuet-Higgins, M.S., 1995. Parasitic capillary waves: a direct calculation. *J. Fluid Mech.*, **301**, 79–107.

[41] Hammack, J., Perlin, M., Henderson, D., 1990. Resonant interaction among ripples. In *Proc Inter. School of Physics «Enrico Fermi», Course CIX*; A.B. Osborne; Ed; 969–994.

[42] Jiang, L., Lin, H.-J., Schultz, W.W., Perlin M., 1999. Unsteady ripple generation on steep gravity-capillary waves. *J. Fluid Mech.*, **386**, 281–304.

[43] Iooss, G., Kirchgässner K., 1990. Bifurcation d'ondes solitaires en présence d'une faible tension superficielle. *C.R.Acad. Sci.*, Paris, Série 1, **311**, 265–268.

[44] Vanden-Broeck, J.M., Dias F., 1992. Gravity-capillary solitary waves in water of infinite depth and related free-surface flows. *J. Fluid Mech.*, **240**, 549–557.

[45] Helfrich, K.R., Melville, W.K., 2006. Long-nonlinear internal waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **38**, 395–425.

[46] Crapper, G.D., 1957. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude. *J. Fluid Mech.*, **2**, 532–540.

[47] Segur, H., 2007. Waves in shallow water, with emphasis on the tsunami of 2004. In *Tsunami and Nonlinear waves*. Ed. A. Kundu, Springer.

[48] Tsuji, Y., Yanuma, T., Murata, I., Fujiwara, C., 1991. Tsunami ascending in rivers as an undular bore. *Natural Hazards*, **4**, 257–266.

[49] Boussinesq, J., 1872. Theorie des ondes et remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures Appl.*, 2nd Series, **17**, 55–108.

[50] Russell, J.S., 1844. Report on waves. In *Rep. 14th Meet. British. Assoc. Adv. Sci.*, Murray, London, 311–390.

[51] Korteweg, D.J., Vries G.De., 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, **39** (5), 442–443.

[52] Remoissenet, M., 1996. *Waves Called Solitons*. Springer: Berlin.

[53] Ахмедиев Н. Н., Анкевич А., 2003. Солитоны: Нелинейные импульсы и пучки. Физматлит, Москва. (Akhmediev, N.N.; Ankiewicz, A., 1997. *Solitons*. Chapman & Hall.).

[54] Кившар Ю.С., Агравал Г.П., 2005. Оптические солитоны. Физматлит, Москва.

[55] *Dissipative Solitons*. Eds. Akhmediev, N., Ankiewicz, A., Springer: Berlin, 2005.

- [56] Karpman, V.I., Maslov, E.M., 1982. Comments on ‘soliton propagation in slowly varying media’. *Phys. Fluids*, **25**(9), 1686–1687.
- [57] Grimshaw, R., Pelinovsky, E., Talipova T., 1999. Solitary wave transformation in a medium with sign-variable quadratic–nonlinearity and cubic nonlinearity. *Physica D*, **132**, 40–62.
- [58] Островский, Л.А., Потапов, А.С., 2003. Введение в теорию модулированных волн. Физматлит, Москва. (Ostrovsky L.A., Potapov A.I., 1999. *Modulated Waves. Theory and Applications*. The Johns Hopkins. Univ. Press, Baltimore and London, 1999).
- [59] Grimshaw, R., 2005. Korteweg–de Vries equation. In *Nonlinear Waves in Fluids: Recent Advances and Modern Applications*. Grimshaw, R.; Ed.; Springer:
- [60] *Solitary Waves in Fluids*. Ed. Grimshaw, R.H.J., WIT Press, 2007.
- [61] Parkes, E.J., 2003. A note on solitary-wave solutions to compound KdV–Burgers equations. *Physics Letters, A*, **317**, 424–428.
- [62] Jackson, E.A., 1994. *Perspectives of Nonlinear Dynamics*. V.2. Cambridge University Press.
- [63] Taylor, G.I., 1910. The conditions necessary for discontinuous motion in gas. *Proc. Roy. Soc. Lond., A*, **84**, 371–377.
- [64] Camassa R., Holm, D. D., 1993. An integrable shallow water equation with peaked solutions. *Phys. Rev. Letters*, **71** (11), 1661–1664.
- [65] Сибгатуллин, Н. Р., 1984. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. Наука, Москва. (Sibgatullin, N. R., 1991. *Oscillations and Waves in Strong Gravitational and Electromagnetic Fields*, Springer).
- [66] Green, G., 1837. On the motion of waves in a variable canal of small depth and width. *Camb. Trans. VI, Papers*, 225.
- [67] Constantin, A., Johnson, R.S., 2008. Propagation of very long waves, with vorticity, over variable depth, with applications to tsunamis. *Fluid Dynamics Research*, **40**, 175–211.
- [68] Smith, R.A., 1998. An operator expansion formalism for nonlinear surface waves over variable depth. *J. Fluid Mech.*, **363**, 333–347.
- [69] Poincare, H. *Les Methods Nouvelles de la Mechanique Celeste*. I–III, Gauthier–Villars : Paris, 1892–1899.
- [70] Пригожин, И., 2001. Конец определенности. РХД, Москва. (Prigogine, I., 1997. *The end of certainty*. The Free Press).
- [71] Пригожин, И., Николис, Г., 2008. Познание сложного. Издательство ЛКИ, Москва. (Nicolis, G., Prigogine, I., 1989. *Exploring Complexity*. W. H. Freeman, NY).
- [72] Зарембо, Л. К., Красильников, В. А., 1966. Введение в нелинейную акустику. Наука, Москва.

[73] Руденко, О. В., Солуян, С. И., 1975. Теоретические основы нелинейной акустики. Москва, Наука. (Rudenko, O.V., Soluyan, S. I., 1977. Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. Consultants Bureau: Plenum).

[74] Галиев, Ш. У., Ильгамов, М. А., Садыков, А. В., 1970. О периодических ударных волнах в газе. *Изв. АН СССР, МЖГ*, **N2**, 57–66.

[75] Галиев, Ш. У., 1972. Вынужденные установившиеся колебания нелинейно-упругого слоя. *Изв. АН СССР, МТТ*, **N1**, 58–63.

[76] Галиев, Ш. У., 1972. Вынужденные продольные колебания нелинейно-упругого тела. *Изв. АН СССР, МТТ*, **N4**, 80–87.

[77] Галиев, Ш. У., 1988. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. Наукова думка, Киев.

[78] Stokes, G.G., 1847. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cam. Philosophical Soc.*, **8** (4), 441–455.

[79] Galiev, Sh. U. Galiyev, T. Sh., 2001. Nonlinear transresonant waves, vortices and patterns: From microresonators to the early Universe. *Chaos*, **11**, 686–704.

[80] Galiev, Sh. U., 2003. The theory of non-linear transresonant wave phenomena and an examination of Charles Darwin's earthquake reports. *Geophys. J. Inter.*, **154**, 300–354.

[81] Galiev, Sh. U., 2003. Transresonant evolution of wave singularities and vortices. *Phys. Lett., A*, **311**, 192–199.

[82] Лавренов, И. В., 1998. Математическое моделирование ветровых волн в пространственно-неоднородном океане. Гидрометеоиздат, Санкт-Петербург, 1998. (Lavrenov, I.V., 2003. Wind-Waves in Ocean., Springer).

[83] Chester, W., 1964. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, **18**, 44–64.

[84] Chester, W. A model of the undular bore on a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, **42** (166) 367–377.

[85] Tsuji, Y., Yanuma, T., Murata, I., Fujiwara, C., 1991. Tsunami ascending in rivers as an undular bore. *Natural Hazards*, **4**, 257–266.

[86] Horn, D.A., Imberger, J.M., Ivey, G.N., Redekopp, L.G., 2002. A weakly nonlinear model of long internal waves in closed basins. *J. Fluid Mech.*, **467**, 269–287.

[87] Chester, W., Bones, J.A., 1968. Resonant oscillations of water waves. II. *Experiment. Proc. Roy. Soc., A*, **306**, 23–39.

[88] Табор, М., 2001. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. УРСС, Москва.

[89] Thompson, J.M.T., Soliman, M.S., 1991. Indeterminate jumps to resonance from a tangled saddle-node bifurcation. *Proc. R. Soc. Lond., A*, **432**, 101–111.

[90] Thompson, J.M.T., 1982. Instability and Catastrophes in Science and Engineering. *John Wiley & Sons*.

[91] Галиев, Ш. У., Шихранов, Н. Н., 1971. Исследование методом возмущений периодических ударных волн, возбуждаемых в диссипативной среде. В *Труды семинара по теории оболочек*, **2**, Казанский физико-технический институт, Казань, 214–239.

[92] Галиев, Ш. У., 1973. Нелинейные колебания газа, поддерживаемые в замкнутой трубе источником тепла. *Изв. ВУЗов. Сер. Авиац. техника*, **16** (2), 12–18.

[93] Галиев, Ш. У., Галиев, Т. Ш., 1994. Линейные и нелинейные вынужденные колебания течения пузырьковой жидкости в деформируемой трубе (обзор). *Проблемы Прочности*, **29** (9), 3–29.

[93] Найфэ, А. Х., 1976. Методы Возмущений. Мир, Москва.

[94] Nayfen, A.H., Mook, D.T., 1995. Nonlinear Oscillations. John Wiley & Sons, NY.

[95] Jimenez, J., 1973. Nonlinear gas oscillations in pipes. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.*, **59**, 23–46.

[96] Физический Энциклопедический Словарь. Главный ред. А. М. Прохоров, Советская Энциклопедия, Москва, 1984.

[97] Грин, Б., 2005. Элегантная вселенная. УРСС, Москва. (Greene, B., 1999. The elegant Universe. Vintage Books, NY).

[98] Узизем, Дж., 1977. Линейные и нелинейные волны. Мир, Москва.

[99] Гапонов-Грехов, А. В., Рабинович, М. И., 1984. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры. В *Физика XX века: Развитие и перспективы. Наука, Москва*.

[100] Sagdeev, R.Z., Usikov, D.A., Zaslavsky, G.M., 1988. Nonlinear Physics. Harwood Academic Publishers.

[101] Накоряков, В. Б., Покусаев, Б. Г., Шрейбер, И. Р., 1990. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. Энергоиздат, Москва.

[102] Наугольных, К. А., Островский, Л. А., 1990. Нелинейные волновые процессы в акустике. Наука, Москва.

[103] Рабинович, М. И., Трубецков, Д. И., 2000. Введение в теорию колебаний и волн. РДХ, Москва.

[104] Campbell, D.K., Flach, S., Kivshar, Y.S., 2004. Localizing energy through nonlinearity and discreteness. *Physics Today*, **57** (1), 43–49.

[105] Betchov, R., 1958. Nonlinear oscillations of the column of gas. *J. Phys. Fluid*, **1** (3), 205–212.

[106] Горьков, А. П., 1963. Нелинейные акустические колебания столба газа в закрытой трубе. *Инженерно-Физический Журнал*, **3** (2), 453–457.

[107] Ильгамов, М. А., 1969. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. Наука, Москва.

[108] Crocco, L., Chengsin-J, 1956. Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors. Butter-worth, London. (Крокко, Л., Чжен Синь-И, 1958. Теория неустойчивости горения в ЖРД. Иностранная литература, Москва).

[109] Brownlee, W.G., 1964. Nonlinear axial combustion instability in solid propellant motors. *AIAA Journ.*, **2** (2), (Нелинейная продольная неустойчивость горения в ракетных двигателях твердого топлива. Ракет. техн. и космос. 1964, 2).

[110] Boa-Teh Chu, Ving S J., 1963. Thermally driven nonlinear oscillations in a pipe with travelling shock waves. *Phys. Fluids*, **6** (11).

[111] Boa-Teh Chu, 1963. Analysis of a self-sustained thermally driven nonlinear vibration. *Phys. Fluids*, **6** (11).

[112] Mitchell, C.E., Crocco, L., Sirignano, W.A., 1969. Nonlinear longitudinal instability in rocket motors with concentrated combustion. *Combust. Sci. and Mechonol.*, **1** (1), 78–85.

[113] Chester, W., 1964. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, **18**, 44–64.

[114] Натанзон, М. С., 1965. Вынужденные разрывные колебания жидкости в трубах. *Изв. АН СССР, Механика*, **2**, 33–42.

[115] Натанзон, М. С., 1977. Продольные автоколебания жидкостной ракеты. Машиностроение, Москва.

[116] Ilgamov, M.A., Zaripov, R.G., Galiullin, R.G., Repin, V.B., 1996. Nonlinear oscillations of a gas in a tube. *Appl. Mech. Rev.*, **49**, 138–154.

[117] Mortell, M. P., Varley, E., 1970. Finite amplitude waves in bounded media: nonlinear vibrations of an elastic panel. *Proc. R. Soc. Lind., A*, **318**, 169–196.

[118] Collins, W.D., 1971. Forced oscillations of systems governed by one-dimensional nonlinear wave equations. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **24**, 129–153.

[119] Taylor, G.I., 1954. An experimental study of standing waves. *Proc. Royal Soc., A*, **218**, 44–59.

[120] Narimanov, G.S., 1957. Moment of a tank partly filled by a fluid: the taking into account of non-smallness of amplitude. *J. Appl. Maths Mech. (PMM)*, **21**, 513–524.

[121] Verhagen, J.H.G., van Wijngaarden, L., 1965. Nonlinear oscillations of fluid in a container. *J. Fluid Mech.*, **22**, 737–751.

[122] Chester, W., 1968. Resonant oscillations of water waves. I. Theory. *Proc. Roy. Soc., A*, **306**, 5–22.

- [123] Chester, W., Bones, J.A., 1968. Resonant oscillations of water waves. II. Experiment. *Proc. Roy. Soc., A*, **306**, 23–39.
- [124] Ockendon, J.R., Ockendon, H., 1973. Resonant surface waves. *J. Fluid Mech.*, **59**, 397–413.
- [125] Cox, E., Mortell, M.P., 1986. The evolution of resonant water-wave oscillations. *J. Fluid Mech.*, **162**, 99–116.
- [126] Ockendon, H., Ockendon, J.R., Johnson, A.D., 1986. Resonant sloshing in shallow water. *J. Fluid Mech.*, **167**, 465–479.
- [127] Galiev, Sh.U., Galiev, T.Sh., 1998. Resonant travelling surface waves. *Phys. Lett., A*, **246**, 299–305.
- [128] Bredmose, H., Brocchini, M., Peregrine, D.H., Thais, L., 2003. Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves. *J. Fluid Mech.*, **490**, 217–249.
- [129] Cox, E.A., Gleeson, J.P., Mortell, M.P., 2005. Nonlinear sloshing and passage through resonance in a shallow water tank. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, **56** (4), 645–680.
- [130] Royon-Lebeaud, A., Hopfinger, E.J., Cartellier, A., 2007. Liquid sloshing and wave breaking in circular and square-base cylindrical containers. *J. Fluid Mech.*, **577**, 467–494.
- [131] Seymour, B.R., Mortell, M.P., 2007. Resonant hydraulic sloshing in a tank of variable depth. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, **58** (5), 818–831.
- [132] Ibrahim, R.A., 2005. Liquid Sloshing Dynamics. Cambridge University Press.
- [133] Faltinsen, O.M., Timokha, A.N., 2009. Sloshing. Cambridge University Press.
- [134] Самарский, А. А., Михайлов, А. П., 2001. Математическое моделирование. Физматлит, Москва.
- [135] Niederhaus, C.E., Jacobs J.W., 2003. Experimental study of the Richtmyer–Meshkov instability of incompressible fluids. *J. Fluid Mech.*, **485**, 243–277.
- [136] Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Cho, J.S., Lahey Jr, R.T., Nigmatulin, R.I., Block, R.C., 2002. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation. *Science*, **295**, 1868–1873.
- [137] Nigmatulin, R.I., Taleyarkhan, R.P., Lahey, R.T., 2004. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation revisited. *J. Power and Energy*, **218** (A5), 345–364.

[138] Nigmatulin, R., 2005. Nano-scale thermonuclear fusion in imploding vapour bubble. *Nuclear Engng. Design*, **235** (10–12), 1079–1091.

[139] Prosperetti, A., 1991. The thermal behaviour of oscillating gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, **222**, 587–616.

[140] Нигматулин, Р. И., 1987. Динамика многофазных сред. В 2-х томах, Наука, Москва. (Nigmatulin, R. I., 1991. Dynamics of Multiphase Media. Parts I and II, Taylor & Francis, London).

[141] Ганиев, Р. Ф., Украинский, Л. И., 2008. Нелинейная волновая механика и технологии. P&C Dynamics, Москва.

[142] Gaitan, D.F., 1990. An experimental investigation of acoustic cavitation in gaseous liquids. Ph.D. Thesis, Univ. of Mississippi.

[143] Gaitan, D.F., Crum, L.A., 1990. Sonoluminescence from single bubble. *J. Acoust. Soc. Am. Suppl.*, **1**, **87**, 141.

[144] Nigmatulin, R.I., Akhatova, Sh., Vakhitova, N.K., Lahey R.T. Jr., 1998. The resonant supercompression and sonoluminescence of a gas bubble in a liquid-filled flask. *Chemical Engineering Communications*, **168** (1), 145–169.

[145] Галиев, Ш. У., 1971. Нелинейные одномерные колебания вязкого теплопроводящего газа в сферическом слое. В *Труды семинара по теории оболочек*, **2**, Казанский физико-технический институт, Казань, 240–253.

[146] Галиев, Ш. У., 1983. Кавитационные резонансные колебания жидкости в деформируемых трубах и резервуарах. Препринт Института проблем прочности, АН Украинской ССР, Киев.

[147] Галиев, Ш. У., Панова, О. П., 1995. Периодические ударные волны в сферических резонаторах. *Проблемы прочности*, **27** (10), 49–73.

[148] Chester W., 1991. Acoustical resonance in spherically symmetric waves. *Proc. R. Soc. Lond.*, A, **434**, 459–463.

[149] Ellermeier, W., 1997. Acoustic resonance of radially symmetric waves in a thermoviscous gas. *Acta Mech.*, **121** (1–4), 97–113.

[150] Galiev, Sh.U., 1999. Passing through resonance of spherical waves. *Phys. Lett.*, A, **260**, 225–233.

[151] Galiev, Sh.U., 1999. Topographic effect in a Faraday experiment. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 6963–7000.

[152] Matsumoto, Y., 2006. Bubble physics. In *Multiphase Flow Handbook*. Ed. Crowe, C.T., Taylor & Francis.

[153] Tadepalli, S., Synolakis, C.E., 1994. The run-up of N-waves on sloping beaches. *Proc. R. Soc. Lond.*, A, **445**, 99–112.

[154] Tsunamis. Ed. E.N. Bernard, A.R. Robinson, Harvard University Press, 2009.

- [155] Galiev, Sh.U., Mallinson, G.D., 2009. Modelling of Darwin's description of coastal evolution of catastrophic tsunami. In: *Proc. 16 Int. Congr. Sound Vibr.*, Krakow.
- [156] Cap, F., 2006. Tsunamis and Hurricanes. Springer.
- [157] Levin, B., Nosov, M., 2009. Physics of Tsunamis. Springer.
- [158] Dingemans, M.W., 1994. Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements. Rep. H1684.12, Delf Hydraulics.
- [159] Cooker, M.J., Peregrine, D.H., Vidal, C., Dold, J.W., 1990. The interaction between a solitary wave and a submerged semicircular cylinder. *J.Fluid Mech.*, **215**, 1–22.
- [160] Barenblatt, G.I., Leykin, I.A., Kazmin, A.S. et al., 1985. Rips in the white sea. *Rep. Acad. Sci. USSR (ДАН СССР)*, **281** (6), 1435–1439.
- [161] Darwin, C., 1845. Journal of Researches into the Natural History and Geology of the Countries Visited during the Voyage of H.M.S. Beagle Around the World, under the Command of Captain Fitz Roy, R.N. T. Nelson and Sons, London.

Часть III.

Океанские катастрофические волны как трансрезонансное явление

...сильные шторма, с которыми мы столкнулись у мыса Горн... В полдень на нас обрушилась огромная волна... Если бы за первой волной последовала вторая, наша участь была бы решена скоро и навсегда...

Дарвин

Было бы странно, если бы вся природа, все планеты должны были подчиняться вечным законам, а одно небольшое существо, ростом в пять локтей, презирая эти законы, могло бы действовать, как ему заблагорассудится.

Вольтер

Трудно отделаться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и обладают своим собственным разумом, что они умнее нас ...

Генрих Герц

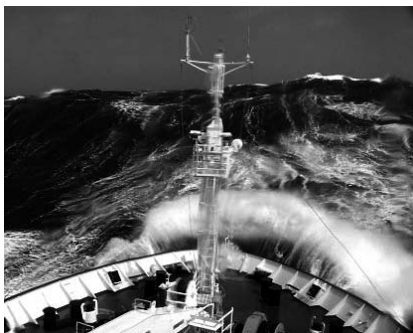


Рис. 115. Экстремальная волна, наблюдаемая около мыса Горн (высота — приблизительно 20 м). Фотография Григорьева А. В. (Институт Океанологии Российской академии наук).

Бурное развитие космических и информационных технологий последних лет позволило получить неопровержимые свидетельства, подтверждающие существование гигантских волн в океане. География распространения, частота появления и большая разрушительная способность гигантских волн могут в корне изменить подходы к стандартам безопасности строительства и эксплуатации морских нефтяных платформ, танкеров и судов [1–16].

По-видимому, с одной из таких волн встретился *Бигль* около мыса Горн. Мы кратко рассмотрели эти волны в части I — разделы 2.5.6 и 3.5. Однако там у нас не было возможности иллюстрировать замечание Дарвина какими-либо расчетами. Теперь, после развития теории, изложенной в части II, у нас такая возможность появилась.

Здесь проблема гигантских (катастрофических, экстремальных) волн рассматривается как некоторая часть проблемы возникновения и эволюции нелинейных океанских волн. Изучаются также некоторые аспекты действия этих волн на корпус судна.

11. Катастрофические (экстремальные) океанские волны

Если не опираться на прочный фундамент Природы, то труд принесет мало чести и еще меньше пользы.

Леонардо да Винчи

11.1. Волны и суда на поверхности океана

В океане есть много видов волн. Хотя каждая волна характеризуется общими элементами, такими как вершина — наивысшая точка гребня волны, подошва — наинизшая точка ложбины волны, они, вместе с тем, имеют сильные отличия в форме, скорости и причине зарождения. Например, очень длинные волны (приливы) существуют на водной поверхности. Более короткие волны могут быть произведены землетрясениями, океанскими потоками, атмосферным давлением. В то же самое время на воде существуют и очень короткие волны (рябь). Существуют также внутренние океанские волны. Их длина может измеряться километрами, а амплитуда — десятками метров. Их существование может проявляться и на океанской поверхности. Однако появление большинства волн связано с ветром. Ветровые волны характерны тем, что подветренный склон их круче, чем наветренный, поэтому верхушки гребней обычно заваливаются, образуя пену, или даже срываются сильным ветром. Состояние поверхности океана зависит от скорости ветра, его длительности и расстояния, на котором дует ветер. Очень короткие волны вызываются легким порывом ветра. У типичных развитых океанских волн длина может быть от 100 до 300 м. Таким образом, как правило, океанские волны — не очень длинные.

Если атмосферное давление уменьшается, в то время, как скорость ветра увеличивается, то могут возникать и взаимодействовать две системы волн, состоящие из ветровых волн и длинных волн, произведенных циклоном. Порыв ветра может создать короткую волну на выпуклости длинной волны. Эта волна может начать «высасывать» энергию из длинной волны, особенно в то время, когда скорости и фазы волн близки или совпадают. В этом случае может иметь место резонансное усиление короткой волны.

В начальной стадии развития ветровые волны могут распространяться параллельными рядами, которые затем распадаются на обособленные гребни (трехмерное волнение). Взволнованная ветром поверхность воды приобретает весьма сложный рельеф, непрерывно изменяющийся во времени, поэтому на

поверхности моря всегда существуют ветровые волны, самые разнообразные по своим размерам (иногда достигая длины до 400–800 м, высоты 12–13 м и скорости распространения 14–15 м/сек).

Если ветер, вызвавший волнение, стихает, то ветровые волны постепенно преобразуются в свободные волны, называемые зыбью, которые имеют более правильную форму, чем ветровые волны, и большую длину гребней. Так как эти волны распространяются почти без потерь энергии, то они могут пробегать огромные расстояния. Так, волны зыби, формирующиеся в районе мыса Горн, могут пробегать расстояние до 10 тыс. км. Наиболее часто встречается смешанное волнение, при котором одновременно наблюдаются зыбь и ветровые волны.

В области действия ветра возникают волны различных амплитуд и частот, они имеют различные направления распространения. Однако группа волн, обладающая тем же самым направлением распространения, что и ветер, может начать расти (рис. 116). Если продолжительность действия ветра достаточно велика, то эта группа волн может быть усилена до значительных амплитуд, в то время как другие волны не будут увеличиваться в размере. В этом процессе ветер действует как фильтр. В результате только группа волн, которая резонирует с ветром, усиливается. Таким образом, только если резонансные условия выполнены (сильная временная и пространственная корреляция ветра и группы волн), то локальное усиление волн может иметь место. Увеличение амплитуды ограничено потерями энергии ветра в волне или тем, что волны покидают резонансную область действия ветра (рис. 116).

Резонанс волн может быть связан не только с действием ветра, но с выполнением других условий резонанса в некоторой малой области океана. В этой области при удачном для волны раскладе она может почти мгновенно вырасти до катастрофической величины. Обычно, время существования таких волн крайне мало, так как они опрокидываются из-за неустойчивости.

Объекты на поверхности синусоидальной волны, в частности, такие как суда, имеют тенденцию повторять то же самое круговое движение, что и частицы воды на поверхности волны (рис. 117). Имеется только небольшое различие в движе-

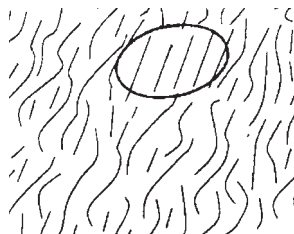


Рис. 116. Овальная линия указывает область местного усиления вызванных ветром океанских волн.

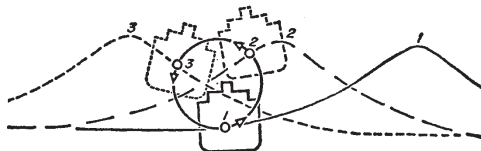


Рис. 117. Круговое движение корабля на поверхности длинной волны, аналогичное круговому движению частиц воды на поверхности волны [17].

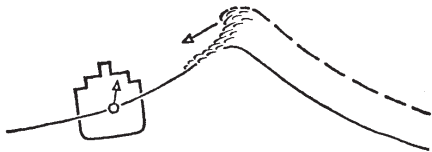


Рис. 118. Опрокидывание гребня волны на судно. Вода в гребне начинает двигаться независимо от остальной массы волны и ударяет судно [17].

нии большей части судна и прилегающей к нему воды. Для людей подобное волнение судна может быть неприятным, но оно безопасно.

При опрокидывании вода в гребне волны начинает перемещаться быстрее, чем остальная масса волны (рис. 118). В результате может произойти удар гребня по судну. Именно этот процесс

наносит серьезный ущерб судам, которые настолько неудачливы, что встречаются большую волну в момент ее опрокидывания. Сотни тонн яростно движущейся воды, содержащейся в гребне океанской волны, могут серьезно повредить даже крупное судно.

11.2. Результаты наблюдений катастрофических волн

Высота волны определяется расстоянием от ее вершины до подошвы. Штормовые волны в океане, в среднем, достигают 7 метров высоты, а в чрезвычайных условиях такие волны могут достигнуть 16 метров. Однако в последние годы исследователи обнаружили существование значительно более огромных волн — истинных монстров — до 30 метров высоты (приблизительно высота 10-этажного здания), — которые могут появиться, не предупреждая, в середине океана как при наличии сильного ветра, так и при ясной погоде. Такие волны могут состоять из почти вертикальной стены воды, которой предшествует впадина, настолько глубокая, что она упоминается в сказаниях моряков как «отверстие в море». Судно, сталкивающееся с такой волной, может быть потоплено за несколько секунд.

Эти волны называют экстремальными (также гигантскими или волнами-убийцами). Мы также называем эти волны катастрофическими, в силу того, что они представляют огромную опасность для судов, а также, чтобы ввести эти волны в круг рассматриваемых в этой книге. Эти волны принципиально отличаются от цунами, которые усиливаются лишь вблизи берега, поэтому, как мы неоднократно упоминали, цунами опасны для береговых сооружений и судов, стоящих близко к берегу, в то время как экстремальные волны представляют катастрофическую опасность для судов и морских сооружений как вблизи от берега, так и в открытом океане.

Экстремальные волны часто определяются как волны, высота которых в два и более раз превышает значимую высоту H_s . Отметим, что значимая высота H_s определяется как средняя высота одной трети самых высоких волн.

Правда, абсолютная высота волны — не самая важная характеристика для моряков. Не менее важна крутизна волны, которая определяется, как KA , где A — амплитуда волны. У многих ветровых волн крутизна не выше 0.06. Имеются и более крутые волны, но, к счастью моряков, их крутизна не превышает 0.1. Однако крутизна штормовых океанических волн, встречающих противонаправленное течение, может достигнуть $1/7$. Вообще, крутизна волны уменьшается с увеличением длины волны. Это справедливо, но не вполне верно для катастрофических волн, которые могут быть очень крутыми. Фронты некоторых катастрофических волн могут состоять из почти вертикальной стены воды. Чтобы оценить, что они могут, достаточно взглянуть на фотографию «Уильстара» (рис. 119).



Рис. 119. Разрушение носовой части норвежского танкера «Уильстар» (Wilstar) в 1974 г. в результате действия волны с крутым фронтом.

Инженеры, проектируя суда и строя океанические платформы, которые все дальше и дальше уходят от земли, очевидно, должны детально знать нагрузки от действия этих волн. Типичная двенадцатиметровая волна угрожает лишь шестью тоннами на квадратный метр. Большинство современных судов может выдержать до 15 тонн на квадратный метр. В случае катастрофических волн нагрузки могут быть много больше. Она может достигать ста тонн на квадратный метр (около 980 килопаскалей).

Около 10 лет назад Европейское космическое агентство (ESA) подготовило доклад, в котором утверждается, что катастрофические волны встречаются в океане значительно чаще, чем это предполагалось ранее. Этот вывод, подтвержденный независимыми измерениями волн в Южной Атлантике [1–4], может в корне изменить подход к стандартам безопасности строительства и эксплуатации морских судов и сооружений. Предлагается пересмотреть существующие критерии безопасности судов и сооружений [18–20]. Такие критерии не могут быть получены «в лоб» по данным наблюдений в силу относительной редкости катастрофических волн. Основой могут служить либо теоретические модели [18–23], либо нетрадиционные методы наблюдений, прежде всего с нефтяных платформ и со спутников.

Именно благодаря наблюдениям с нефтяной платформы, удалось получить первые точные измерения катастрофической волны — знаменитой «Новогодней» волны [7, 8]. Измерения волнения производились на нефтедобывающей платформе «Дропнер» в Северном море с помощью стандартного

лазерного волномера, 20-минутный фрагмент записи показан на рис. 68. Глубина моря у платформы 70 м. Значимая высота волн, набегающих на платформу в тот день, была 11.9 м, период волн — 10.8 сек. Наблюдавшаяся катастрофическая волна была вертикально асимметричной: высота гребня (18.6 м) существенно превышала глубину впадины (чуть более 7 м). Эта волна была несколько короче (длина волны около 220 м) и существенно круче, чем среднее волнение. Для нее параметр дисперсии $Kh \approx 2$, отношение $h / \lambda \approx 0.3$. Таким образом, эта волна была достаточно длинной для ее описания в рамках теории длинных волн, представленной разделе 6.7. Крутизна волны $KA \approx 0.37$, где A — амплитуда волны, $A \approx 13$ м. Другой важный параметр, характеризующий нелинейность профиля волны, $A / h \approx 0.2$. Таким образом, оба последних параметра определяют «Новогоднюю» волну как сильно-нелинейную [3]. В целом, все сказанное позволяет думать, что для ее описания потребуется, как минимум, квадратично-нелинейная теория длинных волн. К сожалению, волномер не позволял определить направление волны, но, по сообщениям очевидцев, это направление существенно отличалось от направления ветра. Те же визуальные наблюдения и математическое моделирование события показали, что эта волна была короткоживущей, т. е. ее амплитуда была существенно выше фонового волнения на расстоянии менее 1 км, т. е. на масштабах 3–4 длин волн [2–3]. Иными словами, такая волна особенно опасна для судов, поскольку времени на уклонение от встречи с подобной волной практически не бывает.

По наблюдениям Национального управления океанических и атмосферных исследований США экстремальные волны бывают рассеивающиеся и нерассеивающиеся. Нерассеивающиеся могут проделать по морю довольно долгий путь: от шести до десяти миль. Если судно замечает волну издали, то можно успеть принять какие-то меры. Рассеивающиеся же появляются буквально ниоткуда, обрушиваются и исчезают.

Британская исследовательская группа наблюдала некоторые из самых больших морских, когда-либо измеряемых, волн во время специального выхода в штормовое море корабля «Открытие» (январь–февраль 2000) [24]. Целая серия гигантских штормовых волн бросала судно из стороны в сторону и грозила его потопить. Некоторые волны были настолько большими, что, согласно компьютерным моделям, используемым, чтобы установить требования безопасности для судов и нефтяных платформ, они не должны были бы даже существовать [24]. Ученые из британского Национального Центра Океанографии хотели наблюдать штормовые волны вблизи. То, что они зафиксировали, превосходило все их ожидания и могло стоить им жизни.

Около острова Роскал (*Rockall*), в 250 километрах к западу от Шотландии, встретились огромные волны. Когда ученые позднее проверили свои измере-

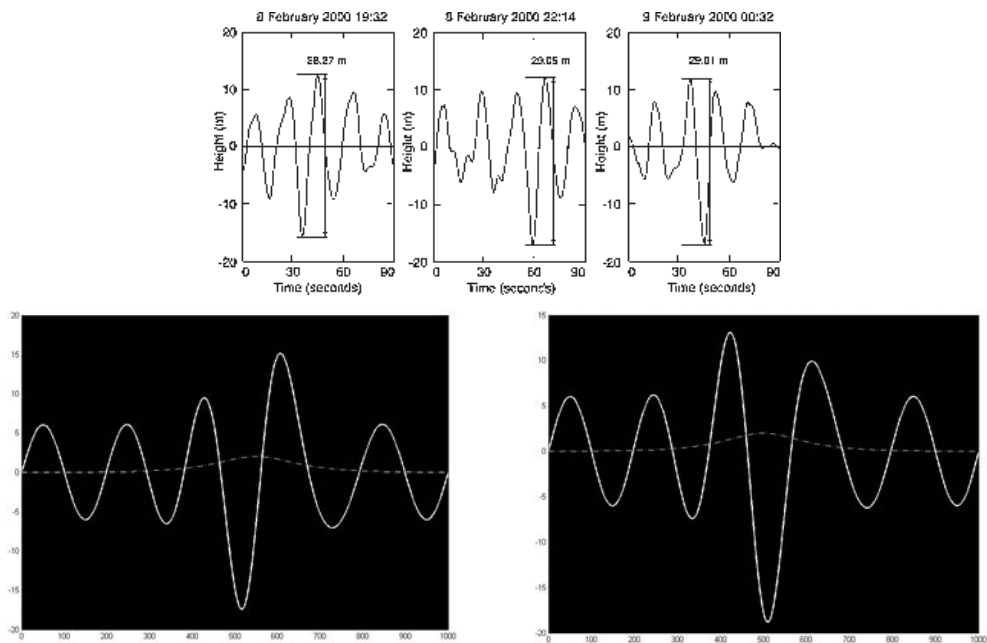


Рис. 120. Волны с высотой немного больше, чем 29 м были измерены британским океанографическим научно-исследовательским судном к западу от Шотландии. Приведена запись трех самых больших катастрофических волн [24] (верх рисунка). Результаты моделирования согласно разделу 16.3 и формулы (16.37). Штрихпунктирные линии определяют резонансные полосы (низ рисунка).

ния, они обнаружили, что самая высокая из этих волн имела высоту почти 30 метров (98 футов). Сила ветра была около 9 баллов. И волна была такая не одна. «Нас атаковывали подобные волны в течение 12 часов», — сказала Наоми Холлидэй, лидер экспедиции.

(См. также <http://www.spiegel.de/international/spiegel/0,1518,408953,00.html> и рис. 120.)

Для нашего исследования важно, что ученые наблюдали волны, вызванные действием ветра. Были зафиксированы группы волн, состоящие из волны максимальной высоты и двух сопутствующих волн несколько меньшей амплитуды. Эти волны можно отнести к так называемому классу «трех сестер». Эти волны имеют не слишком крутые фронты, во всяком случае, это не стена воды, в которую может эволюционировать у берега волна цунами (см. рис. 59, 62 и 82). Отметим также, что волны, представленные на рис. 120, почти симметричны относительно невозмущенной поверхности океана. В этом они

принципиально отличаются от одиночной «Новогодней» волны, показанной на рис. 68.

Катастрофические волны долгое время считались морским мифом: современные теории волнообразования (которые, в общем, работают довольно успешно) предсказывают, что вероятность появления таких волн ничтожно мала. Чем больше волна, тем реже она появляется (если только ее не вызывает какая-то геофизическая катастрофа) — даже при сильном ветре и большом волнении эти волны должны были бы появляться настолько редко, что на просторах Мирового океана люди с ними, скорее всего, никогда бы не сталкивались. Однако эти волны появляются. Они наблюдались даже при малом ветре и относительно слабом волнении, что подводит к мысли, что само явление этих волн может быть связано с особенностями динамики и трансформации самих морских волн при их распространении в океане. Следовательно, вопрос о вероятности появления этих волн может быть сформулирован как вопрос о физических механизмах, повышающих эту вероятность. Закономерно возникает и следующий вопрос, — на какие физические процессы образования экстремальных волн следует, прежде всего, обратить внимание? Связь с определенными физическими механизмами позволила бы объяснить некоторые характерные черты этих катастрофических волн: их большую крутизну, неожиданность появления и т. п.

11.3. Возможные причины появления катастрофических волн

За тысячи лет мореплавания люди научились бороться с опасностями водной стихии. Лодии указывают безопасный путь, синоптики предупреждают о штормах, спутники наблюдают за айсбергами и другими опасными объектами. Однако до сих пор непонятно, как уберечься от тридцатиметровой волны, которая неожиданно возникает без видимых причин.

Откуда берутся катастрофические волны? Всеобъемлющего и удовлетворительного ответа на этот вопрос не существует. Реальная частота их появления очевидным образом расходится с предсказанной теоретически. Было предложено несколько теорий специально для объяснения этого феномена, некоторые из них были удачны в отдельных аспектах, но ни одна пока не получила полного признания [1–4].

Некоторые эмпирические данные о том, в каких условиях возникновение гигантской волны более вероятно, все же известны. Так, если ветер гонит волны против сильного течения, то это может привести к появлению высоких крутых волн. Этим печально известно, например, течение Игольного мыса вблизи восточного побережья Южной Африки. Другими зонами повышенной опасно-

сти являются течение Куроисио, Гольфстрим, Северное море и прилегающие районы.

Кроме указанной причины, эксперты называют следующие предпосылки для возникновения катастрофической волны: 1) область пониженного давления; 2) ветер, дующий в одном направлении более 12 часов подряд; 3) волны, движущиеся с той же скоростью, что и область пониженного давления; 4) быстрые волны, догоняющие более медленные волны и сливающиеся с ними. Согласно некоторым гипотезам, появление таких волн объясняется обрывистым склоном дна, резкими усилениями ветра и крупной зыбью, идущей из районов Антарктики. По нашему мнению, решающей предпосылкой могут являться ступенчатые вертикальные неоднородности в океане [58]. Это образования с чередованием по глубине относительно толстых и квазигомогенных слоев (линз) по какой-либо одной или нескольким характеристикам воды, разделенных значительно более тонкими прослойками с высокими значениями в них вертикальных градиентов этих характеристик. Основным элементом таких неоднородностей является так называемая «ступенька». При этом толщина однородных слоев изменяется от метра до нескольких десятков метров, а прослойка — от десятков сантиметров до нескольких метров. Такие неоднородности могут образовывать резонансные области (см. рис. 116) в которых происходит быстрое усиление волны. Возникнув, катастрофическая волна меняет окружающую среду (воздушные потоки, приповерхностные характеристики океана, последующие за ней морские волны). Это, а затем потеря устойчивости катастрофической волны, приводит к разрушению резонансной области, поэтому последующие волны не усиливаются.

Моделирование этих волн основано обычно на одном из следующих физических механизмов.

Линейный механизм формирования катастрофической волны может быть исследован довольно просто в рамках линейной теории поверхностных волн. Поверхностные океанические волны, распространяющиеся вдали от берега, являются диспергирующими волнами. В глубоком океане волны с различными длинами, распространяясь с разными скоростями, могут совпасть в определенный момент в некоторой точке пространства и дать, в принципе, сколь угодно большой всплеск. Вероятность очень сильного всплеска ничтожно мала и очень сильно зависит от некоторого начального распределения амплитуд (энергий) отдельных волновых компонент. Такая волна может быть получена в лабораторных условиях — частота волнопродуктора уменьшается по специальному закону таким образом, чтобы быстрые низкочастотные волны догнали высокочастотные относительно медленные волны в нужной точке — точке фокусировки [3, 12]. Максимальная высота волны в точке фокусировки в рам-

ках линейной теории ничем не ограничена. Ограничения связаны с нелинейными процессами, в частности, с обрушением достаточно крутых волн.

Волны, возникающие в результате такой фокусировки, очевидно, будут короткоживущими — быстро сбежавшиеся волновые гребни (впадины) так же быстро разбегутся. Эта особенность наблюдается для реальных катастрофических волн и подтверждается результатами численного моделирования.

Интересно, что волны, возникающие в результате линейной фокусировки, могут быть как волнами возвышения, так и волнами-впадинами. Катастрофические волны, имеющие вид впадин, довольно часто наблюдаются в океане и представляют серьезную опасность для судов из-за трудности их своевременного обнаружения.

Слабо-нелинейный механизм формирования катастрофических волн, по-видимому, принципиальным образом меняет понимание причин их появления. В результате нелинейности эффект сложения первоначально независимых возмущений может существенно отличаться от их простой суммы, так как компоненты ветрового волнения могут интенсивно обмениваться между собой энергией. Принципиальный физический эффект, связанный с нелинейностью волн, — возможность формирования волновых групп и уединенных волн. Отдельные нелинейные волны (группы) могут распространяться на значительные расстояния без существенного изменения формы. Именно с нелинейностью морских волн связано то, что катастрофические волны могут образовываться не только в виде внезапного всплеска, но и существовать в течение относительно большого времени, увеличивая тем самым вероятность столкновения с судами и морскими сооружениями.

В приближении слабой нелинейности механизмы трансформации поверхностных волн изучены достаточно хорошо. Качественно нелинейность приводит к тому, что между элементарными гармониками имеется взаимодействие, гармоники обмениваются энергией, в результате чего эффект при их совпадении может быть сильнее или слабее. Наиболее известным слабо-нелинейным эффектом является модуляционная неустойчивость поверхностных волн [3]. Две близкие по частоте волны могут порождать волну с периодически изменяющейся амплитудой [25]. Этот эффект зависит также и от амплитуд волн.

Физические модели, *описывающие эффекты сильной нелинейности*, практически отсутствуют и основными инструментами их исследования являются эксперименты (лабораторный и морской) и численное моделирование.

Сильно-нелинейные поверхностные волны вызывают большой интерес, как пример хорошо наблюдаемого, но все еще не совсем изученного явления. В частности, высота волны зависит сильно от скорости ветра и его продолжительности. Скорость, направление и продолжительность действия ветра не оп-

ределяют полностью максимальную волну. Она не может расти бесконечно, в некоторый момент включаются сильно-нелинейные механизмы. Волна опрокидывается и разрушается, таким образом включаются сильно-нелинейные механизмы рассеивания энергии, например, пено- и каплеобразование.

11.4. Эффекты ветра и течения

Волны и ветер. Ветер действует на океанскую поверхность несколькими способами. Во-первых, посредством поверхностного трения. А именно, гравитационные волны — результат взаимодействия тонкого поверхностного слоя воды и ветра [1, 26–29]. Вследствие этого механизма возникает рябь и волны умеренной амплитуды. По мере роста волн их влияние на воздушный поток усиливается. Действие ветра начинает зависеть от наклона элемента поверхности волны к невозмущенной поверхности воды. Когда амплитуда волны увеличивается еще больше, начинает работать новый механизм. А именно, ветер начинает действовать на тыльную сторону волны так же, как на парус: путем прямого давления.

Даже приведенная очень грубая схема показывает, что по мере роста волн происходит сложная эволюция сил, определяющих динамику волны, поэтому, по-видимому, как во многих инженерных проблемах, полное аналитическое описание этих сил невозможно. Однако это не исключает возможности качественного описания воздействия ветра на волны.

Первый механизм зарождения ветровых волн был предложен Кельвином [30]. Механизм основан на предположении, что воздушный поток не меняется по высоте. Это очевидный недостаток этой модели. Другой подход был предложен Жефреем [30–32].

Жефрей предполагал, что при движении воздушного потока над взволнованной водной поверхностью происходит отделение пограничного слоя на фронтальной поверхности волны, так же как это имеет место для твердой волнистой поверхности. Отделение может сопровождаться вихреобразованием в воздушном потоке и опрокидыванием гребня волны. В зоне вихреобразования возникает область низкого давления.

На рис. 121 кривые линии определяют воздушный поток; короткие стрелки показывают движение воды. Задняя поверхность волны испытывает более высокое давление, чем передняя поверхность, которая защищена от действия

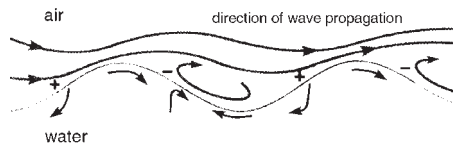


Рис.121. Качественная иллюстрация к модели волна-ветер взаимодействия, предложенная Жефреем [33].

ветра. Воздушные вихри существуют перед каждой волной, приводя к различию в давлении воздуха на фронтальную и тыльную части волны, что показано знаками плюс и минус, соответственно. Перепад давлений гонит волну вперед.

Предполагая монохроматическую волну вида $\eta = A \sin(\omega t - ka)$, Жефрей принял следующее выражение для действия ветра:

$$p_0 = S\bar{\rho}(U - C)^2 \eta_a, \quad (11.1)$$

где S — свободный параметр теории, U — скорость ветра, $\bar{\rho}$ — плотность воздуха.

Таким образом, когда волны появляются на поверхности воды, их присутствие меняет течение воздуха. Если возмущения, вносимые волнами в поток воздуха, рассматривать как малые и синусоидальные, то исследование можно свести к линейному анализу устойчивости взаимодействия волна-ветер. Следуя этой идее, Майлс [34] нашел приближенное выражение для действия давления ветра на волны.

Аналитические подходы основаны на существенных упрощениях задачи, что в какой-то мере приемлемо для линейных гармонических волн. Однако неясна область применимости этих подходов как в плане амплитуды волны, направления и силы ветра, так и воздействия ветра на различные участки профиля волны, поэтому развиваются также и принципиально другие, не аналитические, подходы к расчету ветровых волн. С некоторыми из них можно ознакомиться в [1, 27, 28, 33].

Наконец, широко распространен чисто эмпирический подход, согласно которому расчет ветровых волн проводится на основе формул, явно содержащих параметры ветра, глубину и характеристики моря. В простейшем случае предполагается, что трение ветра, действующее на волну в продольном направлении, пропорционально квадрату скорости ветра, U . Таким образом,

$$\tau = \theta U^2, \quad (11.2)$$

где величина θ зависит от атмосферных условий. Чем более бурные процессы происходят в потоке воздуха над морской поверхностью, тем выше эта величина. В частности, она растет при увеличении скорости ветра и величины волн. В качестве U берется часто некоторая осредненная величина скорости ветра, так как она зависит от близости к поверхности воды, которая меняется в силу волнения этой поверхности.

По-видимому, все рассмотренные подходы можно только с большой долей условности использовать для моделирования катастрофических волн, вызванных ветром. Например, тех штормовых волн, которые были зафиксированы британским океанографическим судном вблизи Шотландии (рис. 120).

В такой ситуации становится привлекательным подход, предложенный почти 30 лет назад Акиласом [35, 36].

При исследовании нелинейных волн он предложил аппроксимировать резонансное действие ветра синусоидальной нагрузкой, бегущей по поверхности воды. Действительно, если скорость ветра и волн совпадает, то влияние трения пропадает, и действие ветра определяется в основном давлением. При высоких нелинейных волнах их профиль начинает определять давление воздушного потока, и профиль давления становится аналогичным профилю поверхностных волн. Если профиль последних аппроксимировать гармонической функцией с известной амплитудой, то мы приходим к модели Акиласа. Под резонансом он подразумевает случай, когда скорости ветра или импульса давления, движущегося по воде [37], близки скорости волн. Именно при этом мы можем ожидать появления катастрофических волн.

Модель, описывающая действие атмосферы с помощью импульса давления или гармонической функции заданной амплитуды, может быть полезной при анализе волн, движущихся с той же скоростью, что и область пониженного давления (т.е. область циклона). Некоторые авторы связывают с этим совпадением возникновение катастрофических волн [38].

Волны и течения. Области морских течений рассматриваются как области наиболее вероятного появления экстремальных волн [1, 3]. Неоднородности течения (равно как и неоднородности рельефа дна) могут служить своеобразными линзами, фокусирующими волновую энергию в определенных областях.

Любой, кто регулярно пересекает на маленькой яхте прибрежные воды океана, хорошо знает, что в определенных условиях прилив может сопровождаться возникновением небезопасных волн. Такие волны обычно распространяются против течения прилива.

Согласно [39] скорость, с которой волны распространяются относительно потока $\bar{U}$, дается выражением

$$C = 0.5C_0 [1 \pm (1 + 4\bar{U}C_0^{-1})^{0.5}], \quad (11.3)$$

где C_0 — скорость волны в неподвижной воде. Согласно (11.3), волны не могут распространяться против потока, скорость которого превышает $C_0 / 4$. Мы принимаем, что $C_0 \gg \bar{U}$. В этом случае

$$C \approx C_0 + \bar{U}. \quad (11.4)$$

Ясно, что поток, текущий в направлении распространения волн, дает эффект увеличения их скорости. Так как период волны T должен остаться постоянным, то

$$T = L_0 / C_0 = L / (C + \bar{U}), \quad (11.5)$$

где L_0 — длина волны, когда поток отсутствует; L — длина волны в потоке; C — скорость волны в потоке. Поскольку $C + \bar{U}$ больше, чем C_0 , то, чтобы T оставалось постоянным, L должна быть больше, чем L_0 . Т.е. волны становятся более длинными. Часть энергии волны поглощается потоком. Поэтому, несколько уменьшившаяся энергия распределяется на увеличившуюся длину волны. В результате высота волны уменьшается.

Наоборот, если течение направлено против распространения волны, то L будет уменьшаться, а волна становится короче и выше. Высота волны будет также увеличена в результате энергии, полученной от потока. В теории может быть достигнута точка, где скорость волны уменьшается до нуля, так что амплитуда волны достигнет бесконечности. Однако практически волны, движущиеся против потока, редко достигают катастрофических амплитуд, они становятся неустойчивыми и опрокидываются из-за малейших возмущений. Вместе с тем имеется много свидетельств того, что появление катастрофических волн вблизи океанических течений более вероятно, чем вдали от них.

11.5. Алгоритм моделирования катастрофических океанских волн и их взаимодействия с корпусом судна

Существование катастрофических волн делает важным переосмысливание некоторых фундаментальных идей проектирования судна. Этим сейчас заняты многие судостроительные фирмы разных стран [18–23]. Возросшая опасность для судов связана не только с чрезвычайной высотой экстремальных волн. Вместе с чрезвычайной высотой эти волны могут иметь очень крутой фронт, так называемая «стена воды». Крутой фронт и процесс опрокидывания, возможно, самые важные параметры, определяющие результат действия волны — более важные, чем высота катастрофической волны. Грубо говоря, результат столкновения гигантской волны и судна зависит от размеров и массы судна, высоты волны, крутизны ее фронта и эффекта опрокидывания волны. Местное повреждение судна зависит, конечно, от прочности нагруженного элемента судна и взаимодействия его с водным воздействием. Столкновение крутого фронта волны и судна может напомнить столкновение двух твердых тел. В результате судно может получить пробоину, разрушиться и затонуть.

Таким образом, проблема очень сложна. Это связано с чрезвычайной трудностью описания экстремальных океанских волн, с трудностью учета влияния взаимодействия волны и судна на возникающую динамическую нагрузку и с оценкой динамической прочности судна. Чтобы упростить качественное рассмотрение проблемы, мы разделили ее на три подпроблемы.

Первая подпроблема связана с математическим описанием катастрофических волн. Как первый шаг в этом направлении мы изложим в главах 13–16 теорию расчета катастрофических волн.

Далее рассматривается наиболее опасная ситуация, когда судно встречает волну в момент ее опрокидывания или в момент формирования очень крутого фронта волны. Время воздействия волны в этих случаях может быть очень малым. При этом судно можно считать неподвижным и рассматривать его корпус как жесткую стену. Таким образом, вторая подпроблема — исследование взаимодействия экстремальной волны с твердой стеной. Исследованию этой проблемы посвящены обстоятельные работы [40–43]. Они показали, что давление может быть смягчено захваченным волной атмосферным воздухом. Этот эффект может быть очень важным. Действительно, из-за захваченного воздуха судно нагружается воздушно-водной смесью вместо чистой воды. В частности, из экспериментов следует, что давления волны являются самыми большими, когда слой захваченного воздуха является тонким, но не нулевым.

Третья подпроблема связана с учетом деформируемости судна. В частности, из-за нестационарной деформации кавитация может возникнуть на поверхности корпуса судна. Кавитация ограничивает падение импульсного давления жидкости, возникающего при ударе экстремальной волны по корпусу судна, поэтому учет кавитации может увеличить среднее давление на поверхность корпуса судна. Учет этого обстоятельства может быть важным для правильного проектирования прочности судна, рассчитанного с учетом указанного экстремального обстоятельства [18–20]. Подчеркнем, что из-за захваченного волной воздуха или/и кавитации возникает большая дополнительная неопределенность в расчете реальных нагрузок от поверхностных волн на корпус и элементы судов. Чтобы рассмотреть эту неопределенность, мы развили некоторые математические модели кавитационного взаимодействия корпуса с волной. Указанные проблемы рассматриваются в главе 17. В частности, мы изучили взаимодействие волны в воде с круглой пластиной и проанализировали эффект кавитации на давление на пластину и ее смещение. Результаты вычислений сравниваются с экспериментальными данными.

12. Аналитическое описание ветер-волна взаимодействия

Ветер, ветер —
На всем божьем свете!

А. Блок

Как не бросить все на свете,
Не отчаяться во всем,
Если в гости ходит ветер,
Только дикий черный ветер,
Сотрясающий мой дом!

А. Блок

Ветровые волны образуются за счет энергии ветра, передаваемой волнам путем непосредственного давления воздушного потока на наветренные склоны гребней волны и трения потока о поверхность волны. Согласно Голицыну [44], только 5% энергии ветра, дующего над океаном, уходит на рост волн. Однако, этих процентов достаточно, чтобы волны во время штормов или под действием муссонов достигали значительной высоты. Рост волн прекращается не за счет вязких свойств воды, а ввиду включения новых механизмов диссипации энергии волны. Это обрушение волн, турбулизация потока и движения частиц жидкости, пено- и каплеобразование на поверхности воды.

Из-за различных сложных факторов взаимодействия взволнованной поверхности океана с ветром (некоторые из этих факторов отмечены выше) изучение волнения сводится обычно к выявлению статистических закономерностей, которые выражают зависимость характеристик волн от ветра и локальных параметров океана и атмосферы.

Здесь подчеркнем опять, что основная цель этой части книги — в максимально простой и ясной форме дать описание и объяснение феномена возникновения катастрофических океанических волн, т.е. аналитически объяснить их появление, поэтому статистическое описание, которое в определенной степени осредняет результаты различных причин, мы не используем. Вместе с тем, мы в полной мере будем использовать одномерную теорию волн, развитую во второй части. Таким образом, мы существенно облегчаем нашу задачу, исключая из рассмотрения множество различных факторов, определяемых двумерными и трехмерными процессами, которые, как мы полагаем, затрудняют анализ, но не меняют основные причины появления катастрофических волн. Эти причины вполне выявляются на уровне одномерного приближения.

12.1. Моделирование действия ветра на волны

Здесь мы ограничимся самыми приближенными соображениями и соотношениями для случая, когда порыв ветра охватывает группу волн зыби. Так как потери энергии в волнах зыби малы, то в случае резонанса происходит быстрый рост амплитуды волн, даже с учетом того, что только очень малая часть ветровой энергии переходит в волны.

Как уже отмечалось, действие ветра сводится к давлению потока и трению. Если воздух движется в том же направлении, в каком распространяется волна, но с большей скоростью, то на задних склонах волн будет наблюдаться избыток давления, а на гребнях волн будут преобладать силы трения.

Длинные волны в мелком море. Сначала рассмотрим трение для случая длинных волн. Примем, что его эффект зависит от величин u_t и u_{aa} . Нетрудно также представить, что трение зависит также от соотношения скоростей волны и ветра. Если эти скорости равны, то трение исчезает. Если ветер меняет направление и начинает дуть против направления распространения волн, то знак трения должен поменяться. Сказанное позволяет представить силу трения ветра в следующем виде:

$$p_{31}(a, t, c = 0) = \bar{\rho}(U - C)(U - C)(\alpha_1 u_t + \alpha_2 u_{aa}). \quad (12.1)$$

Здесь $\bar{\rho}$ — плотность воздуха, U — скорость ветра, α_1 и α_2 — коэффициенты трения. Коэффициент $(U - C)(U - C)$ введен, следуя модели Жефрея [26, параграф 348], [31, 32]. Жефрей определял этот коэффициент как $(U - C)^2$ (см. (11.1)).

Рассмотрим (12.1). Для однонаправленных длинных волн $u(\omega t - Ka)$ величина u_t пропорциональна η : $\eta \approx hK\omega^{-1}u_t$, поэтому (12.1) дает

$$p_{31}(a, t, c = 0) = \bar{\rho}(U - C)(U - C)hK\omega^{-1}(\alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta_{aa}), \quad (12.2)$$

т.е. принятая аппроксимация зависит от формы профиля волны (η) и ее кривизны (η_{aa}).

Предположим, что поверхностная волна является монохроматической:

$$\eta = A \cos(\omega t - Ka). \quad (12.3)$$

Для этого случая давление потока на волну можно записать в соответствии с моделью Майлса [34]. Пусть давление потока на элемент профиля волны пропорционально возвышению элемента над невозмущенной поверхностью воды:

$$p_0 = (\alpha + i\beta)\bar{\rho}U_1^2 K\eta. \quad (12.4)$$

Здесь U_1 — некоторая осредненная скорость потока, $(\alpha + i\beta)$ — безразмерный коэффициент. Так как в (12.4) входит волновое число K , то можно считать так-

же, что давление на элемент профиля волны зависит от наклона этого элемента к невозмущенной поверхности воды. В дальнейшем мы не будем учитывать мнимую составляющую в (12.4). В этом случае (12.4) примет вид:

$$p_0 = \alpha \bar{\rho} U_1^2 K \eta. \quad (12.5)$$

Таким образом, мы рассмотрели силу трения и давление, действующие на длинную волну со стороны воздушного потока. Влияние этих составляющих на волну меняется в зависимости от этапа ее эволюции. В какой-то мере об этом влиянии можно будет судить, когда мы будем иметь аналитические решения для волн, куда войдут коэффициенты выражений (12.2) и (12.5).

Если скорость воздушного потока равна скорости поверхностных волн, то они могут возбуждаться гармоническим давлением:

$$p_0 = \text{const} + \bar{V} \alpha \bar{\rho} U_1^2 K \cos(\omega t - Ka). \quad (12.6)$$

Здесь $\bar{V}$ — известная амплитуда гармонического давления. Нелинейные волны, возбуждаемые бегущей по поверхности воды синусоидальной нагрузкой, начал исследовать почти 30 лет назад Акилас [35,36].

Аналогичный подход использовался и при исследовании цунами [38], вызванных атмосферными процессами, и экстремальных волн [2, 3]. В последнем случае исследование сводится к решению уравнения типа КдВ с вынуждающим членом.

Волны на поверхности глубокого океана. Полагаем, что действие ветра и в этом случае определяется силами трения и давления. Сперва рассмотрим силу трения. Выражение для этой силы запишем в более общем виде, чем (12.1). Примем, что перемещение частиц поверхности воды в вертикальном направлении η становится не менее важно для волна-ветер взаимодействия, чем перемещение в горизонтальном направлении. В этом случае вид формулы (12.1) примет вид:

$$p_{31}(a, t, c = 0) = \bar{\rho}(U - C)(U - C)(\alpha_1 u_t + \alpha_{11} \eta_t + \alpha_2 u_{taa} + \alpha_{22} \eta_{taa}). \quad (12.7)$$

Здесь α_1 , α_{11} , α_2 и α_{22} — коэффициенты трения. Формулы (12.5), (12.6), определяющие давление, не меняются, но чтобы не путать случаи длинных и коротких волн, мы выпишем их еще раз отдельно:

$$p_0 = \alpha \bar{\rho} U_1^2 K \eta, \quad (12.8)$$

$$p_0 = \text{const} + \bar{V} \alpha \bar{\rho} U_1^2 K \cos(\omega t - Ka). \quad (12.9)$$

В (12.7), (12.8) и (12.9) коэффициенты α_1 , α_2 и α численно отличаются от соответствующих коэффициентов в формулах для длинных волн (12.2), (12.5) и (12.6).

Согласно представленным выражениям, действие ветра не прекращается, даже если скорости ветра и волн равны, так как остается действие давления. Подчеркнем, мы не знаем значений коэффициентов, входящих в эти выражения. Мы также не знаем, как меняется влияние указанных сил на эволюцию волны в процессе ее распространения. У нас нет никаких экспериментальных данных, подтверждающих приемлемость записанных выше формул. Вместе с тем у них есть немаловажные достоинства. Во-первых, они основаны на общепринятых, классических законах трения. Во-вторых, они практически не будут затруднять исследование причин возникновения и эволюции экстремальных волн, оставляя надежду на правильный учет влияния ветра и течения на эти причины.

Наше последующее исследование является чисто аналитическим. Нас интересует, как указанные силы влияют на резонансные решения соответствующих уравнений. Эти уравнения будут рассмотрены в следующем разделе.

12.2. Соотношения и уравнения для ветровых волн на мелкой и глубокой воде

Выражения, записанные в разделе 12.1, позволяют записать волновые уравнения, полученные в главах 4 и 5, в виде, учитывающем воздействие ветра на волну.

Мелкая вода. Запишем уравнение для длинных океанских волн (7.24) с учетом действия ветра. Для этого мы сначала включим в (7.24) член, учитывающий давление $p_{0,a}$, и член, учитывающий трение на поверхности воды $\rho^{-1}h^{-1}p_{31,a}(a,t,c=0)$. Эти члены найдены согласно уравнению (6.122). Затем, используя (12.1), определяем трение. В результате уравнение (7.24) приобретает вид:

$$\begin{aligned} & (1+u_a)u_{tt} - g(2h_a u_a + h_{aa}u) - gh u_{aa} + gh(2-3u_a)u_a u_{aa} - \\ & - \left(\frac{1}{3}h^2 - \sigma\rho^{-1}g^{-1} \right) u_{taa} + \rho^{-1}p_{0,a} + \rho^{-1}h^{-1}\bar{\rho}(U-C)(U-C)(\alpha_1 u_t + \alpha_2 u_{taa}) = \\ & = 2\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}(2hu_{taa} + 2h_a u_{at} + h_{aa}u_t) + \rho^{-1}h^{-1}\bar{s}u_t. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Для описания эффекта давления мы можем использовать одно из двух выражений (12.5) или (12.6). Если используется первое выражение, то (12.10) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} & (1+u_a)u_{tt} - g(2h_a u_a + h_{aa}u) - (gh + \alpha\rho^{-1}\bar{\rho}U_1^2 Kh)u_{aa} - 4\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}h_a u_{at} + \\ & + gh(2-3u_a)u_a u_{aa} - \left(\frac{1}{3}h^2 - \sigma\rho^{-1}g^{-1} \right) u_{taa} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho}(U-C) \backslash (U-C) \backslash \alpha_2 - 4\bar{\mu} \rho^{-1}] u_{taa} + \\
& + [\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho}(U-C) \backslash (U-C) \backslash \alpha_1 - 2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} h_{aa} - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}] u_t = 0. \quad (12.11)
\end{aligned}$$

Если используется (12.6), то (12.10) дает

$$\begin{aligned}
& (1+u_a) u_{tt} - g(2h_a u_a + h_{aa} u) - gh u_{aa} - 4\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} h_a u_{at} + \\
& + gh(2-3u_a) u_a u_{aa} - \left(\frac{1}{3} h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) u_{taa} + \\
& + [\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho}(U-C) \backslash (U-C) \backslash \alpha_2 - 4\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} h] u_{taa} + \\
& + [\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho}(U-C) \backslash (U-C) \backslash \alpha_1 - 2\bar{\mu} \rho^{-1} h^{-1} h_{aa} - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}] u_t = \\
& = -A^* \sin(\omega t - Ka), \quad (12.12)
\end{aligned}$$

где

$$A^* = \bar{V} \alpha \bar{\rho} \rho^{-1} U_1^2 K^2. \quad (12.13)$$

Глубокая вода. В этом случае влияние дна отсутствует. Учитывая ветровое трение (12.7), уравнение (6.71) записываем так:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{tt} - gh \Phi_{aa} - hK^{-1} \Phi_{taa} = \frac{1}{2} hK^2 (\Phi_{tt} \Phi)_a - \\
& - \frac{1}{3} hK^3 \left[\Phi \int (\Phi_a^2)_t da + 2\Phi_{tt} \int \Phi_a^2 da \right]_a + \\
& + \rho^{-1} \bar{\rho}(U-C) \backslash (U-C) \backslash (\alpha_1 u_t + \alpha_{11} \eta_t + \alpha_2 u_{taa} + \alpha_{22} \eta_{taa}) + \rho^{-1} h p_{0,a}. \quad (12.14)
\end{aligned}$$

Выразим u через Φ . Используя (6.22) и (6.51) и оставляя в (6.50) только линейные члены, получим следующее приближенное соотношение:

$$u = -K\Phi. \quad (12.15)$$

Учитывая (12.15) и используя (6.22), переписываем (12.14) в виде:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{tt} - gh \Phi_{aa} - hK^{-1} \Phi_{taa} = \frac{1}{2} hK^2 (\Phi_{tt} \Phi)_a - \\
& - \frac{1}{3} hK^3 \left[\Phi \int (\Phi_a^2)_t da + 2\Phi_{tt} \int \Phi_a^2 da \right]_a + \\
& + \rho^{-1} \bar{\rho}(U-C) \backslash (U-C) \backslash (-\alpha_1 K \Phi_t + \alpha_{11} \Phi_{ta} - \alpha_2 K \Phi_{taa} + \alpha_{22} \Phi_{taaa}) + \\
& + \rho^{-1} h p_{0,a}. \quad (12.16)
\end{aligned}$$

Теперь мы примем во внимание давление p_0 . Если оно определяется выражением (12.8), то (12.16) приводится к виду:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{tt} - gh \Phi_{aa} - hK^{-1} \Phi_{taa} = \frac{1}{2} hK^2 (\Phi_{tt} \Phi)_a - \\
& - \frac{1}{3} hK^3 \left[\Phi \int (\Phi_a^2)_t da + 2\Phi_{tt} \int \Phi_a^2 da \right]_a +
\end{aligned}$$

$$+ \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \left((U - C) \left(-\alpha_1 K \Phi_t + \alpha_{11} \Phi_{ta} - \alpha_2 K \Phi_{taa} + \alpha_{22} \Phi_{taaa} \right) + \right. \\ \left. + \rho^{-1} h \alpha \bar{\rho} U_1^2 K \Phi_{aa} \right). \quad (12.17)$$

Если давление определяется выражением (12.9), то (12.16) дает

$$\Phi_{tt} - g h \Phi_{aa} - h K^{-1} \Phi_{taa} = \frac{1}{2} h K^2 (\Phi_{tt} \Phi)_{aa} - \\ - \frac{1}{3} h K^3 \left[\Phi \int (\Phi_a^2)_{tt} da + 2 \Phi_{tt} \int \Phi_a^2 da \right]_{aa} + \\ + \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \left((U - C) \left(-\alpha_1 K \Phi_t + \alpha_{11} \Phi_{ta} - \alpha_2 K \Phi_{taa} + \alpha_{22} \Phi_{taaa} \right) + \right. \\ \left. + \rho^{-1} h \bar{V} \alpha \bar{\rho} U_1^2 K^2 \sin(\omega t - Ka) \right). \quad (12.18)$$

Таким образом, принятие той или иной модели ветер-волна взаимодействия существенно меняет волновое уравнение. Для дальнейшего наиболее существенно то, что можно выделить два класса модельных волновых уравнений. Первый класс содержит синусоидальный вынуждающий член. Второй класс не содержит этого члена. Формально уравнения этого класса полностью соответствуют уравнениям для свободных нелинейных поверхностных волн.

Подчеркнем, что катастрофические волны возникают даже при слабом ветре или его отсутствии, т.е. в случаях, когда нет никаких дополнительных членов и коэффициентов, связанных с действием ветра в уравнениях, приведенных в этом разделе. Это одна из причин загадочности возникновения катастрофических волн, которые нам предстоит исследовать.

12.3. Волновые уравнения для однонаправленных волн

Приведенные выше волновые уравнения описывают волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. В случае океанских волн нас интересуют в первую очередь однонаправленные волны. Перепишем уравнения для последнего случая, учитывая наличие слабоизменяющегося по координате поверхностного течения.

12.3.1. Длинные волны

Пусть

$$r = t - \int C^{-1}(a) da. \quad (12.19)$$

Здесь скорость волны записываем с учетом океанического течения. Предполагается, что в масштабах порядка длины волны скорость течения $\bar{U}$ практически не меняется. Т.е. приближенно $\bar{U}_a \approx 0$. Кроме этого полагаем, что $C_0 \approx \bar{U}$.

Тогда скорость волны можно аппроксимировать следующим приближенным выражением:

$$C(a) = C_0 + C_d + \bar{U}, \quad (12.20)$$

где $C_0 = \sqrt{gh}$.

1. Примем, что давление ветра определяется выражением (12.5). В этом случае, следуя разделу 7.3 и используя (12.19) и (12.20), уравнение (12.11) запишем так:

$$\begin{aligned} & (1 - ghC^{-2} - \alpha\rho^{-1}\bar{\rho}U_1^2KhC^{-2} + 4\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}C^{-1}h_a)u_r - \\ & - \frac{1}{2}(2ghC^{-3} + C^{-1})u_r^2 - 2ghC^{-4}u_r^3 - \left(\frac{1}{3}h^2 - \sigma\rho^{-1}g^{-1}\right)C^{-2}u_{rrr} + \\ & + C^{-2}[\rho^{-1}h^{-1}\bar{\rho}(U - C)\|(U - C)\|_{\alpha_2} - 4\bar{\mu}\rho^{-1}]u_{rr} + \\ & + [\rho^{-1}h^{-1}\bar{\rho}(U - C)\|(U - C)\|_{\alpha_1} - 2\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}h_{aa} + 2gC^{-1}h_a - \rho^{-1}h^{-1}\bar{s}]u - \\ & - gh_{aa}\int u dr = \bar{C}. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Здесь, как и ранее, $\bar{C}$ — постоянная интегрирования. Пусть $h_{aa} \approx 0$ и

$$\begin{aligned} G &= u_r, \quad B = ghC^{-2} - 1 + \alpha\rho^{-1}\bar{\rho}U_1^2KhC^{-2} - 4\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}C^{-1}h_a, \\ \alpha_* &= ghC^{-3} + \frac{1}{2}C^{-1}, \quad \beta_* = 2ghC^{-4}, \\ \chi &= -C^{-2}[\rho^{-1}h^{-1}\bar{\rho}(U - C)\|(U - C)\|_{\alpha_2} - 4\bar{\mu}\rho^{-1}], \\ k &= -\left(\frac{1}{3}h^2 - \sigma\rho^{-1}g^{-1}\right)\alpha_*^{-1}C^{-2}, \\ b_1 &= -\rho^{-1}h^{-1}\bar{\rho}(U - C)\|(U - C)\|_{\alpha_1} + \\ & + 2\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}h_{aa} - 2gC^{-1}h_a + \rho^{-1}h^{-1}\bar{s}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

При введенных обозначениях уравнение (12.21) принимает вид:

$$BG + \alpha_*G^2 + \beta_*G^3 - k\alpha_*G_{rr} + \chi G_r + b_1\int G dr = \bar{C}. \quad (12.23)$$

Мы получили уравнение, совпадающее по внешнему виду с (8.107), если там $F = \bar{F} = 0$. Подчеркнем, что, несмотря на определенное подобие, коэффициенты (12.22) отличаются от (8.108).

2. Теперь примем, что давление ветра описывается гармонической составляющей (12.6). В этом случае (12.12) дает

$$\begin{aligned} & (1 - ghC^{-2} + 4\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}C^{-1}h_a)u_r - \\ & - \frac{1}{2}(2ghC^{-3} + C^{-1})u_r^2 - 2ghC^{-4}u_r^3 - \left(\frac{1}{3}h^2 - \sigma\rho^{-1}g^{-1}\right)C^{-2}u_{rrr} + \\ & + C^{-2}[\rho^{-1}h^{-1}\bar{\rho}(U - C)\|(U - C)\|_{\alpha_2} - 4\bar{\mu}\rho^{-1}]u_{rr} + \end{aligned}$$

$$+[\rho^{-1}h^{-1}\bar{\rho}(U-C)(U-C)\alpha_1 - 2\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}h_{aa} + 2gC^{-1}h_a - \rho^{-1}h^{-1}\bar{s}]u - gh_{aa} \int u dr = A^* \omega^{-1} \cos \omega r + \bar{C}. \quad (12.24)$$

Пусть $h_{aa} \approx 0$ и

$$B = ghC^{-2} - 1 - 4\bar{\mu}\rho^{-1}h^{-1}C^{-1}h_a. \quad (12.25)$$

Используя далее обозначения (12.22), где B равняется (12.25), мы перепишем (12.24) в виде:

$$BG + \alpha_* G^2 + \beta_* G^3 - k\alpha_* G_{rr} + \chi G_r + b_1 \int G dr = -A^* \omega^{-1} \cos \omega r + \bar{C}. \quad (12.26)$$

Пусть $\varepsilon = -2A^* \omega^{-1}$, тогда

$$BG + \alpha_* G^2 + \beta_* G^3 - k\alpha_* G_{rr} + \chi G_r + b_1 \int G dr = \frac{1}{2} \varepsilon \cos \omega r + \bar{C}. \quad (12.27)$$

Подчеркнем, что обозначения коэффициентов при неизвестных в (12.27) совпадают с обозначениями (8.108) и (12.22), однако, их значения в (12.22) могут отличаться от (8.108) и (12.25). В частности, в уравнениях (12.23) и (12.27) различны коэффициенты B . Мы используем здесь одни и те же обозначения в разных уравнениях с тем, чтобы показать их подобие уравнению (8.107). Таким образом мы открываем возможность использования методов и результатов раздела 8.6 при решении уравнений (12.23) и (12.27).

Важно отметить, что введенная модель воздействия ветра на волны изменила все коэффициенты в (12.23) и (12.27). Из-за этого ветер начинает влиять как на дисперсионные свойства волн, так и на их формоизменение вплоть до, как будет показано, образования катастрофических и опрокидывающихся волн. Влияние течения учитывается в силу (12.19) и (12.20).

12.3.2. Короткие волны и глубокая вода

Перепишем уравнения (12.17) и (12.18) с учетом течения для однонаправленной волны. Пусть

$$\Phi = \Phi(r), \quad r = \omega t - Ka. \quad (12.28)$$

Здесь, как и ранее, K — волновое число, которое определяется частотой и скоростью волны согласно выражению $K = \omega C^{-1}$. Так как мы учитываем течение воды, то оно даст

$$K = \omega(C_0 + \bar{U})^{-1}. \quad (12.29)$$

Здесь C_0 — скорость волны в неподвижной среде. Скорость C определяется дисперсионным соотношением (6.61):

$$C = \sqrt{gK^{-1}}. \quad (12.30)$$

1. Рассмотрим случай, когда давление ветра не содержит гармонической составляющей. Тогда уравнение (12.17) и выражения (12.28) и (12.29) дают

$$\begin{aligned} & \left[\omega^2 K^{-2} - gh - \rho^{-1} h \alpha \bar{\rho} U_1^2 K + \omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_{11} \right] \Phi_a + \\ & + \left[\omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_{22} - h K^{-3} \omega^2 \right] \Phi_{aaaa} - \omega \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_1 \Phi_a - \\ & - \omega \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_2 \Phi_{aaa} = \\ & = \frac{1}{2} h \omega^2 (\Phi_{aa} \Phi)_a - \frac{1}{3} h K \omega^2 \left[\Phi \int (\Phi_a^2)_{aa} da + 2 \Phi_{aa} \int \Phi_a^2 da \right]_a. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Перепишем (12.31) в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{11} \Phi_{aa} + \bar{\alpha}_{22} \Phi_{aaaa} + \bar{\alpha}_1 \Phi_a + \bar{\alpha}_2 \Phi_{aaa} &= \frac{1}{2} h \omega^2 (\Phi_{aa} \Phi)_a - \\ - \frac{1}{3} h K \omega^2 \left(\Phi \Phi_a \Phi_{aa} + 2 \Phi_{aa} \int \Phi_a^2 da \right)_a. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{11} &= \omega^2 K^{-2} - gh - \rho^{-1} h \alpha \bar{\rho} U_1^2 K + \omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_{11}, \\ \bar{\alpha}_{22} &= \omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_{22} - h K^{-3} \omega^2, \\ \bar{\alpha}_1 &= -\omega \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_1, \\ \bar{\alpha}_2 &= -\omega \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_2. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Линейные члены $\bar{\alpha}_1 \Phi_a$ и $\bar{\alpha}_2 \Phi_{aaa}$ в (12.32) учитывают влияние ветра. Это влияние отражено также в коэффициентах $\bar{\alpha}_{11}$ и $\bar{\alpha}_{22}$. Влияние течения учитывается согласно (12.28)–(12.30).

2. Рассмотрим теперь случай, когда давление ветра моделируется синусоидой. В этом случае уравнение (12.18) дает

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{11} \Phi_{aa} + \bar{\alpha}_{22} \Phi_{aaaa} + \bar{\alpha}_1 \Phi_a + \bar{\alpha}_2 \Phi_{aaa} &= \frac{1}{2} h \omega^2 (\Phi_{aa} \Phi)_a - \\ - \frac{1}{3} h K \omega^2 \left(\Phi \Phi_a \Phi_{aa} + 2 \Phi_{aa} \int \Phi_a^2 da \right)_a &+ \rho^{-1} h \bar{V} \alpha \bar{\rho} U_1^2 K^2 \sin(\omega t - Ka). \end{aligned} \quad (12.34)$$

Здесь

$$\bar{\alpha}_{11} = \omega^2 K^{-2} - gh + \omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_{11}, \quad (12.35)$$

остальные обозначения соответствуют (12.33).

Заключение. Влияние ветра привело к появлению в уравнениях, полученных во второй части этой книги, новых линейных членов, учитывающих поверхностное трение, и к изменению коэффициентов перед неизвестными. Через эти коэффициенты ветер влияет на дисперсионные свойства волн и на образование катастрофических волн.

12.4. Предварительный анализ возможности возбуждения катастрофических волн

Модифицированные выше уравнения будут использоваться при описании катастрофических ветровых волн на мелкой и глубокой воде. Вместе с тем остаются справедливыми и неизменными уравнения второй части книги, так как они описывают катастрофические усиления волн зыби. Таким образом, мы имеем исходные уравнения для моделирования различных катастрофических волн. Однако перед непосредственным решением этих уравнений в последующих главах мы рассмотрим некоторые результаты, имеющие характер введения в решение нелинейных уравнений для катастрофических волн.

12.4.1. Линейный анализ самовозбуждения ветровых волн

Очевидно, что влияние ветра на развитие волн зависит от разности $U - C$. Рассмотрим это влияние на примере линейных волн.

1. **Длинные волны.** Пусть $\varepsilon = \bar{C} = 0$, $b_1 = 0$ в (12.27), тогда после линеаризации оно дает

$$G_{rr} - \chi(k\alpha_*)^{-1} G_r - B(k\alpha_*)^{-1} G = 0. \quad (12.36)$$

Введем обозначения:

$$2\lambda = -\chi(k\alpha_*)^{-1} \text{ и } \omega_0^2 = -B(k\alpha_*)^{-1}. \quad (12.37)$$

Если не учитывать поверхностное натяжение и кинематическую вязкость жидкости, то эти обозначения соответствуют следующему:

$$2\lambda = -3\rho^{-1} h^{-3} \bar{\rho} \alpha_2 (U - C) \|(U - C)\|, \quad \omega_0^2 = -3(C^2 - gh)h^{-2}. \quad (12.38)$$

Из (12.38) находим, что если скорость ветра равна скорости волны, то $\lambda = 0$. Теперь рассмотрим ω_0^2 . Сначала напомним, что $\sqrt{gh}$ — максимальная скорость поверхностных волн, а C — сумма скоростей слабо-дисперсионных волн и течения $\bar{U}$ (12.20). Пусть $\bar{U}$ мало и отрицательно, тогда в силу (12.38) ω_0^2 — малая величина, причем $\omega_0^2 > 0$. Используя обозначения (12.37), запишем уравнение (12.36) так:

$$G_{rr} + 2\lambda G_r + \omega_0^2 G = 0. \quad (12.39)$$

Здесь величина λ (12.38) зависит от коэффициента трения α_2 и разности скоростей ветра и волны. Видно, что λ может менять знак даже, если α_2 — постоянная величина.

2. **Короткие волны.** Линеаризованное уравнение для волн на глубокой воде (12.32) дает

$$\bar{\alpha}_{11} \Phi_{aa} + \bar{\alpha}_{22} \Phi_{aaa} + \bar{\alpha}_1 \Phi_a + \bar{\alpha}_2 \Phi_{aaa} = 0. \quad (12.40)$$

Пусть $\bar{\alpha}_1 \approx 0$ и

$$G = \Phi_{aa}, \quad (12.41)$$

$$2\lambda = \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_{22}^{-1} = -\omega \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \langle (U - C) \rangle_{\alpha_2} ! \\ \times [\omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \langle (U - C) \rangle_{\alpha_{22}} - h K^{-3} \omega^2]^{-1}, \quad (12.42)$$

$$\omega_0^2 = \bar{\alpha}_{11} \bar{\alpha}_{22}^{-1} = \\ = [\omega^2 K^{-2} - gh - \rho^{-1} h \alpha \bar{\rho} U_1^2 K + \omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \langle (U - C) \rangle_{\alpha_{11}}] ! \\ \times [\omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \langle (U - C) \rangle_{\alpha_{22}} - h K^{-3} \omega^2]^{-1}. \quad (12.43)$$

В результате уравнение (12.40) может быть записано в виде (12.39)

$$G_{aa} + 2\lambda G_a + \omega_0^2 G = 0. \quad (12.44)$$

Уравнение (12.44) отличается от (12.39) только значениями коэффициентов. Подчеркнем, что здесь, как и в (12.38), величина λ зависит от коэффициента трения α_2 и разности скоростей ветра и волны. Величина λ может менять знак при изменении U или C .

3. «Самоусиление» волн. В результате описанных простых математических операций мы свели исследование уравнений (12.36) и (12.40) к анализу модельного уравнения (12.39), которое описывает качественно влияние ветра на развитие как длинных, так и коротких волн. Решение ищем в виде:

$$G = \exp(\zeta r). \quad (12.45)$$

Для ζ находим характеристическое уравнение

$$\zeta^2 + 2\lambda \zeta + \omega_0^2 = 0. \quad (12.46)$$

Общее решение уравнения (12.39) имеет вид:

$$G = c_1 \exp(\zeta_1 r) + c_2 \exp(\zeta_2 r), \quad (12.47)$$

где

$$\zeta_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (12.48)$$

В зависимости от значений $\zeta_{1,2}$ мы имеем разные выражения для G . Нас интересуют только те значения, которые определяют волновое движение. Пусть $\lambda \neq \omega_0$, тогда мы имеем два комплексно-сопряженных значения ζ . Общее решение в этом случае можно записать так:

$$G = A \exp(-\lambda r) \cos(\omega r + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (12.49)$$

где A и ω — вещественные постоянные. Если $\lambda > 0$, то определяемые этими формулами движения представляют собой так называемые *затухающие волны*. Если $\lambda < 0$, то можно говорить, что поверхностная волна *усиливается*. Можно провести некоторую аналогию этого усиления с хорошо известным

в механических системах явлением *самовозбуждения*. Таким образом, в зависимости от знака λ волна усиливается ветром или ослабляется. Отметим, что возможное усиление волн, описанное выше, связано только с ветровой нагрузкой. Действительно, коэффициент λ в (12.39) определяется полностью ветровой нагрузкой, так как влияние кинематической вязкости на распространение волны на малом участке распространения пренебрежимо мало.

Подчеркнем снова, что коэффициент λ является функцией разности скоростей ветра и волны. Таким образом, волна способна извлекать энергию из ветра, если выполняется определенное выше условие. В целом, мы имеем хорошо известную ситуацию взаимодействия гибкой поверхности с набегающим потоком. Действительно, некоторые деформируемые системы в состоянии извлекать энергию из потока жидкости. Например, самовозбуждение колебаний крыла самолета или лопаток турбин связано с этим явлением. Не менее известны случаи возбуждения колебаний и разрушения длинных пролетов мостов в порывах ветра.

12.4.2. Прохождение через резонанс линейных ветровых волн

В этом разделе учтем влияние гармонической силы на волну. В частности, такая сила может определяться гармонической составляющей давления ветра. В этом случае уравнение (12.39) принимает вид:

$$G_{rr} + 2\lambda G_r + \omega_0^2 G = \circ^* \cos \omega r. \quad (12.50)$$

Здесь $\circ^*$ — амплитуда, которая легко определяется как для длинной, так и короткой волн, в соответствии с уравнениями (12.27) или (12.34). Согласно разделу 8.6, для (12.50) решение запишется в виде:

$$G = A_* \cos(\omega r + \varphi), \quad (12.51)$$

где A_* определяется соотношением

$$A_* = -\varepsilon^* [(1 - \omega_0^2 \omega^2)^2 + (2\lambda \omega)^2]^{-0.5}. \quad (12.52)$$

Фаза волны (см. раздел 8.6) зависит от частоты возбуждения:

$$\varphi = \arg \tan[-2\lambda \omega (1 - \omega_0^2 \omega^2)^{-1}]. \quad (12.53)$$

Из (12.52) следует, что если λ не равно нулю, то бесконечно сильного усиления волны нет, даже если $\omega_0^2 \omega^2 = 1$. Однако появление бесконечной амплитуды возможно, если скорость ветра равна скорости волны. Тогда $\lambda = 0$ в (12.50) и мы имеем уравнение

$$G_{rr} + \omega_0^2 G = \varepsilon^* \cos \omega r. \quad (12.54)$$

Согласно (12.54), амплитуда волны уходит в бесконечность, если $\omega_0^2 \omega^2 = 1$.

Рассмотрим теперь выражения, определяющие λ и ω_0^2 . Из (12.38) и проведенного анализа следует, что длинная волна усиливается, а ее фаза меняется, если она входит в резонансную полосу, где $U \propto C$ и $C^2 \propto gh$. Аналогично, в соответствующей резонансной полосе могут усиливаться и волны на глубокой воде. Фаза возбуждаемой в резонансной полосе волны сильно отличается от фазы возбуждающей волны.

12.4.3. Волны, возбуждаемые в окрестности резонансов

Таким образом, мы качественно охарактеризовали резонансную полосу. Вдали от нее линейный расчет может давать достаточно хорошее описание волн. Однако по мере приближения к точному резонансу мы должны все более и более уточнять линейное решение. Рассмотрим область, прилегающую к резонансной полосе, — область, в которой уже нельзя полностью пренебрегать влиянием нелинейности.

Слабо-нелинейные волны. Длинные волны рассматриваются на основе уравнения (12.27). Мы полагаем в нем, что

$$\bar{C} = 0 \quad (12.55)$$

и $\beta_* G^3 + b_1 G + \chi G_r - k\alpha_* G_{rr} \approx 0$. Тогда уравнение (12.27) дает

$$\alpha_* G^2 + BG - \frac{1}{2}\varepsilon \cos \omega r = 0. \quad (12.56)$$

Решение имеет вид:

$$G_{\pm} = \frac{1}{2}\alpha_*^{-1}(-B \pm \sqrt{B^2 + 2\alpha_*^{\circ} \cos \omega r}). \quad (12.57)$$

Полученное выражение вещественно, если

$$B^2 \geq 2\alpha_*^{\circ} \cos \omega r. \quad (12.58)$$

В этом случае периодическое решение можно приближенно представить в виде:

$$G_{+} \approx \frac{1}{2}\varepsilon B^{-1} \cos \omega r + \frac{1}{4}\alpha_* B^{-3/2} \cos^2 \omega r + \frac{1}{4}\alpha_*^2 B^{-5/2} \cos^3 \omega r + \dots \quad (12.59)$$

Таким образом, когда $B^2 > 2\alpha_*^{\circ} \cos \omega r$, в системе возникают высокочастотные волны. Однако, при удалении от резонансной полосы, влияние их быстро падает, и на некотором удалении от нее мы имеем очевидное решение линейного уравнения (12.56):

$$G = \frac{1}{2}B^{-1}\varepsilon \cos \omega r. \quad (12.60)$$

Решения (12.57) и (12.60) справедливы только, если $\bar{C} = 0$ и выполняется условие (12.58). Это условие, при учете (12.25), дает

$$(1 - ghC^{-2})^2 > 2\alpha_* \varepsilon. \quad (12.61)$$

Таким образом, решения (12.57), (12.59) и (12.60) становятся заведомо несправедливыми, когда скорость волны C начинает приближаться к $\sqrt{gh}$.

Уравнение для резонансных волн. Примем, что при выполнении равенства $(1 - ghC^{-2})^2 = 2\alpha_* \varepsilon$, постоянная $\bar{C}$ в уравнении (12.27) скачкообразно изменяет свое значение (12.55) на

$$\bar{C} = \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{4}B^2\alpha_*^{-1}. \quad (12.62)$$

В результате, уравнение (12.27) дает

$$\alpha_* \left(G + \frac{1}{2} B \alpha_*^{-1} \right)^2 + \beta_* G^3 - k \alpha_* G_{rr} + \chi G_r + b_1 \int G dr = {}^\circ \cos^2 \frac{1}{2} \omega r. \quad (12.63)$$

Это уравнение соответствует (8.114). Поэтому решения раздела 8.6 удовлетворяют уравнению (12.63), если в них положить $F + b = {}^\circ \cos^2 \frac{1}{2} \omega r$. Этот факт будет использоваться ниже при исследовании катастрофических длинных волн.

12.4.4. Самовозбуждение нелинейных длинных волн зыби и ветровых волн

Теория самовозбуждения длинных волн развита в разделах 8.4–8.6. Исходным в теории является уравнение (8.58), которое, основываясь на представлении (8.59), сводится к основному уравнению (8.107), описывающему самовозбуждение волн. Можно видеть, что учет ветра и течения, согласно моделям, приведенным выше, практически не меняет структуру основных уравнений главы 8. Поэтому все подходы к анализу влияния глубины и нелинейности, развитые в главе 8, применимы и здесь. В этом подразделе мы проведем сжатый анализ возможности самовозбуждения длинных нелинейных океанских волн и дадим некоторые его результаты.

Рассмотрим уравнение (12.11). Пусть в нем $\mu = \sigma = 0$, тогда

$$\begin{aligned} & (1 + u_a)u_{tt} - g(2h_a u_a + h_{aa}u) + (gh + \alpha \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 Kh)u_{aa} + \\ & + [\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho}(U - C)](U - C)\alpha_1 - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}]u_t - \frac{1}{3} h^2 u_{ttt} + \\ & + gh(2 - 3u_a)u_a u_{aa} + \rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho}(U - C)](U - C)\alpha_2 u_{taa} = 0. \end{aligned} \quad (12.64)$$

Решение ищется в виде (8.5):

$$u(a, t) = u^{(1)}(a, t) + u^{(2)}(a, t). \quad (12.65)$$

Соотношение (12.65) подставляется в (12.64). В результате мы получаем уравнение ничем принципиально не отличающееся от (8.13) или (8.52). В частности, мы получаем линейное уравнение для $u^{(1)}$:

$$\begin{aligned} & u_{tt}^{(1)} - g(2h_a u_a + h_{aa} u)^{(1)} - (gh + \alpha \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 Kh) u_{aa}^{(1)} + \\ & + [\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C) \alpha_1 - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}] u_t^{(1)} - \frac{1}{3} h^2 u_{aaa}^{(1)} + \\ & + \rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C) \alpha_2 u_{aaa}^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (12.66)$$

и нелинейное уравнение для $u^{(2)}$:

$$\begin{aligned} & u_{tt}^{(2)} - g(2h_a u_a + h_{aa} u)^{(2)} - (gh + \alpha \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 Kh) u_{aa}^{(2)} + \\ & + [\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C) \alpha_1 - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}] u_t^{(2)} - \frac{1}{3} h^2 u_{aaa}^{(2)} + \\ & + \rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C) \alpha_2 u_{aaa}^{(2)} = \bar{A} - gh(3 - 6u_a) u_a u_{aa}. \end{aligned} \quad (12.67)$$

Уравнение (12.67) аналогично (8.63). В (12.67) $\bar{A}$ — остаточный член. Далее полагаем, что он пренебрежимо мал. Рассматривая однонаправленные волны и следуя (8.59), (12.19) и (12.20), мы принимаем, что

$$u^{(1)}(r) = A(a)J(r) \quad \text{и} \quad u^{(2)}(r) = \bar{J}(r), \quad (12.68)$$

где

$$r = t - \int C^{-1}(a) da, \quad (12.69)$$

$$C(a) = C_0 + C_d + C_n + \bar{U}. \quad (12.70)$$

Здесь, как и ранее, C_d и C_n учитывают влияние дисперсии и нелинейности, соответственно.

Линейная компонента волны и закон Грина. Функция $u^{(1)}$ описывает стационарные волны типа зыби. Они описываются обычно гармонической функцией. Поэтому (8.43) дает

$$K_1 = -\omega^2 C^{-2}. \quad (12.71)$$

Учитывая сказанное, мы записываем (12.66) в виде:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3} h^2 \omega^2 C^{-2}\right) A J'' - (gh + \alpha \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 Kh) A J' + \\ & + [A_{aa} J - 2C^{-1} A_a J' - (C^{-1})_a A J' + C^{-2} A J''] + \\ & + [\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C) \alpha_1 - \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}] A J' - \\ & - 2gh_a (A_a J - C^{-1} A J') - gh_{aa} A J = 0. \end{aligned} \quad (12.72)$$

Отсюда мы получаем выражения, распространяющие полученные в главе 8 обобщения закона Грина на случай учета действия ветра:

$$C^3 + \left(\frac{1}{3} h^2 \omega^2 - gh \right) C - \alpha h \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 KC = 0, \quad (12.73)$$

$$A = \pm \left\{ C \exp \int (gh + \alpha h \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 K)^{-1} ! \right. \\ \left. \times \left[-\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho} C (U - C) \|(U - C)\| \alpha_1 + \rho^{-1} h^{-1} \bar{s} C - 2gh_a \right] da + \bar{\bar{C}}^+ \right\}^{0.5}. \quad (12.74)$$

Вместе с (12.68) эти выражения могут определить линейную составляющую $u^{(1)}(r)$ катастрофической волны. Выражение для амплитуды (12.74) учитывает как влияние слабой дисперсии, так ветра и трения о дно. Рассмотрим случаи упрощения (12.73) и (12.74). Уравнение для C (12.73) явно показывает влияние давления ветра на скорость волны. Если влияние скорости U_1 мало, то (12.73) дает следующее приближенное выражение:

$$C \approx \sqrt{gh - \frac{1}{3} h^2 \omega^2}, \quad (12.75)$$

которое было получено при выводе закона Грина для слабо-дисперсионных волн (раздел 8.3.4). Если $U_1^2 = 0$ и $U = C$, то (12.74) дает

$$A = \bar{\bar{C}} h^{-1} \left(gh - \frac{1}{3} h^2 \omega^2 \right)^{0.25} \exp \left\{ \frac{1}{2} \rho^{-1} g^{-1} \bar{s} \int h^{-2} \left(gh - \frac{1}{3} h^2 \omega^2 \right)^{-0.5} da \right\} \frac{1}{2}. \quad (12.76)$$

Если $gh \gg \frac{1}{3} h^2 \omega^2$, то из (12.76) следует (8.24).

Таким образом, выражения (12.73), (12.74) и (12.68)–(12.71) определяют закон Грина, записанный с учетом дисперсии, трения о дно и ветра.

Нелинейная компонента волны. Рассмотрим уравнение для нелинейной компоненты волны $\bar{J}(r)$ (12.67), полагая, что $h_{aa} = 0$. Следуя далее подразделу 12.3.1, мы получим уравнение, подобное (8.107):

$$B \bar{J}_r + \alpha_* \bar{J}_r^2 + \beta_* \bar{J}_r^3 + (1 + 2ghC^{-2}) AC^{-1} J_r \bar{J}_r + \\ + 6ghC^{-4} (A^2 J_r^2 \bar{J}_r + A \bar{J}_r^2 J_r) + b_1 \bar{J} + \chi \bar{J}_{rr} - k \alpha_* \bar{J}_{rrr} = \\ = -\frac{1}{2} A^2 C^{-1} (1 + 2ghC^{-2}) J_r^2 - 2A^3 ghC^{-4} J_r^3 - \bar{C}. \quad (12.77)$$

Здесь введены обозначения, некоторые из которых отличаются от (12.22):

$$B = ghC^{-2} - 1 + \alpha \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 KhC^{-2}, \quad \alpha_* = 15ghC^{-3}, \quad \beta_* = 2ghC^{-4}, \\ k = -\frac{1}{3} h^2 \alpha_*^{-1} C^{-2}, \quad b_1 = -\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_1 - 2gh_a C^{-1} + \rho^{-1} h^{-1} \bar{s}, \\ \chi = -\rho^{-1} h^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_2 C^{-2}. \quad (12.78)$$

В уравнении (12.77) $\bar{C}$ — постоянная интегрирования и A не равна нулю, если мы учитываем переменную глубину. Однако, рассматривая нелинейную составляющую волны, мы не будем принимать во внимание изменение глубины и полагаем, что $A = 1$. Коэффициенты (12.78) следуют из (12.22), если в последних $\mu = 0$. Функция J_r определяет волну, набегающую из океана и проходящую резонансную полосу. Функция $\bar{J}_r$ описывает нелинейное усиление волны. Ширину полосы определяет величина B . Если она близка нулю, то возможно катастрофическое усиление волны внутри резонансной полосы. Если $B = 0$, то резонанса нет и приближенно $\bar{J}_r = 0$. Пусть

$$J_r = \pm \sqrt{\sigma} \sin \frac{1}{2} \omega r. \quad (12.79)$$

Здесь $\sqrt{\sigma}$ — амплитуда. Затем мы примем в (12.77), что

$$\bar{C} = -\frac{1}{2} C^{-1} (1 + 2ghC^{-2}) \bar{\varepsilon} + \frac{1}{4} B^2 \alpha_*^{-1}. \quad (12.80)$$

В этом случае (12.77) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & \alpha_* \left(\bar{J}_r + \frac{1}{2} B \alpha_*^{-1} \right)^2 + \beta_* \bar{J}_r^3 + (1 + 2ghC^{-2}) A C^{-1} (\bar{J}_r J_r) + \\ & + 6ghC^{-4} (A^2 J_r^2 \bar{J}_r + A \bar{J}_r^2 J_r) + b_1 \bar{J} + \chi \bar{J}_{rr} - k \alpha_* \bar{J}_{rrr} = \circ \cos^2 \frac{1}{2} \omega r. \end{aligned} \quad (12.81)$$

Здесь

$$\circ = \frac{1}{2} C^{-1} (1 + 2ghC^{-2}) \sigma. \quad (12.82)$$

Мы подчеркнем, что полученное уравнение описывает как нелинейную составляющую волн, возникающих под действием ветра, при этом в (12.77) коэффициенты определяются выражениями (12.78), так и нелинейную составляющую волны, при этом коэффициенты определяются также выражениями (12.78), но в них следует положить $U_1^2 = 0$, $U = C$.

Выражение (12.80) позволило нам записать (12.77) в виде (12.81). Это очень важно, так как (12.81) может, очевидно, иметь вещественное решение, в то время как (12.77) может его не иметь. Действительно, в максимально упрощенном виде уравнение (12.81) дает $\alpha_* \bar{J}_r^2 = \varepsilon \cos^2 \frac{1}{2} \omega r$. Откуда

$$\bar{J}_r = \pm \sqrt{\varepsilon \alpha_*^{-1}} \cos \frac{1}{2} \omega r.$$

Дискретные, локализованные решения уравнения (12.77). В случае, аналогичном рассмотренному, уравнение (12.77) имеет чисто мнимое решение

для всех r . Вместе с тем, при некоторых значениях r и C уравнение (12.77), в его максимально упрощенном варианте, может иметь или вещественное, или мнимое решения. Покажем это. Пусть

$$J_r = \pm \sqrt{\varepsilon} \cos \frac{1}{2} \omega r \quad \text{и} \quad \bar{C} = -\frac{1}{4} C^{-1} (1 + 2ghC^{-2})^\sigma. \quad (12.83)$$

Тогда уравнение (12.77) дает

$$\begin{aligned} B\bar{J}_r + \alpha_* \bar{J}_r^2 + \beta_* \bar{J}_r^3 + (1 + 2ghC^{-2})C^{-1}(\bar{J}_r J_r) + 6ghC^{-4}(J_r^2 \bar{J}_r + J_r \bar{J}_r^2) + \\ + b_1 \bar{J} + \chi \bar{J}_{rr} - k\alpha_* \bar{J}_{rrr} = \frac{1}{2} \varepsilon \cos \omega r - 2ghC^{-4} J_r^3. \end{aligned} \quad (12.84)$$

Полагаем далее, что $b_1 = \chi = k = 0$. В результате получаем кубическое алгебраическое уравнение, которое всегда имеет хотя бы одно вещественное решение. Поэтому уравнение может быть полезным при анализе океанских волн.

Рассмотрим теперь случай, когда кубический член в (12.84) можно отбросить. В этом предельном случае уравнение (12.84) дает следующее квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} (\alpha_* + 6ghC^{-4} J_r) \bar{J}_r^2 + [B + (1 + 2ghC^{-2})C^{-1} J_r + 6ghC^{-4} J_r^2] \bar{J}_r - \\ - \frac{3}{4} C^{-1} \varepsilon \cos \omega r \mp 2C^{-2\sigma 1.5} \cos^3 \frac{1}{2} \omega r = 0. \end{aligned} \quad (12.85)$$

Это уравнение определяет два значения $(\bar{J}_r)_\pm$. После чего, используя (12.65) и (12.68), записываем следующее выражение:

$$(u_r)_\pm = \pm \sqrt{\varepsilon} \cos \frac{1}{2} \omega r + (\bar{J}_r)_\pm. \quad (12.86)$$

Это выражение можно существенно упростить, если $B + (1 + 2ghC^{-2})AC^{-1} J_r = 0$ в (12.85). Тогда (12.85) дает

$$(\bar{J}_r)_\pm \approx \pm \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon \cos \omega r}. \quad (12.87)$$

Затем мы можем найти

$$(u_r)_\pm = \sqrt{\varepsilon} \left(\pm \cos \frac{1}{2} \omega r \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cos \omega r} \right). \quad (12.88)$$

В рассмотренном случае (12.88) может иметь или вещественное, или комплексное значения.

Таким образом, специальным образом меняя значение $\bar{C}$, мы можем изменять вид уравнения (12.77). В частности, мы получили два новых уравнения: (12.81) и (12.85). Их приближенные решения могут быть полезными при моделировании катастрофических океанских волн. Теперь с помощью (6.75), где

мы сохраняем квадратически нелинейные члены, можно найти выражение для поверхностной волны.

Таким образом, мы нашли, что исследование возникновения катастрофических волн в рамках модели мелкой воды сводится к решению подобных уравнений: (12.23), (12.27) и (12.81), (12.84). Эти уравнения напоминают (8.107), поэтому решения этого уравнения будут широко использоваться ниже. Отметим также, что имеется определенная аналогия между указанными выше уравнениями для длинных волн и уравнениями (12.32) и (12.34). Однако здесь мы не рассмотрели эту аналогию, так как коротким волнам и их катастрофическому усилению будет посвящена глава 16.

12.5. Заключение по главе, определяющие дальнейшие исследования

Основные результаты главы следующие:

1. Предложенные модели взаимодействия ветер-волна позволили записать уравнения, явно учитывающие действие ветра.

2. Усиление ветровых волн может быть связано как с действием сил трения, так и с ветровым давлением.

3. Исследование катастрофических океанских волн можно формулировать как задачу о вынужденных, так и свободных волнах. В первом случае в волновое нелинейное уравнение входит вынуждающая сила, не зависящая от поверхностного волнения, во втором — она отсутствует. Второй случай включает катастрофическое усиление как ветровых волн, так и волн зыби.

4. При наличии гармонической составляющей уравнение (12.63) полностью определяет профиль волны в соответствии с выражением (6.75), записанным при учете величин второго порядка.

5. Если гармоническая составляющая отсутствует или пренебрежимо мала, то катастрофическая волна, возникающая внутри резонансной полосы, состоит из двух компонент. Первая — начальная волна, проходящая в резонансную полосу. Такой компонентой может быть волна зыби. Эта компонента считается известной и не меняющейся внутри резонансной полосы. Мы обозначили ее как волна J . Вторая — нелинейная компонента (волна $\bar{J}$) — возбуждается начальной волной J . Она сильно усиливается внутри резонансной полосы и определяет возникновение катастрофической волны. Уравнение (12.81) для волны $\bar{J}$ описывает катастрофическое усиление как ветровых волн, так и волн зыби. В последнем случае в коэффициентах уравнения (12.81) следует положить $U_1^2 = 0$, $U = C$. Продольные перемещения определяются по формулам (12.65), (12.68)–(12.70), а форма волны — согласно (6.75).

Из изложенного следует, что дальнейшее исследование катастрофических волн можно вести на основе трех разных подходов. Первые два связывают появление этих волн с проявлением ветра. Последний подход должен объяснить их появление в безветренную погоду.

Мы отмечали в начале главы крайнюю сложность аналитического описания полной картины взаимодействия ветер-волна. Поэтому такая цель и не ставилась. Цель этой главы в том, чтобы показать, что, используя простые модели, можно качественно объяснить некоторые особенности катастрофического усиления ветровых волн. Согласно этим моделям, усиление волн происходит за счет трения, если скорость волны меньше скорости ветра. Если эти скорости равны, то возможно дальнейшее усиление волны за счет гармонической составляющей давления ветра.

Конечно, это выводы самого грубого анализа. В частности, в процессе взаимодействия ветер-волна вблизи резонанса меняются фазы волн J и $\bar{J}$ (12.68), что может существенно изменить волновую картину. Формула (12.53) показывает такую возможность. Отметим, что мы провели учет изменения фазы при исследовании линейных волн, однако, подобные изменения могут иметь место и для нелинейных волн, что, однако, исследовать много тяжелее.

13. Теория катастрофических волн, возбуждаемых гармонической составляющей ветра

Можно противостоять армии, но не идеи, чье время пришло.

Виктор Гюго

Согласно общепринятым определениям, волны на поверхности моря подразделяются на свободные, когда сила, вызвавшая их, прекращает действовать и волны свободно бегут, как это имеет место для волн зыби, и вынужденные, когда действие силы, вызвавшей образование волн, не прекращается. Но для нашего исследования подобное разделение не совсем удобно. Дело в том, что действие ветра мы моделируем в волновых уравнениях как при учете заданного гармонического давления, так и без его учета. Поэтому, для удобства, мы будем в дальнейшем говорить о вынужденных волнах, только когда соответствующее волновое уравнение содержит заданную вынуждающую гармоническую силу, причем скорость смещения этой силы приближенно равна скорости поверхностных волн. В противоположном случае рассматриваются свободные волны, даже если они возбуждаются ветром.

В этой главе, чтобы получить результаты, которые могут быть отнесены к возникновению экстремальных волн, мы сильно упрощаем картину поверхностного взаимодействия волн с атмосферным давлением и ветром. Следуя Ламбу [26, стр. 625], мы игнорируем трение ветра и примем во внимание только нормальное давление, которое задается синусоидальной бегущей волной. По-видимому, Акулас [35–37] первым использовал такую модель, исследуя нелинейные волны, возбуждаемые гармоническим давлением, бегущим по поверхности воды с критической (резонансной) скоростью. Такой подход имеет ряд достоинств. Во-первых, из него очевидна связь катастрофического усиления волн с резонансными явлениями. Во-вторых, имеются интересные экспериментальные исследования вынужденных поверхностных волн, что открывает возможность сравнения теоретических данных с наблюдениями. Наконец, его результаты легко распространяются на случай, когда гармоническая составляющая в давлении ветра отсутствует или влияния ветра нет.

В настоящей главе мы рассматриваем длинные квадратично-нелинейные вынужденные волны. Напомним, что хотя мы употребляем здесь термин «длинные» волны, теория этих волн описывает типичные штормовые волны и волны зыби в мелких морях, например, в Северном море. Как показано в разделе 6.4 (см. также рис. 84), используемые здесь уравнения применимы вплоть до значений $h / \lambda = 0.4$. Поэтому на их основе можно изучать, например, «Новогоднюю» волну, описанную в разделе 11.2.

Так как мы переходим к прямому моделированию катастрофических волн, то надо здесь однозначно определить, какие волны можно считать катастрофическими. Исходим из того, что мы рассматриваем резонансные волны. Волна будет считаться катастрофической, если ее высота в точном резонансе превышает в два и более раз высоту этой волны вдали от резонанса.

13.1. Еще раз о влиянии дисперсии и поверхностного трения

Очевидно, что профили экстремальных океанических волн определяются нелинейными и дисперсионными свойствами поверхности океана. Соответствующие волновые уравнения выведены в части II. Там же развита теория решения этих уравнений, которая иллюстрирована несколькими примерами. В этой части книги мы продолжаем аналитическое исследование нелинейных волн. Основное внимание уделено периодическим волнам. Уединенные экстремальные поверхностные волны возникают как вырожденный случай периодических волн во время их локального усиления при прохождении узкой резонансной полосы.

Особенности нелинейных волновых процессов в существенной степени определяются конкуренцией между нелинейностью, дисперсией и диссипацией. Например, в случае гармонического основного возмущения, нелинейность приводит к зарождению высших гармоник. В результате профиль волны искажается. Чем сильнее нелинейность, тем более высокие гармоники возбуждаются и тем сильнее искажение начального профиля. В пределе нелинейность может породить опрокидывающие и близкие к ним волны. Этому мешает дисперсия. Из-за дисперсии зарождаемые гармоники имеют разные скорости распространения. Поэтому они не всегда аккумулируются и образуют крутые фронты. Однако, если дисперсия мала, то она существенно меняет только скорости высоких гармоник, а скорости низших гармоник практически совпадают. При этом суммирование низших гармоник может дать достаточно крутые фронты волн. Здесь мы позволяем себе провести параллель с эффектом вязкости. Если вязкость мала, то поглощаются в первую очередь высокие гармоники. В этом случае сохраняется возможность зарождения очень крутых волновых фронтов. Нечто подобное может иметь место и в случае слабой дисперсии. Таким образом, высокие, но не опрокидывающиеся океанские волны — результат взаимодействия нелинейных и дисперсионных эффектов.

По-видимому, взаимодействие нелинейности и дисперсии резко возрастает в области резонансов. Но как это влияние себя проявляет? Мы не дадим здесь полного ответа на этот вопрос. В этой главе наш анализ будет сведен

к описанию экстремальных поверхностных слабо-нелинейных океанических волн, с учетом и без учета слабой дисперсии.

Поясним сказанное на примере уравнения (12.63). Мы будем говорить только о его решениях, которые могут иметь место, пока волна проходит резонансную полосу. Следуя [25], введем параметр $\Delta = 3\alpha_* C^2 h^{-2}$, который характеризует отношение квадратичной нелинейности к дисперсии. Если $\Delta \approx 1$, то можно ожидать, что первоначально-гладкая волна эволюционирует внутри резонансной полосы в солитон. Если $\Delta \gg 1$, то первоначально-гладкая волна эволюционирует там в ударную волну. Собственно говоря, настоящая глава посвящена аналитической проверке последних двух предположений.

13.2. Структура фронта волны: эффект нелинейности

Рассмотрим резонансный случай, когда скорость ветра близка или равна скорости длинных волн $\sqrt{gh}$. Область, в которой это равенство выполняется, названа резонансной полосой. Волны будем описывать уравнением (12.63), которое определяет широкий круг эффектов. Оно имеет и другие достоинства, а именно: оно совпадает с уравнением (8.114), достаточно полно изученным в разделе 8.6. В частности, все решения, записанные для (8.114), справедливы и для уравнения (12.63), если в последних положить

$$b + F = \cos^2 \frac{1}{2} \omega r. \quad (13.1)$$

Таким образом, согласно разделу 8.6, мы можем записать следующее выражение для длинных океанических волн в виде:

$$G = \alpha_*^{-0.5} \sqrt{\varepsilon} \cdot 2R^{5^{-1}} + \cos \frac{1}{2} \omega r \Phi(r + \varphi) \frac{1}{2}. \quad (13.2)$$

Здесь R — трансрезонантный параметр:

$$R = -0.255 \alpha_*^{-0.5} B \alpha_*^{-0.5}. \quad (13.3)$$

Когда скорость волн равна $\sqrt{gh}$ трансрезонантный параметр равен нулю (точный резонанс). Изменение скорости ветра приводит к изменению R . Далее будет показано, что ширина резонансной полосы определяется условием $|R| \ll 1$.

Ряд выражений для $\Phi(r + \varphi)$, полностью определяющих решение (13.2), приведен в разделе 8.6. В случае рассматриваемых ветровых волн они должны быть переписаны с учетом (13.1). Конечно, надо иметь в виду, что значения коэффициентов в (12.63) могут отличаться от коэффициентов уравнения (8.107).

Теперь мы можем записать приближенное выражение для длинной океанской волны, которая записывается при учете квадратично-нелинейных членов в (6.75) так:

$$\eta = h(-u_a + u_a^2) - h_a u. \quad (13.4)$$

Согласно (12.22) $G = u_r$, поэтому (13.4) можно записать в виде:

$$\eta = h(C^{-1}G + C^{-2}G^2) + h_a C^{-1} \int G da. \quad (13.5)$$

Мы учли в (13.5) нелинейную поправку, так как уравнение (12.63) учитывает квадратичную нелинейность. Уравнение (12.63), выражение (13.5) и решения, представленные в разделе (8.6), определяют широкий спектр резонансных длинных волн, которые могут возбуждаться на поверхности океана.

Подчеркнем, что выражение (13.2) для нелинейной резонансной океанской волны подобно решениям, описывающим нелинейные волны, возбуждаемые в конечных резонаторах (см. главу 9). Это позволит нам ниже сравнивать экспериментальные данные, полученные для конечных резонаторов, с результатами расчетов η .

Общий случай, описывающий чисто нелинейные эффекты на фронте волны, рассмотрен в подразделе 8.6.1. Там найдены два значения для $\Phi(r + \phi) = \Phi_0(r + \phi) = \pm 1$. Подставляя последние значения в (13.2), мы получим

$$G_{\pm} = hC^{-1} \alpha_*^{-0.5} \varepsilon^{0.5} \left(2R5^{-1} \pm \cos \frac{1}{2} \omega r \right). \quad (13.6)$$

Мы получили решение Честера [45]. Это решение справедливо внутри резонансной полосы, где $R^2 \geq 1$. Если $R^2 < 1$, то мы должны использовать решение (12.59).

Мы принимаем, что решение (13.6) определяет волну в пределах интервала $(N-1)\pi + \phi \leq \omega r \leq N\pi + \phi$, где N — целое число и ϕ — волновая фаза. Например, мы можем принять, что решение G_+ действительно в пределах интервала $\phi \leq \omega r \leq \pi + \phi$ ($N=1$). В следующем интервале, $\pi + \phi < \omega r \leq 2\pi + \phi$ ($N=2$), используется решение G_- . Затем для $N=3$ решение G_+ справедливо снова, и т.д. Решения должны иметь период π/ω и нулевую площадь относительно невозмущенной поверхности воды. Эти условия удовлетворяются, если $\phi = \arcsin R$ [45]. Таким образом, когда волна проходит резонансную полосу, фаза волны изменяется (см. также раздел 8.6). Волновая фаза меняется на 180 градусов, так как R изменяется от $+1$ до -1 внутри резонансной полосы.

В границах интервалов функция G может иметь скачок (разрыв). Скачок приближенно моделирует формирование крутого фронта катастрофической волны. Для гравитационных поверхностных волн разрыв может использоваться как упрощенная математическая модель нелинейных волн перед началом их

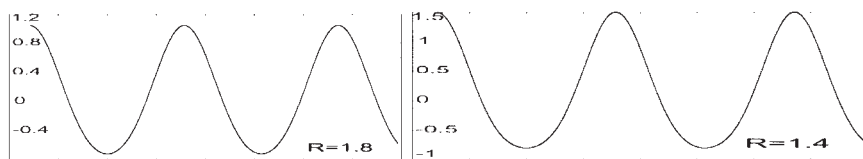


Рис. 122. Слабо-нелинейные волны, возбуждаемые вблизи границы резонансной полосы.

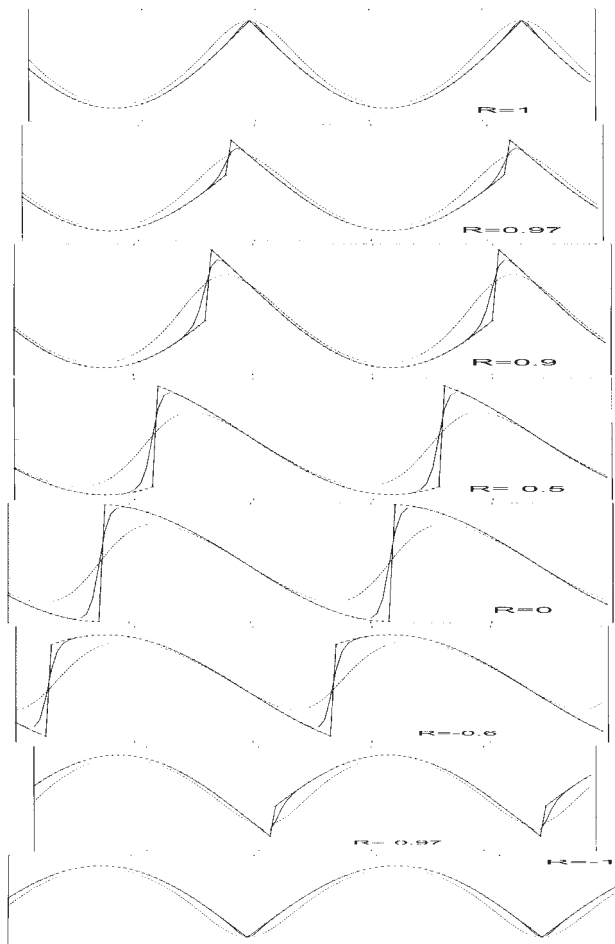


Рис. 123. Резонансные волны. Эффект нелинейности и трения на трансрезонансную эволюцию поверхностных волн. Разрывные профили волны вычислены для случая нулевого трения.

Непрерывные профили волн вычислены для различных значений коэффициента трения.

Разрывные профили преобразуются в гармонические кривые, если коэффициент трения значителен.

опрокидывания. Разрыв имеет место только для резонансных волн. Если $R^2 > 1$, то решение (13.6) не справедливо. Вне границ резонансной полосы, мы должны использовать слабо-нелинейное решение (12.59) (см. рис. 122) или линейное решение (12.60).

Трасрезонансная эволюция периодических волн показана на рис. 123. Волны вычислены для $R = 1, 0.97, 0.9, 0.5, 0, -0.6, -0.97$ и -1 . Сильные разрывы, обычно, нестабильны; поэтому мы рассматриваем бора-подобные (разрывные) профили на рис. 123, в первую очередь, как иллюстрации к квадратично-нелинейной теории.

Ниже мы будем сравнивать результаты нашей теории с экспериментальными данными, полученными Честером и Боуном (Chester and Bone) [46]. Они возбуждали волны в прямоугольном бассейне. Длина бассейна была 60 см, ширина 15 см [46]. В экспериментах варьировалась вынуждающая амплитуда и глубина бассейна. Амплитуда определяла вклад нелинейности в волнообразование. Изменяя глубину, исследователи [46] меняли дисперсию. Согласно теории, можно было бы ожидать, что при малой глубине и сильном возбуждении на воде возникнут волны, имеющие крутой (разрывной) фронт, напоминающие ударные волны в газе. Меняя глубину, можно добиться появления на поверхности периодических солитонов. Неожиданный результат был получен при сильном возбуждении и вместе с тем не слишком малой дисперсии (глубине). При этом наблюдались очень сильные волны с высотой, равной глубине бассейна, и крутым профилем.

Экспериментально замеренные профили длинных волн приведены на рис. 124. Легко видеть, что они качественно согласуются с теоретическими расчетами, представленными на рис. 122 и 123.

Таким образом, решение (13.6) качественно описывает некоторые важные особенности резонансного развития длинных поверхностных волн. Эти волны могут изменяться от гармонических к кноидальным и, далее, до пилообразных форм (см. рис. 5.5.4 [47]). Подобное трансрезонансное развитие волн читатель может видеть на морском берегу. Разрывное решение (13.6) иногда

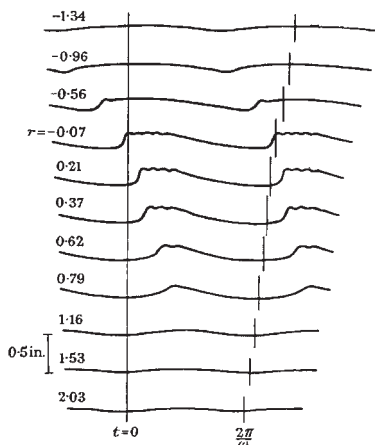


Рис. 124. Эффект нелинейности. Экспериментально замеренные профили поверхностных волн, возбуждаемые с резонансной и около резонансной частотой. Толщина водного слоя $h \approx 1.25$ см, амплитуды вынуждающих колебаний $l \approx 0.31$ см [46].

трудно использовать. Поэтому иногда более удобно представлять его как сумму гармонических функций. В частности, для точного резонанса

$$G = 45^{-1} \sqrt{\alpha_*^{-1}} \cos \frac{1}{2} \omega r \sum_{n=1,3,5,\dots}^7 n^{-1} \sin \frac{1}{2} n \omega r. \quad (13.7)$$

Разрывное решение (13.6) лежит в основе всех последующих результатов нашего исследования нелинейно-периодических волн.

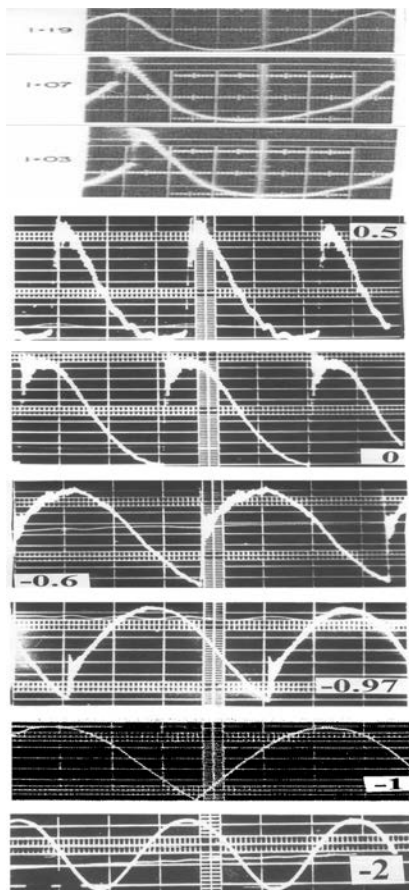


Рис. 125. Волны, возбуждаемые в окрестности первого линейного резонанса столба газа в закрытой трубе. Давление измерялось на закрытом конце трубы для различных значений трансрезонансного параметра R ($R = -2; -1, -0.97, -0.6, 0, 0.5$). На рисунке помещены экспериментальные кривые, замеренные для $R = -2; -1, -0.97, -0.6, 0, 0.5$ [49] и $R \approx 0.7, 0.9$ и 1.5 [50].

Замечание. Мы уже подчеркивали, что если дисперсия мала, то уравнения для поверхностных волн, практически, совпадают с газодинамическими уравнениями. В частности, эту аналогию использовал в своих исследованиях Честер [48]. Согласно этому, кривые рис. 122 и 123 должны также описывать резонансную эволюцию волн в газе.

Рис. 125 показывает трансрезонансное развитие гармонической волны в ударные волны. Волны возбуждались поршнем в газе, заполняющем трубу при $R = -2; -1, -0.97, -0.6, 0, 0.5$ [49]. Результаты работы [49], представленные для $R = -2; -1, -0.97, -0.6, 0, 0.5$, описывают не полностью эволюцию волн, поэтому они дополнены кривыми давления из [50] с тем, чтобы показать полностью эволюцию волн при изменении вынуждающей частоты в окрестности резонанса. Амплитуда этих трех волн отличается от амплитуды волн, измеренных для $R = -2; -1, -0.97, -0.6, 0, 0.5$. На эти волны также влияет некоторое среднее течение, существующее в трубе [50].

Из сопоставления кривых рис. 123–125 следует, что решение (13.6) хорошо описывает резонансные волны, возбуждаемые в случаях, когда влияние дисперсии и вязкости пренебрежимо мало. Вблизи резонанса амплитуды волн могут существенно (в два и более раз) превосходить амплитуду волн вдали от резонанса. Таким образом, с полным основанием мы можем называть резонансные волны *катастрофическими* или *экстремальными*.

13.3. Структура фронта волны: эффекты ветра, дна и слабой дисперсии

Сначала мы показываем, что опрокидывание длинных волн может быть связано с эффектами дна и ветра. Затем рассматривается влияние вязкости, трения и слабой дисперсии на структуру фронта волны.

Эффект трения. Опрокидывание прибрежных волн, — возможно, одно из самых красивых и удивительных океанических явлений. Процесс возникновения этого явления состоит из нескольких этапов. Сначала синусоидальные волны, прибывающие из глубокого океана, очень быстро искажаются, повторяя некоторые этапы, показанные на рис. 122 и 123. В результате, формируются подобные разрыву фронты волн, которые, в целом, описываются решением (13.6). Однако чисто квадратная теория волн и невязкой модели воды не могут описать дальнейшую эволюцию фронтов. Поэтому, если мы хотим изучить опрокидывание, мы должны уточнить математическую формулировку проблемы. В частности, около берега трение воды о дно и изменение глубины становятся важными. Поэтому мы можем надеяться, что элементарная квадратично-нелинейная теория может описать начало опрокидывания, если ее дополнить учетом трения.

В этом случае уравнение (12.27) дает

$$(B + 2\alpha_* G)G_r + b_1 G = -\varepsilon \omega \sin \omega r. \quad (13.8)$$

В (13.8) коэффициент b_1 учитывает влияние донного трения, ветра и изменения дна (12.22). Мы проигнорировали в (12.27) кубически-нелинейные, вязкие и дисперсионные члены. Можно видеть, что (13.8) совпадает с уравнением (4.1) из [51]. Согласно (13.8), существует сингулярная линия $G = -0.5B\alpha_*^{-1}$. Другими словами, решение уравнения (13.8) имеет особенность в окрестности этой линии. Далеко от особенности уравнение (13.8) имеет гладкое гармоническое решение [51–57]. Однако вблизи сингулярной линии профиль волны может сильно исказиться. В частности, мы можем ожидать, что сингулярность уравнения (13.8) может преобразовать фронт волны в вихрь, так как около сингулярности уравнение (13.8) может иметь много решений (см. также главу 22).



Рис. 126. Профиль волны, определенный сингулярным решением уравнения (13.8).

Пусть профиль волны, определенный согласно (13.8), пересекает сингулярную линию. Тогда, как найдено в [52], фронт волны начинает закручиваться и, как следствие, опрокидываться. Профиль волны, качественно соответствующий этому случаю, показан на рис. 126.

Таким образом, согласно представленной теории, явление опрокидывания длинных волн может быть связано с квадратной нелинейностью, действием дна и ветра. Внутренняя вязкость воды не может повлиять на этот процесс, так как эта вязкость очень мала. Однако влияние ветра может быть очень важным.

Замечание. Как уже отмечалось и будет подчеркиваться далее — образование крутых фронтов волн и струй, возникающих в начале их опрокидывания (см. рис. 59), определяет, в первую очередь, опасность гигантских (и не только гигантских) волн для судоходства. Именно поэтому в этой части книги мы будем много говорить о крутых фронтах волн.

Эффект слабой вязкости и слабой дисперсии на структуру ударного фронта. Появление разрывного решения (13.6) можно связать с тем, что мы не учли вязкости. Как известно из газовой динамики, эффект вязкости может быть очень важным на фронте ударных волн. Исходя из этого, мы рассмотрим влияние трения, вязкости и дисперсии на структуру разрыва, определяемого решением (13.6).

1. Сначала мы предполагаем, что дисперсионный эффект незначителен. Используя (13.1), мы запишем решение (8.123) так:

$$\Phi = \Phi_0 = \tanh \left(\pm \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*^{\circ}} \int \cos \frac{1}{2} \omega r dr + C^* \right). \quad (13.9)$$

Это решение можно переписать в виде:

$$\Phi = \tanh \left\{ \pm 2\omega^{-1} \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*^{\circ}} \right. \\ \left. \times \left[\sin \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \cos \varphi - \cos \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \sin \varphi + C^* \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (13.10)$$

Внутри волнового фронта $\frac{1}{2} \omega r + \varphi \approx 0$ и $\cos(\frac{1}{2} \omega r + \varphi) \approx 1$. Пусть

$$C^* = \cos \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \sin \varphi,$$

тогда

$$\Phi = \tanh \left\{ \pm 2\omega^{-1} \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*^{\circ}} \sin \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \cos \varphi \frac{1}{2} \right\} \quad (13.11)$$

В этом случае (13.2) дает

$$G = \alpha_*^{-0.5} \varepsilon^{0.5} \left\{ 2R5^{-1} + \tanh \left\{ \pm 2\omega^{-1} \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*^{\circ}} \sin \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \cos \varphi \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \omega r \right\} \right\}. \quad (13.12)$$

Мы примем, что

$$\varphi = \arcsin R. \quad (13.13)$$

Если χ — малая величина, то решение (13.12) отличается от решения (13.6) только около разрыва. Рассмотрим величину χ (12.22). Если скорость ветра U и скорость волны C равны, то $\chi=0$. Таким образом, крутой фронт волны возникает, если $U=C$. Если эти величины далеки друг от друга, то решение (13.12) описывает гармоническую кривую (см. рис. 123).

2. Затем мы рассматриваем решение (8.132). Принимая во внимание (13.2) и (8.132), мы можем записать, что

$$G = u_r = \alpha_*^{-0.5} \varepsilon^{0.5} \left\{ 2R5^{-1} + \tanh \left\{ \pm 2\omega^{-1} \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*^{\circ}} \sin \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \cos \varphi \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \omega r + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa \chi^{-2} \alpha_*^{1.5 \circ 0.5} \operatorname{sech}^2 \left\{ \pm 2\omega^{-1} \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*^{\circ}} \sin \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \cos \varphi \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \omega r \right\} \right\} \right\}. \quad (13.14)$$

Мы принимали, что решение (13.12) должно быть исправлено только во фронте волны. Поэтому решение (13.14) отлично от (13.12) только в маленькой окрестности волнового фронта.

Эффекты нелинейности, вязкости и дисперсии на структуру фронта волны показаны на рис. 127. Пунктирная кривая 1 вычислена согласно решению (13.6), непрерывная кривая 2 принимает во внимание вязкость (решение (13.12)), кривая 3 вычислена, используя решение (13.14). Можно видеть, что вязкость может уменьшить крутизну фронта волны, в то время как дисперсия может увеличить амплитуду волны. Сильное различие между результатами линейных и нелинейных моделей очевидно из рис. 127.

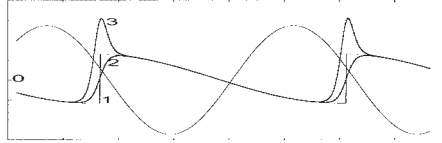


Рис. 127. Резонансные волны. Влияние нелинейности (разрывная кривая 1), плюс влияния трения и вязкости (кривая 2), плюс влияние дисперсии (кривая 3) на фронт резонансной периодической волны. Гладкая гармоническая кривая вычислена, используя линейное приближение при $R=0.087$.

Мы предполагали в этом разделе, что нелинейный эффект намного больше, чем влияние дисперсии и трения. Вязкостные и дисперсионные эффекты являются маленькими, однако, эффекты вязкости доминируют.

13.4. Структура катастрофических резонансных волн: эффект дисперсии

В разделе 13.4 показано, что слабое трение и слабая дисперсия не могут существенно изменить крутой фронт и профиль волн, сформированных квадратной нелинейностью. Однако когда глубина увеличивается, то, соответственно, растет влияние дисперсии и меняется профиль волны.

Здесь мы предполагаем, что нелинейные и дисперсионные эффекты имеют одинаковый порядок, причем они намного больше влияния трения. В этом случае уравнение (12.63) дает

$$\alpha_* \left(G + \frac{1}{2} B \alpha_*^{-1} \right)^2 - k \alpha_* G_{rr} = \cos^2 \frac{1}{2} \omega r, \quad (13.15)$$

а уравнение (8.117), которое следует из (13.15), примет вид:

$$(b + F)(\Phi^2 - 1) = \alpha_*^{0.5} \kappa (b + F)^{-0.5} \Phi_{rr} (b + F). \quad (13.16)$$

Запись последнего уравнения можно упростить:

$$\Phi_{rr} = q_0^{-1} (b + F)^{0.5} (\Phi^2 - 1). \quad (13.17)$$

Здесь $q_0^{-1} = \varepsilon^{0.5} \alpha_*^{-0.5} g^{-1}$ и $\sqrt{b+F} = \sqrt{\varepsilon} \cos \frac{1}{2} \omega r$ (13.1). Решение для (13.17)

ищем в виде периодических уединенных волн:

$$\Phi = [\hat{A} \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) + \hat{C}] \cos \frac{1}{2} \omega r. \quad (13.18)$$

Здесь $\hat{A}$ и $\hat{C}$ — постоянные и

$$\tau = \omega N r - \varphi. \quad (13.19)$$

Мы принимаем, что $N=1, 2, 3 \dots$ или $N=1/2, 1/3, 1/4$. Таким образом, низкочастотные и высокочастотные волны описываются выражением (13.18). Используя (13.18), находим, что

$$\begin{aligned} \Phi_{rr} = & 6\hat{A} \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) \tanh^2(\gamma \sin \tau) (: N \omega \cos \tau)^2 \cos\left(\frac{1}{2} \omega r\right) - \\ & - 2\hat{A} \operatorname{sech}^3(\gamma \sin \tau) \cosh(\gamma \sin \tau) (: N \omega \cos \tau)^2 \cos\left(\frac{1}{2} \omega r\right) - \\ & - 2\hat{A} \operatorname{sech}^3(\gamma \sin \tau) \sinh(\gamma \sin \tau) : N \omega \cos \tau \cos\left(\frac{1}{2} \omega r\right) \frac{1}{2_r} + \\ & + \omega \hat{A} \operatorname{sech}^3(\gamma \sin \tau) \sinh(: \sin \tau) : N \omega \cos \tau \sin\left(\frac{1}{2} \omega r\right) - \\ & - \left(\frac{1}{2} \omega r\right)^2 [\hat{A} \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) + \hat{C}] \cos\left(\frac{1}{2} \omega r\right). \end{aligned} \quad (13.20)$$

Далее учитываем равенство:

$$\tanh^2(\gamma \sin \tau) = 1 - \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau). \quad (13.21)$$

Подставляем (13.18) и (13.20) в (13.17). В результате, получим

$$\begin{aligned} & 4\hat{A} \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) (: N \omega \cos \tau)^2 \cos\left(\frac{1}{2} \omega r\right) - \\ & - 6\hat{A} \operatorname{sech}^4(\gamma \sin \tau) (: N \omega \cos \tau)^2 \cos\left(\frac{1}{2} \omega r\right) - \\ & - 2\hat{A} \operatorname{sech}^3(\gamma \sin \tau) \sinh(\gamma \sin \tau) : N \omega \cos \tau \cos\left(\frac{1}{2} \omega r\right) \frac{1}{2_r} + \\ & + \omega \hat{A} \operatorname{sech}^3(\gamma \sin \tau) \sinh(: \sin \tau) : N \omega \cos \tau \sin\left(\frac{1}{2} \omega r\right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{1}{2}\omega\right)^2 [\hat{A} \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) + \hat{C}] \cos\left(\frac{1}{2}\omega r\right) = \\
& = q_0^{-1} \cos\left(\frac{1}{2}\omega r\right) - q_0^{-1} \hat{A}^2 \operatorname{sech}^4(\gamma \sin \tau) \cos^3\left(\frac{1}{2}\omega r\right) - \\
& - 2q_0^{-1} \hat{A} \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) \hat{C} \cos^3\left(\frac{1}{2}\omega r\right) - q_0^{-1} \hat{C}^2 \cos^3\left(\frac{1}{2}\omega r\right). \quad (13.22)
\end{aligned}$$

В этом уравнении рассматриваем только члены, содержащие $\cos\left(\frac{1}{2}\omega r\right)$.

Тогда (13.22) дает следующие три равенства:

$$1. \ 6(\gamma N \omega \cos \tau)^2 = q_0^{-1} \hat{A} \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega r\right); \quad (13.23)$$

$$2. \ 4(\gamma N \omega \cos \tau)^2 - \left(\frac{1}{2}\omega\right)^2 = -2q_0^{-1} \hat{C} \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega r\right); \quad (13.24)$$

$$3. \ -\left(\frac{1}{2}\omega\right)^2 \hat{C} = q_0^{-1} - q_0^{-1} \hat{C}^2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega r\right). \quad (13.25)$$

Приближенное решение этих уравнений дает

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= 6q_0 \gamma^2 \omega^2 N^2, \quad \gamma = \pm \omega^{-1} N^{-1} \left(\frac{1}{16} \omega^2 - \frac{1}{2} q_0^{-1} \hat{C} \right)^{0.5}, \\
\hat{C}_{1,2} &= 0.5[0.5q_0 \omega^2 \pm (0.25q_0^2 \omega^4 + 8)^{0.5}]. \quad (13.26)
\end{aligned}$$

Мы напоминаем, что здесь $N=1, 2, 3, \dots$ или $N=1/2, 1/3, 1/4, \dots$. Таким образом, низкочастотные и высокочастотные волны описываются выражениями (13.18) и (13.26).

Гравитационные волны. Если $\frac{1}{3}h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1}$, то $\kappa = \alpha_*^{-1} \left(\frac{1}{3}h^2 - \sigma \rho^{-1} g^{-1} \right) C^{-2} \neq 0$ (12.22) и $q_0^{-1} = 0$. В этом случае, если $q_0 \neq 1$, мы приближенно имеем, что

$$\hat{C} \approx -1, \quad \gamma \approx \pm \omega^{-1} \sqrt{2q_0^{-1}} \quad \text{и} \quad \hat{A} \approx 3. \quad (13.27)$$

Теперь, используя (13.27), (13.18), (13.2), мы найдем следующее выражение

$$G = \alpha_*^{-0.5} \varepsilon^{0.5} \left\{ 2R5^{-1} + [3 \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) - 1] \cos^2 \frac{1}{2} \omega r \right\}. \quad (13.28)$$

Здесь

$$\tau = \omega N r - \arcsin R. \quad (13.29)$$

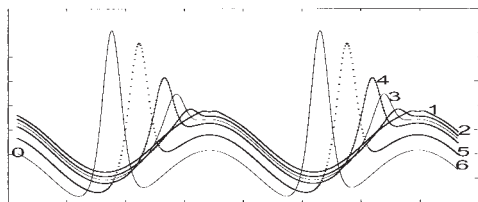


Рис. 128. Резонансные волны (13.28). Эффект дисперсии на трансрезонансную эволюцию поверхностной волны, рассчитанную для $N=0.5$ и $\varphi = \arcsin R$ [56, 57].

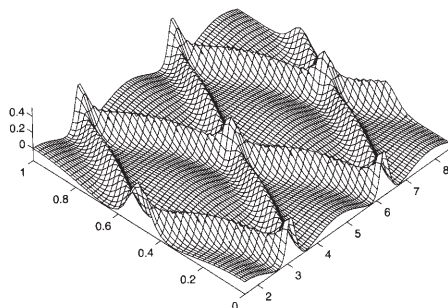


Рис. 129. Эффект взаимодействия нелинейности и дисперсии. Динамика поверхностных волн при точном резонансе [51].

Выражения (13.28) и (13.29) позволяют нам изучить влияние рассматриваемых эффектов на эволюцию волны.

Влияние нелинейности и дисперсии на профиль волны показано на рис. 128. Принимается, что $\gamma = 5$ и $R = -1.1$ (кривая 1), -0.98 (2), -0.9 (3), -0.8 (4), -0.5 (5) и -0.1 (6). Видно, что дисперсия порождает два гребня у волны. Расстояние между гребнями определяется трансрезонансным параметром R . Если $R=0$, то возникают солитонно-подобные волны. Таким образом, решение (13.28) качественно описывает некоторые важные особенности трансрезонансного развития поверхностных волн на воде. Очевидно, периодические удлинённые волны могут возникать, если нелинейные и дисперсионные эффекты приблизительно равны. Далеко от точного резонанса, где нелинейный эффект становится маленьким, мы имеем гармоническую волну.

Интересно, что профили рис. 128 описывают не только рассматриваемые длинные океанские волны, но и резонансные волны, возбуждаемые в удлинённом прямоугольном бассейне. Ре-

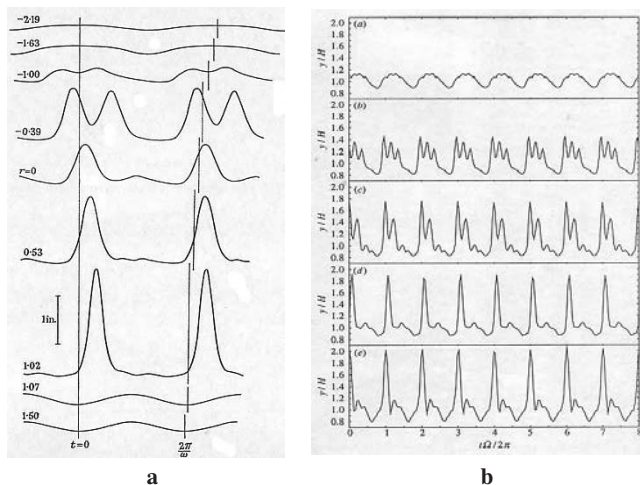


Рис. 130. Эффект дисперсии. Эволюция и катастрофическое усиление поверхностных волн, проходящих резонанс. Кривые **a** взяты из [46], кривые **b** приведены в [53].

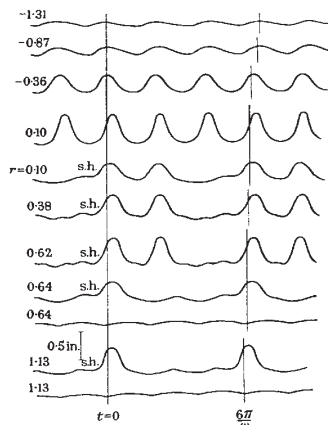


Рис. 131. Эффекты нелинейности и дисперсии. Эволюция поверхностных волн, проходящих резонанс. Толщина слоя воды $h \approx 25$ см, возбуждающая амплитуда $l \approx 0.075$ см, r — трансрезонансный параметр. Кривые, обозначенные s.h. определяют низкочастотные волны [46].

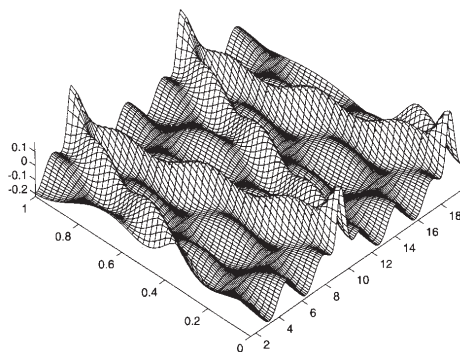
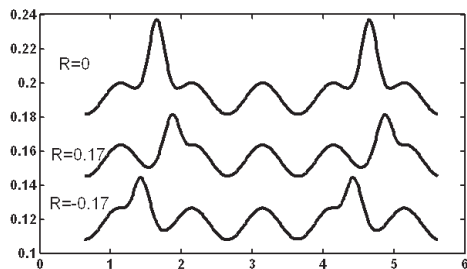


Рис. 132. Резонансные низкочастотные волны (13.28), (13.29). Эффект дисперсии на трансрезонансную эволюцию поверхностной волны, рассчитанную для $N = 1/3$ и $\varphi = \arcsin R$. Кривые слева рассчитаны для различных R . Правая картинка показывает динамику волн в контейнере для точного резонанса [51].

зультат расчета этих волн для случая точного резонанса представлен на рис. 129, который соответствует кривой $r = 0$ на рис. 130.

Кривые рис. 128 и 129 сильно отличаются от почти опрокидывающихся волн, показанных на рис. 123. Напомним, что крутые фронты возникают, если дисперсия мала (толщина водного слоя мала) и амплитуда вынуждающих колебаний велика, что соответствует рис. 124.

Резонансные волны, возбуждаемые в удлиненном прямоугольном бассейне, показаны на рис. 130.

Когда глубина растёт, то растёт и влияние дисперсии. Если при этом уменьшается и вынуждающая амплитуда (нелинейность), то может возникнуть равенство нелинейных и дисперсионных эффектов. Конечно, влияние нелинейности зависит также и от близости к точному резонансу. Наложение перечисленных обстоятельств может привести к появлению в системе солитоноподобных волн. В частности, в экспериментах [46] условия появления периодических солитонов реализовывались в точном резонансе при $h \approx 5$ см и вынуждающей амплитуде $l \approx 0.075$ см (рис. 130).

Заметим, что условие устойчивости солитонов сохранялось в этих экспериментах в некотором диапазоне изменения параметров. Например, периодические уединенные волны возникали также при $h \approx 5$ см, $l \approx 0.155$ см.

Таким образом, согласно расчетам при резонансном возбуждении достаточно глубокого слоя жидкости на его поверхности могут возникать двухвершинные волны (рис. 128), что, в основном, достаточно точно согласуется с экспериментом (рис. 130). Отметим, что в эксперименте [53] возникали также трехвершинные волны (рис. 130). Однако на их моделировании мы здесь останавливаться не будем. Они будут кратко рассмотрены в 15.4 и 15.7.3. Однако при некоторых частотах возбуждения волны теряли устойчивость и в бассейне возникали низкочастотные волны (рис. 131). Моделируя эти волны, мы приняли в (13.28), что $N = 1/3$.

Результаты вычислений представлены на рис. 132. Видно, что кривая $R = -0.17$ описывает качественно форму волн $r = 0.64$ и 1.13 на рис. 131.

Капиллярные волны. Если $\sigma \rho^{-1} g^{-1} \frac{1}{3} h^2$, то $9 > 0$. В этом случае мы имеем следующее приближенное выражение для капиллярной ряби:

$$G = \alpha_*^{-0.5} \varepsilon^{0.5} \left\{ 2R5^{-1} - [3\operatorname{sech}^2(\cdot \sin \tau) - 1] \cos^2 \frac{1}{2} \omega r_j^+ \right\}. \quad (13.30)$$

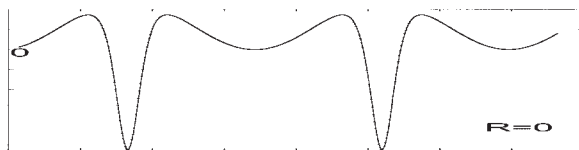


Рис. 133. Отрицательная (депрессионная) капиллярная волна, рассчитанная согласно (13.17) для $R=0$, $N=0.5$ и $\varphi = \arcsin R$.

Капиллярная волна, гребень которой направлен вглубь жидкости, показана на рис. 133. Подобные волны достаточно часто получают в расчетах и наблюдают в экспериментах. В частности, они возбуждались, когда импульс давления двигался по поверхности воды с резонансной скоростью [38].

Заключение — основной результат главы. Расчеты и эксперименты показывают, что в области резонансов усиление волн может существенно превосходить простое удвоение высоты. Мы с полным правом можем назвать подобное резонансное усиление катастрофическим. В следующей главе мы проиллюстрируем это усиление на примерах локального резонанса ветровых волн.

14. Трансрезонансная эволюция ветровых вынужденных длинных волн

Вот охватывает ветер стаи волн объятьем крепким и бросает их с размаху в дикой злобе на утесы, разбивая в пыль и брызги изумрудные громады.

Максим Горький

Как отмечалось, причины возникновения катастрофических волн могут быть самыми разнообразными. Имеются данные, что они часто возникают под действием ветра. В частности, Дарвин писал о катастрофической волне, возникшей при скорости ветра около 27–28 м/сек (см. раздел 3.5). Не исключено, что резонансное усиление волны может быть также связано с быстрым изменением глубины океана и/или действием порыва ветра.

В морях и океанах имеются участки быстрого изменения глубины. Это, в первую очередь, прибрежные области. Однако и на просторах океана имеются зоны быстрого поднятия, где дно почти достигает поверхности. Над подобными подводными топографиями могут возникать опасные для судов катастрофические волны. В частности, область Бермудского треугольника выделяется количеством погибших там судов. Интересно отметить, что рельеф дна в Бермудском треугольнике существенно отличается от рельефа дна в других местах океана. Там обнаружены следующие близкорасположенные формы рельефа морского дна: абиссальные равнины (35%), шельфы с мелководными банками (25%), материковый склон (18%), краевые и срединные плато (15%), глубоководные желоба (5%), глубокие проливы (2%). Здесь указаны относительные площади образований. В восточной и северной части треугольника расположены несколько подводных гор, представляющие собой конусы более или менее правильной формы. Они возвышаются над плоскостью дна на 150–200 м и выше. Некоторые подводные горы прячут вершины глубоко под водой, другие выступают над поверхностью в виде островов. В этом же районе располагается глубоководный желоб Пуэрто-Рико глубиной 8742 м и длиной 1550 км. Это одновременно и максимальная глубина Атлантического океана. Но он расположен в непосредственной близости к Багамским банкам, в районе которых глубина составляет в среднем всего лишь несколько метров.

Подобные сложные рельефы дна вместе с ветром, течениями, внутренними волнами и наличием вертикальных океанических конвекционных структур (температуры, солености, плотности, течений) могут способствовать образованию резонансных зон, в которых происходит резонансное катастрофическое усиление поверхностных волн [58]. Локальное усиление влияния ветра и по-

верхностного трения, которые согласно подразделу 12.4.1 определяют часто усиление волн, также может характеризовать резонансную полосу.

Двухслойные резонансные полосы. В различных районах Мирового океана встречаются ступенчатые неоднородности, образованные чередованием по глубине относительно толстых и квазиоднородных слоев воды, отличающихся по какой-либо одной или нескольким характеристикам. Они часто фиксировались на глубинах до 300 м. Вертикальные размеры этих неоднородностей меняются от нескольких метров до сотен, а их горизонтальные размеры находятся в диапазоне от 100 до 10000 метров. Время существования неоднородностей может доходить до месяцев. По-видимому, определенный вклад в формирование таких структур вносят внутренние волны в процессе их нелинейной эволюции и вертикальные течения. Мы не исключаем, что возникновение резонансных полос в открытом океане может быть связано с поверхностными неоднородностями [58]. Известный специалист Ламб в своей фундаментальной книге «Гидродинамика» пишет: «Вблизи устья некоторых норвежских фиордов находится слой пресной воды над соленой водой... на этой пограничной поверхности легко развиваются волны значительной высоты. Этой причиной объясняется ненормальное сопротивление, которое иногда испытывают суда в этих водах». Присутствие верхней жидкости уменьшает скорость распространения волн, причем уменьшение скорости определяется плотностями жидкостей и не зависит от толщины слоев. Если судно (или волна) движется по поверхности такой двухслойной системы со скоростью, характерной для системы (с резонансной скоростью), то имеет место усиление волн. Сопротивление движению судна усиливается. Эффект двухслойной жидкости, так называемая «мертвая вода», описан Плинием Старшим в начале нашей эры и был хорошо известен викингам. Один из их выдающихся потомков, Фритьоф Нансен, пишет: «...мы почти не двигались с места благодаря мертвой воде; судно точно увлекало за собой весь поверхностный слой воды. Мертвая вода образует как бы вал или даже волны больших или меньших размеров...». Слой верхней воды увлекается и скользит по соленой воде как по твердой подкладке. Естественно, что возникающие при этом волны, даже в случае глубокого океана, могут быть описаны развитой в книге теорией длинных волн.

Нансен обратил внимание на рассматриваемый эффект известного специалиста Бьеркнеса. Специальные опыты показали, что если скорость судна ниже или выше резонансной скорости, то указанный эффект не возникает. Естественно, что он ограничен областью существования двухслойной, резонансной системы. Такие полосы поверхностной пресной воды возникают вблизи устьев

больших рек, вблизи ледовых полей, в фиордах. Естественно предположить, что подобный эффект может быть в местах быстрого подъема глубинных, высокосолёных и холодных океанических вод на поверхность. Это может иметь место в зонах взаимодействия океанских течений (например, течение Игольный мыс), в местах быстрого изменения донного рельефа (например, Бермудский треугольник), в областях встреч теплых и холодных вод (например, мыс Горн или Северное море). Такие двухслойные системы неустойчивы, но время их существования может быть вполне достаточным для формирования катастрофической волны. Она же способствует развитию неустойчивости полосы при значительном усилении и при опрокидывании волны.

Возникновение резонансного верхнего слоя может быть связано с размножением и существованием там мелких морских животных и рыб. В частности, тех, которые служат пищей для китов. Они могут образовывать километровые поля. Такие поля обычно формируются в местах встречи холодных и теплых океанских вод, т.е. в местах, где преимущественно отмечаются океанские катастрофические волны.

Аналогия с цунами. Согласно журналу *Природа* (Luo, J.-J., 2011. Ocean dynamics not required. *Nature*, **477**, 544–546) на некоторых участках океана термоклинная поверхность, разделяющая теплую, легкую, верхнюю часть воды, от глубинной, холодной и тяжелой, располагается совсем близко от свободной поверхности — на глубине 50 м. В принципе, термоклинная поверхность может подниматься много выше в местах ее встречи с океанскими течениями или участками вертикальной конвекции. В результате возникают участки подъема и изменения (уменьшения) толщины прогретой теплой воды. Видимо, такие участки не могут долго существовать. Однако какое-то время воздействие этих участков на поверхностные и внутренние волны может быть в какой-то мере аналогично воздействию на волны пологого прибрежного дна. Именно последнее приводит к возникновению цунами. Почему бы не предположить возможность подобного усиления океанских волн в поднимающихся слоях теплой воды переменной толщины, ограниченных снизу термоклинами?

Мы рассматриваем в этой главе волны и резонансные полосы, связанные с изменением глубины, однако читатель может, с определенным основанием, полагать, что аналогичные волны и полосы могут возникать из-за термоклин. Аналогия для нас тем более важна, что в обоих случаях справедлива теория длинных волн. Конечно, интересно было бы увидеть в безграничном океане эволюцию волн, подобную показанной для цунами (раздел 3.4) или на рис. 134–142!

Отметим также, что развитие резонансных полос может зависеть от формы и амплитуды самой волны. Возможность резонансного усиления и профили возникающих волн рассматриваются в главах 14–16.

14.1. Моделирование трансрезонансной эволюции прибрежных волн

Простейшая резонансная полоса обычно существует в прибрежной зоне. Используя развитую теорию, рассмотрим эволюцию там волн. Ограничимся учетом квадратичной нелинейности. Дисперсию не учитываем. Пусть скорость ветра равна $\sqrt{gh_k}$. Таким образом, в точке, где $h = h_k$ скорости ветра и волн становятся равными, и имеет место резонанс. Нелинейный профиль волны описывался выражением (13.6) и рассчитывался согласно формуле (13.5):

$$\eta = hC^{-1}G. \quad (14.1)$$

Результаты вычислений для различных форм дна представлены на рис. 134–136. Каждый рисунок содержит четыре картины. Верхняя (первая) картина показывает форму дна и результаты вычислений для некоторого начального момента $t=0$. Вторая картина показывает влияние на профиль волны маленького возмущения формы дна. Следующие две картины показывают динамику волны и рассчитаны для некоторых моментов $t=1$ и $t=2$ и невозмущенного дна.

Тонкие линии вычислены согласно линейному решению. У них есть особенность в точке точного резонанса, где $h = h_k = 3$ м. Разрывные (квадратично-нелинейные) трансрезонансные волны (толстые линии) вычислены, используя (13.6) и (14.1), в пределах резонансной полосы, где $R^2 \leq 1$. За пределами этой полосы нелинейные волны вычислены согласно слабо-нелинейной теории (12.59). Они также нанесены на

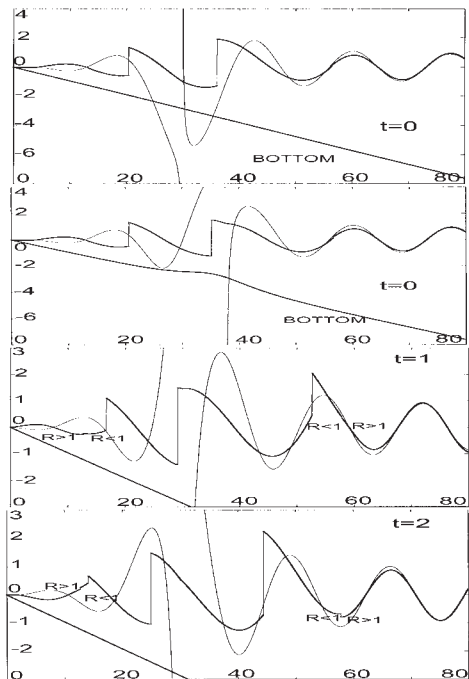


Рис. 134. Трансрезонансные прибрежные волны. Развитие волн над линейно изменяющейся глубиной. Резонансная полоса, где $R^2 \leq 1$, показана на картинах для $t=1$ и $t=2$.

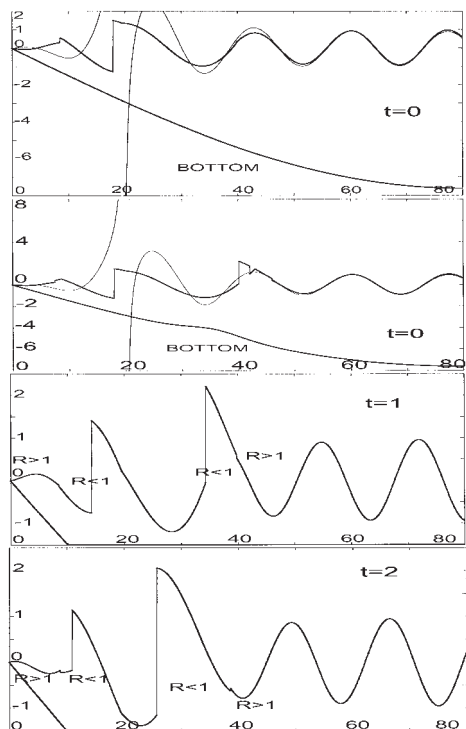


Рис. 135. Трансрезонансные прибрежные волны. Развитие волн над дном, имеющим синусоидальный профиль. Резонансная полоса, где $R^2 \approx 1$, показана на картинах для $t = 1$ и $t = 2$.

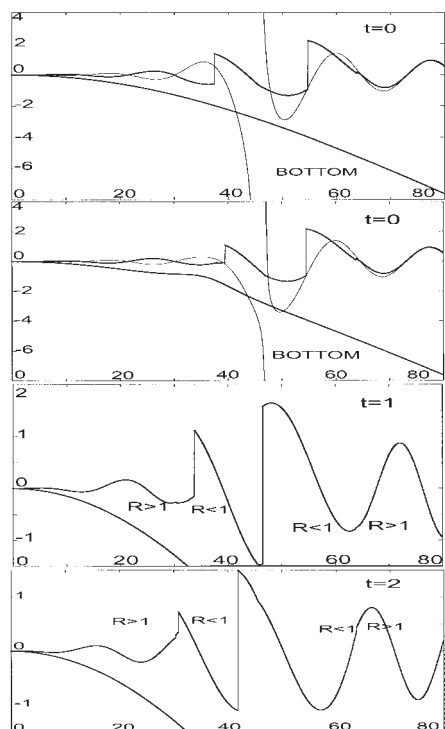


Рис. 136. Трансрезонансные прибрежные волны. Развитие волн над дном, имеющим косинусоидальный профиль. Резонансная полоса, где $R^2 \approx 1$, показана на картинах для $t = 1$ и $t = 2$.

рисунки толстыми линиями. Можно видеть на рисунках точки $R = 1$, где решение (13.6) для трансрезонансных волн преобразовывается в нелинейное решение (12.59), справедливое за пределами резонансной полосы.

Согласно вычислениям, нелинейная деформация первоначально синусоидальных волн увеличивается с уменьшением глубины. В результате кноидальные волны могут возникнуть около границы резонансной полосы. Затем возникает волна, подобная боре. Квадратично-нелинейная теория описывает фронт боры как разрыв профиля волны.

Из рис. 134–136 следует, что нелинейное решение (13.6) качественно моделирует развитие периодических волн около береговой линии, где $R \neq 1$. Линейное решение действительно, если $R \neq 1$. Таким образом, прибрежная зона для волн является резонансной полосой, где $R \neq 1$. Там возвышение каждой

точки профиля волны — функция местного значения трансрезонансного параметра R . Таким образом, *прибрежные нелинейные волны — хороший пример трансрезонансных волн.*

Мы напоминаем, что прибрежные волны опрокидываются после формирования очень крутого фронта. Поэтому, во время движения волны, такой фронт может существовать только в течение очень короткого промежутка времени. Затем фронт опрокидывается и возникает фронт, состоящий из смеси воздуха и воды — фронт волны боры. Этот фронт тоже может иметь очень крутой профиль. Таким образом, профили на рис. 134–136 качественно описывают эволюцию слабо-нелинейных волн в кноидальные, разрывные и боры.

14.2. Моделирование «Новогодней» волны

Напомним, что используемая при расчетах этой главы теория предполагает наличие в действии ветра известной гармонической составляющей и выполнение волнового резонанса.

Рассмотрим очень длинные волны, распространяющиеся над подводной топографией. Пусть скорость ветра ≈ 28 м/сек. Для такого ветра критическая (резонансная) глубина h_k приблизительно 80 м. Глубина над подводной топографией изменяется согласно закону $h = 100 + 200[1 - \cos(-5/3 + 0.55a/L)]$ м, где $L = 3$ км. Изменение глубины задано таким образом, что над топографией скорости ветра и волн становятся почти равными. Обратим внимание читателя на то, что принятая скорость ветра соответствует описанию Дарвина (см. раздел 3.5), а критическая глубина соответствует приближенно глубине моря у платформы «Дропнер» (разделы 3.5 и 11.2).

Сначала рассмотрим случай, когда влияния дисперсии нет. Трансрезонансные профили волн рассчитываются, используя выражение (13.6). Вне резонансной полосы используется линейная теория. Результаты вычислений представлены на рис. 137 для трех моментов времени. Измерение топографии и изменение глубины показаны для момента времени $t = 0$. Сильное увеличение высоты волн имеется в пределах резонансной полосы. Около резонансной полосы высота волны до 10–12 м. Максимальная, резонансная, высота достигает 26–28 м. Усиление более, чем в два раза. Увеличение максимально в точке, где трансрезонансный параметр R является наименьшим.

Эффект дисперсии иллюстрируется рис. 138. Решение (13.28) используется в пределах резонансной полосы, где $R^2 \neq 1$.

Из рис. 137, 138 видно, что катастрофическое усиление волн может иметь место, когда волны проходят над подводной топографией. Далеко от топографии высота волн составляет приблизительно 8–9 м. На глубине около 100 м

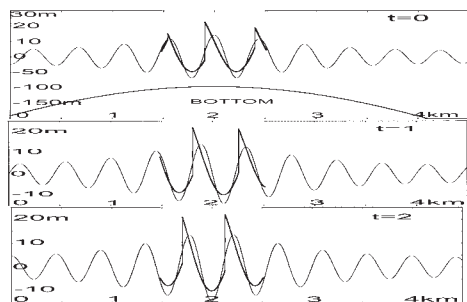


Рис. 137. Резонансная полоса и трансрезонансные волны. Толстые линии получены согласно нелинейному решению (13.6), тонкие линии соответствуют линейному решению. Толстые линии лежат приблизительно в пределах резонансной полосы.

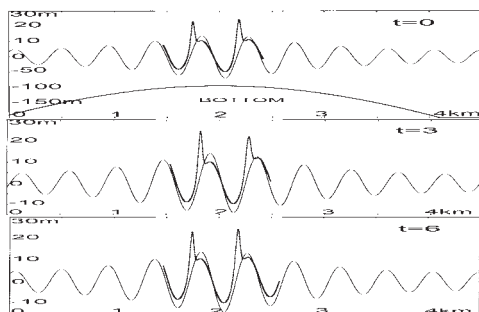


Рис. 138. Резонансная полоса и трансрезонансные дисперсионные волны. Толстые линии получены согласно нелинейному решению (13.28), тонкие линии соответствуют линейному решению. Толстые линии лежат приблизительно в пределах резонансной полосы.

высота волн возрастает до 10–12 м, в то время как в точке максимального резонанса высота достигает 25–27 м. В пределах резонансной полосы изменяется сильно и профиль волн. В случае очень длинных волн (очень маленькая дисперсия), гармонические волны внутри резонансной полосы могут преобразоваться в волны, подобные боре. В то же самое время, если влияние дисперсии соответствует вкладу нелинейности, то в пределах резонансной полосы гармонические волны преобразовываются в огромные волны, подобные представленным на рис. 101–105.

Мы подчеркиваем, что волны усиливаются в пределах резонансной полосы. Амплитуда каждой точки профиля волны зависит от местного, текущего значения трансрезонансного параметра R . Поэтому эти трансрезонансные волны (показанные на рис. 137 и 138) отличаются от резонансных волн, вычисленных для постоянных значений R (см. рис. 123 и 128).

Таким образом, возникновение гармонической составляющей в давлении ветра, совпадение направления ветра с направлением движения волны и локальный резонанс могут усилить океаническую волну до катастрофических величин. Подобным образом усиленную волну, возможно, встретил *Бигль* у берегов южной оконечности Южной Америки, около мыса Горн.

14.3. Влияние кубических нелинейных эффектов на трансрезонансную эволюцию длинных волн

Здесь мы продолжим исследование влияния нелинейности на формирование гигантских ветровых волн. Дополним наш анализ учетом влияния кубической нелинейности. Влиянием дисперсии, вязкости и трения будем пренебрегать. В этом случае (12.27) дает

$$BG + \alpha_* G^2 + \beta_* G^3 = \sin \omega s. \quad (14.2)$$

Здесь $G = u_r$ и $s = t + aC^{-1}$. Мы получили уравнение, совпадающее по внешнему виду с (8.107), если там $F = \bar{C} = \chi = b_1 = k = 0$ и $F = \varepsilon \sin \omega s$. Коэффициенты в (14.2) определяются выражениями (12.22). Пусть $\alpha = 0$, т.е. мы не будем учитывать влияние ветра на коэффициент B . Примем далее, что $\eta = -hu_a$. Тогда (14.2) записывается в виде:

$$\eta^3 - 0.25(g^{-1}C^2 + 2h)\eta^2 + 0.5h^2(1 - g^{-1}h^{-1}C^2)\eta - 0.5\varepsilon g^{-1}Ch^2 \sin \omega s = 0. \quad (14.3)$$

Кубически-нелинейное алгебраическое уравнение (14.3) и его аналитические решения используются далее, чтобы описать качественно сложное развитие гармонических длинных волн в опрокидывающиеся волны и брызговые купола на поверхности воды.

Решение линеаризованного уравнения (14.3) имеет вид:

$$\eta = \varepsilon h[(ghC^{-2} - 1)C]^{-1} \sin \omega s. \quad (14.4)$$

Рассматривая далее (14.3), мы предполагаем, что коэффициент $(1 - g^{-1}h^{-1}C^2)$ может быть приближенно представлен как $1 - \text{sech}[\alpha(h - h_k)]$. Здесь ; — константа. Тогда уравнение (14.3) дает

$$\eta^3 - 0.75h\eta^2 + 0.5h^2[1 - \text{sech}[\alpha(h - h_k)]]\eta - 0.5\varepsilon g^{-1}Ch^2 \sin \omega s = 0. \quad (14.5)$$

Следуя (10.16), мы исследовали поведение трех независимых решений этого уравнения. Используя эти решения, можно построить многозначные (складчатые, катастрофические) профили поверхности воды в окрестности глубины $h = h_k$ (см. раздел 20.6). Эти профили показывают, что опрокидывание волн и последующее возникновение брызговых куполов может быть, иногда, связано с появлением кубически-нелинейных эффектов внутри резонансной полосы.

Трансрезонансное развитие прибрежных волн. Чтобы критическая глубина составила 3 м, примем, что скорость ветра $\sqrt{30}$ м/сек. Результаты вычислений представлены на рис. 139 и 140 для нескольких моментов времени, определяющих период колебания волн. Толстые линии описывают трансрезонансное развитие кубически-нелинейных волн. Тонкая колеблющаяся линия

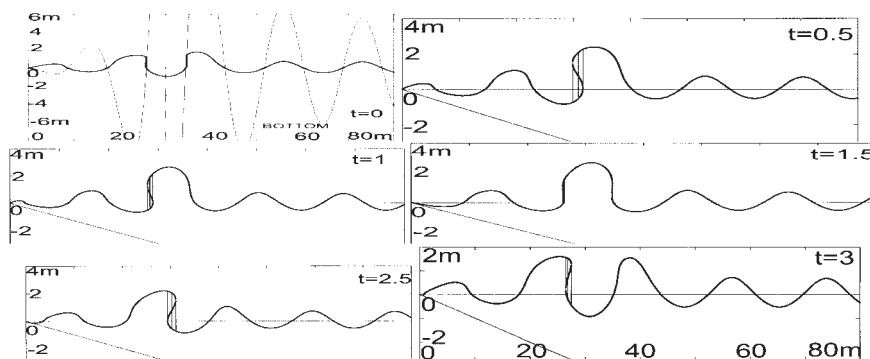


Рис. 139. Кубически-нелинейный и резонансный эффекты в прибрежной зоне ($\varepsilon = 6$ м/сек).

на рис. 139 ($t=0$) представляет линейную волну, в то время как вертикальная прерывистая линия показывает точку, где глубина $h = h_k$. Вертикальные линии на фронте волны разделяют участки профиля, определяемые различными решениями уравнения (14.5).

Рис. 139 ($\varepsilon = 6$ м/сек) демонстрирует появление около берега опрокидывающихся волн.

Рис. 140 ($\varepsilon = 2$ м/сек) показывает трансрезонансное развитие гармонических волн, сопровождаемое опрокидыванием фронта волны и возникновением брызгового купола над поверхностью воды. Конечно, представленные результаты имеют качественный характер. Однако они могут интерпретироваться как свидетельство того, что опрокидывание волн в прибрежной зоне — следствие топографического резонанса. Интересно, что волны на рис. 139 и 140 имеют вдали от резонансной полосы сильно отличающиеся амплитуды. Однако в резонансе их амплитуды почти сравниваются. Это следствие высокой нелиней-

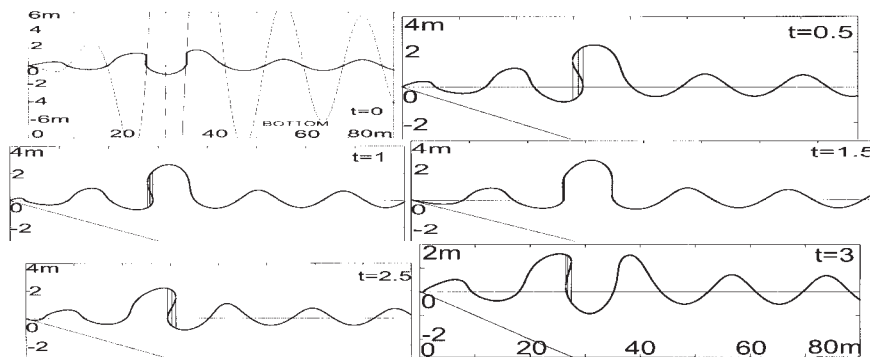


Рис. 140. Кубически-нелинейный и резонансный эффекты в прибрежной зоне ($\varepsilon = 2$ м/сек).

ности процесса, из-за которой влияние амплитуды начального возмущения становится не таким важным, как в случаях линейных процессов. В частности, поэтому ошибка в интенсивности подводного землетрясения в несколько раз может практически не сказаться на расчетной амплитуде возникшего у берега цунами.

Рис. 139 и 140 демонстрируют сильно-нелинейное поведение волн, проходящих резонансную полосу. В рассматриваемом случае ширина резонансной полосы сопоставима с длиной волны, и даже, с фронтом волны, поэтому наклон фронта очень сильно меняется во время прохождения волной резонанса. В целом, поведение волны относительно критической точки (точки точного резонанса) в течение периода колебаний напоминает колебания маятника относительно точки подвеса. Такой результат расчетов связан с узостью резонансной полосы.

Согласно представленной теории, сильное прибрежное увеличение вызванных ветром волн может быть определено топографическим (прибрежным) резонансом. Линейная теория предсказывает, что это увеличение неограниченно. Однако, когда амплитуда становится достаточно большой, начинает проявлять себя квадратная нелинейность. В результате амплитуда ограничивается, но она может увеличиваться и далее. Если амплитуда увеличивается до некоторого критического уровня, то кубически-нелинейный эффект вступает в игру.

Рис. 139 и 140 качественно описывают начальное развитие процесса опрокидывания фронта волны и объясняют возникновение бурунов и струй на водной поверхности кубически-нелинейными и резонансными эффектами. Видно, что волны могут опрокидываться в двух различных направлениях: вперед — к побережью и назад — к открытой воде. В целом, этот результат соответствует данным разделов 9.1 и 9.3.

Трансрезонансное развитие волны над подводной топографией. Рис. 141 показывает некоторые результаты вычислений для

$$h = 25 + 200[1 + \cos(5 / 4.5 + 0.55 a / L)], \text{ где } L = 3 \text{ км.}$$

Рис. 141 демонстрирует случай, когда ширина резонансной полосы сопоставима с длиной волны. Из-за локализованного резонанса фронты волны начинают опрокидываться. Над вершиной топографии могут возникать периодические выбросы смеси воздуха-вода.

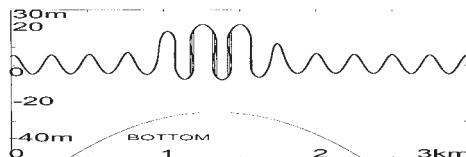


Рис 141 Топографический резонанс и трансрезонансные волны, возникающие при прохождении волны над подводной возвышенностью.

14.4. Трансрезонансные катастрофические длинные волны, возбуждаемые порывом ветра

Вызванное ветром действие на водную поверхность задается как $\varepsilon \operatorname{sech}^2 \omega s$, где $s = t + C^{-1}a$ и $C = (gh_k)^{0.5}$. Используется кубически-нелинейная теория. Следуя разделу 14.3 и используя уравнение (14.5), мы записываем уравнение для кубически-нелинейной вызванной ветром уединенной волны так:

$$\eta^3 - 0.75h\eta^2 + 0.5h^2 \operatorname{sech}[(h - h_k)]\eta - 0.5g^{-1}Ch^2 \operatorname{sech}^2 \omega s = 0. \quad (14.6)$$

Линеаризованное уравнение (14.6) имеет следующее решение:

$$\eta = \varepsilon h [(ghC^{-2} - 1)C]^{-1} \operatorname{sech}^2 \omega s. \quad (14.7)$$

Используя уравнение (14.6), можно изучить влияние различных обстоятельств на трансрезонансное развитие вызванных ветром волн. Здесь мы изучаем влияние глубины. Примем, что глубина изменяется согласно закону $h = \bar{h} + \hat{h}[(ghC^{-2} - 1)C]^{-1} \operatorname{sech}^2 \omega s$, где $\hat{h} = 200$ м, $L = 3$ км. Скорость волны $\sqrt{250}$ м/сек, поэтому точный резонанс ветра-волны мог иметь место, если $\bar{h} = 25$ м. Результаты вычислений для различных $\bar{h}$ ($\hat{h} = 27.5, 30$, и 35 м) представлены на рис. 142.

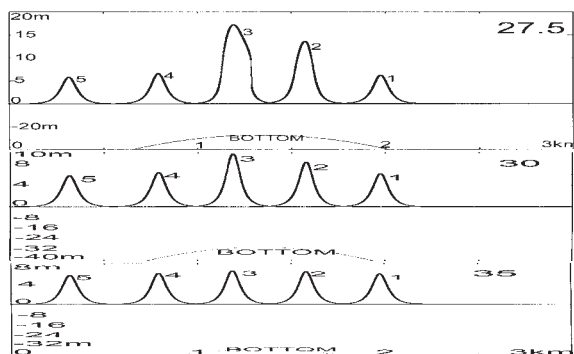


Рис. 142. Эффект глубины на резонанс ветра-волны. Кривые 1, 2, 3, 4, и 5 показывают местоположение уединенной волны для 5 различных моментов времени. Картины, определяемые цифрами 27.5, 30 и 35, вычислены для следующих различных $\bar{h}$ ($\hat{h} = 27.5, 30$ и 35 м).

Для $\hat{h} = 35$ м уединенная волна проходит подводную топографию фактически без какого-либо изменения амплитуды и профиля. В случае $\bar{h} = 30$ м происходит резонансное увеличение волны. Катастрофическое увеличение, сопровождаемое сильным изменением профиля волны, происходит, если $\bar{h} = 27.5$ м.

Мы напоминаем, что уравнение (14.6) имеет три решения. Мы используем только одно из них, чтобы описать волну на рис. 142. Очень близко к точному резонансу начинается очень сильное изменение профиля волны, и возникают многозначные варианты решения. Мы здесь не учитываем это. Эти решения были изучены в [57]. Примеры этих волн даны в разделе 13.3. Они будут изучаться также в части V книги.

Таким образом, экстремальные океанские волны могут возникать вследствие резонанса ветер-волна над подводной топографией. При этом над топографией меняется скорость волны. Аналогичное усиление имеет место, если скорость ветра меняется так, что она равняется в некоторой точке или в некоторый момент времени скорости волн. При этом также имеет место резонанс и возможен катастрофический рост волн. Катастрофические волны после их появления могут распространяться на достаточно большие расстояния до их обрушения из-за неустойчивости.

Заключительное замечание. Мы получили в главе ряд решений, описывающих процесс резонансного возбуждения катастрофических волн гармонической составляющей ветра. Эти решения учитывают также влияние течения воды. Проведены расчеты, иллюстрирующие теорию. При этом влияние течения не изучалось. Заинтересованный читатель может сделать это самостоятельно.

15. Самовозбуждение катастрофических длинных волн

Ваш мир, — хоть он и блещет красотой, —
Но коль угодно вам, слепою и я такой.

Вольтер

Нравится им теория или нет — *неважно*.
Важно другое — дает ли теория предсказания, которые согласуются с экспериментом.

Ричард Фейнман

Мы рассмотрели в главах 13 и 14 случай, когда ветер имеет гармоническую составляющую, которая предполагается известной. Теперь мы изучим возможность возбуждения катастрофических волн тогда, когда ветра нет, или в нем не содержится гармонической составляющей. Как показано в главе 12, последние два варианта сводятся к решению уравнения (12.81) и они отличаются только значениями коэффициентов этого уравнения. Таким образом, результаты главы будут справедливы для обоих вариантов. Это важно запомнить, потому что в самом тексте главы мы это специально упоминать не будем.

Следуя разделам 8.4.1 и 12.4.4, мы ищем выражение для катастрофической волны в виде суммы волн, бегущих в одном направлении:

$$u = A(a)J(r) + \bar{J}(r). \quad (15.1)$$

Здесь, как и ранее, $J(r)$ — первичная волна, определяемая волнением океана вдали от резонансной полосы. Эта волна задается выражением (12.80). Нелинейная составляющая волны $\bar{J}(r)$ (15.1) определяет усиление (эволюцию) первичной волны при прохождении ею резонансной полосы. Наша задача найти эту составляющую.

Обычно катастрофическая волна описывается как волна огромной высоты с крутым фронтом. Перед ней движется часто глубокая впадина — «дыра в море». По внешнему виду такие волны делятся на три основных типа: «белая стена», «одинокая волна», «три сестры» (группа из трех волн). В последующих разделах этой главы, используя результаты раздела 8.6, мы рассмотрим эти волны.

15.1. Моделирование катастрофической волны. Эффект нелинейности

В этом разделе рассматриваются волны, подобные ударным волнам, которые возникают в столбе газа, возбуждаемого с частотой первого нелинейного резонанса [49].

Чтобы упростить анализ, мы будем использовать квадратично-нелинейную модель и примем, что $(1 + 2ghC^{-2})AC^{-1}(\bar{J}_r J_r) \approx 0$. В этом случае уравнение (12.81) имеет следующий вид:

$$\alpha_* \left(G + \frac{1}{2} B \alpha_*^{-1} \right)^2 + \chi G_r - k \alpha_* G_{rr} - \cos^2 \frac{1}{2} \omega r = 0. \quad (15.2)$$

Здесь $G = \bar{J}_r$, и мы приняли, что $b_1 = 0$. Таким образом, мы получили уравнение, детально рассмотренное в разделе 8.6 и главе 13. Решение этого уравнения записано в виде (13.2). Используя (13.2), (12.80) и (12.82), мы находим

$$(u_a)_\mp = -C^{-1} \sqrt{\varepsilon} \left(\mp A \sin \frac{1}{2} \omega r - 2R5^{-1} - \Phi \cos \frac{1}{2} \omega r \right). \quad (15.3)$$

Здесь $\sqrt{\varepsilon}$ — амплитуда. Функция Φ в (15.3) будет определена ниже, аналогично тому, как это делалось ранее.

Теперь мы подчеркнем, что согласно исследованию, выполненному в начале раздела 8.6, составляющая G и инициирующая (начальная) волна должны иметь в окрестности резонанса сдвиг фазы относительно друг друга. Пусть в точном резонансе этот сдвиг равен $5 > 2$. Учтем это. Тогда выражение (15.3) примет вид:

$$u_a = -C^{-1} \sqrt{\varepsilon} \left(A \cos \frac{1}{2} \omega r + 2R5^{-1} + \Phi \cos \frac{1}{2} \omega r \right). \quad (15.4)$$

Таким образом, усиление в резонансной полосе гармонической волны (начальная волна), проходящей из океана, определяется выражениями (15.3) или (15.4).

Как было показано в главе 13, записанное решение описывает волны, имеющие очень крутой фронт или напоминающие солитон. Далее в этом разделе мы рассматриваем волны, профиль которых имеет участки очень быстрого изменения. В этом случае

$$\Phi = \pm 1 \quad (15.5)$$

и (15.4) дает

$$(u_a)_\pm = -C^{-1} \sqrt{\varepsilon} \left(A \cos \frac{1}{2} \omega r + 2R5^{-1} \pm \cos \frac{1}{2} \omega r \right). \quad (15.6)$$

Здесь $\pm \cos \frac{1}{2} \omega r$ — разрывная функция. Она определена внутри интервалов $(N-1)\pi + \arcsin R \leq \omega r \leq N\pi + \arcsin R$, где $-\frac{1}{2} \leq \arcsin R \leq \frac{1}{2}$, N — целое число и R — трансрезонансный параметр: $R = -\frac{1}{4} \alpha^{-0.5} B \alpha_*^{-0.5}$ (13.3). На границах интервала $\pm \cos \frac{1}{2} \omega r$ скачкообразно меняется. Более полно эта функция описана в разделе 13.2.

Теперь можно вычислить η . Для этого можно использовать выражение (13.4):

$$\eta \approx -hu_a + hu_a^2. \quad (15.7)$$

Приведем результаты нескольких расчетов. На рис. 143 даны кривые, найденные, используя (15.7). Очень тонкие линии описывают линейные гармонические волны, прибывающие из открытого океана (первый член в (15.6)). Бо-

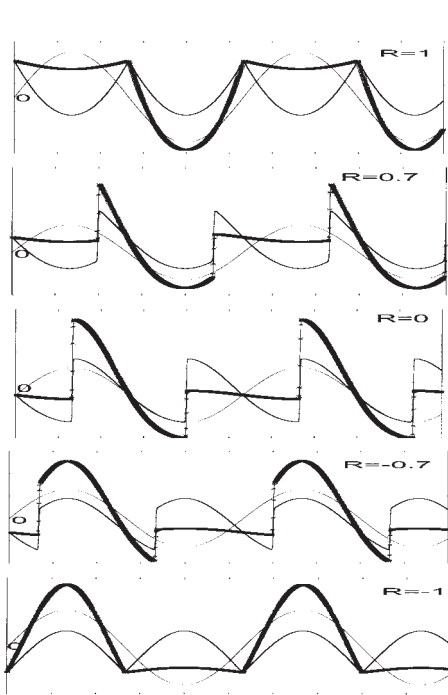


Рис. 143. Трансрезонансная эволюция волн ($\varphi = \arcsin R$).

лее толстые прерывистые линии определены нелинейным членом в (15.6). Толстые линии соответствуют полному выражению (15.6). Профили, рассчитанные согласно (15.6) и представленные на рис. 143, определяются волнами J и $\bar{J}$, и поэтому трансрезонансное развитие волны η более сложно, чем эволюция волн, представленная на рис. 123. Во время прохождения резонансной полосы, когда трансрезонансный параметр R изменяется от 1 до -1, профиль с вершиной, содержащей выемку ($R=1$), развивается, проходя через профили с разрывами к периодическим, подобным солитонам, волнам, разделенным слабо-переменными долинами. Напомним, что при расчете $\bar{J}$ мы не учитываем дисперсию, поэтому, как и можно было бы ожидать, профили рис. 143 подобны таковым для волн, возбуждаемых около нелинейного (квадратного) резонанса столба газа (см. рис. 144).

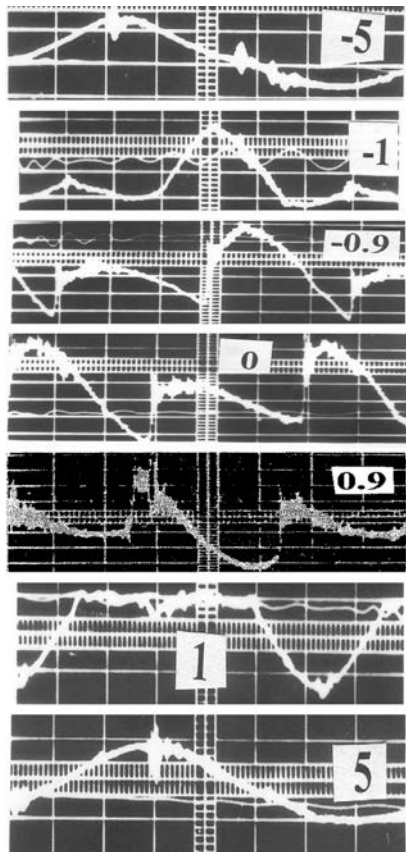


Рис. 144. Кривые давления, возбуждаемые при прохождении первого нелинейного резонанса закрытой трубы. Измерения выполнены для различных значений трансрезонансного параметра R ($R = -5; -1, -0.9, -0, 0.9, 1, 5$) [49].

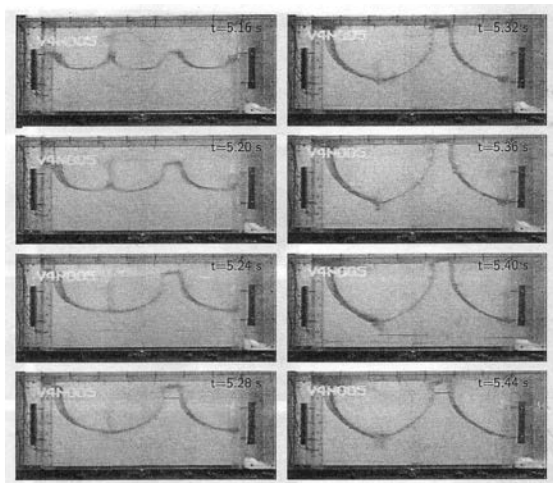


Рис. 145. Эволюция столообразной волны в резонаторе, сопровождаемая возникновением струй и глубоких ложбин [59].

Интересно, что, согласно расчетам, на поверхности воды могут возникать столообразные волны (рис. 143, $R=1$). Подобные волны довольно часто наблюдаются в экспериментах, когда на поверхности воды возбуждаются и сосуществуют две волны, т.е. в случаях, один из которых рассматривается сейчас. Пример возбуждения подобной волны дан на рис. 145.

Мы полагаем, что решение (15.6) качественно описывает некоторые важные особенности развития длинных поверхностных волн. Это развитие может быть очень сложным. Согласно развитой теории, у океанской волны могут быть крутые фронты и глубокие ложбины. Известно, что экстремальные волны могут содержать почти вертикальную стену воды, которой предшествует ложбина (депрессия), настолько глубокая, что она описывается матросами, как «отверстие в море» (см. кривые на рис. 143 ($R=1$ и 0.7)) и рис. 145).

В заключение обсуждения рис. 143 отметим, что, так как мы используем теорию мелкой воды, то, вообще говоря, мы можем ожидать появление этих волн только у берегов или в неглубоких морях.

Амплитуда нелинейной волны может быть достаточно большой. Например, если высота начальной гармонической волны J составляет 10 м, то, согласно рис. 143, высота резонансных волн может составить приблизительно 20 м.

15.2. Моделирование «дыры в море», встреченной танкером «Таганрогский залив»

Решение (15.6) описывает очень быстрое изменение параметров волны. По-видимому, это решение не вполне применимо для описания длинных волн на воде, так как оно не удовлетворяет условию плавного изменения характеристик волны. Решение только качественно описывает эволюцию фронта перед началом его опрокидывания.

Сделаем следующий шаг в исследовании катастрофической волны. Учтем влияние трения и вязких потерь. Качественно это соответствует, согласно нашей теории, учету влияния ветра, течения и дна, так как кинематическая вязкость воды пренебрежимо мала. В этом случае, согласно разделу 13.3, мы имеем, что

$$G = u_r = \sqrt{\alpha_*^{-1} \varepsilon} \left\{ \frac{2R}{5} \tanh \left[2\omega^{-1} \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*} \right] \sin \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \omega r^+ \right\}. \quad (15.8)$$

Здесь $\varphi = \arcsin R$. Теперь мы можем найти выражение, соответствующее (15.6):

$$u_a = -C^{-1} \sqrt{\varepsilon} \left\{ A \cos \frac{1}{2} \omega r + 2R5^{-1} + \right. \\ \left. + \tanh \left[2\omega^{-1} \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*} \right] \sin \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \omega r^+ \right\}. \quad (15.9)$$

Используя (15.9), проведем расчет трансрезонансной эволюции волн с целью моделирования волны, почти потопившей танкер «Таганрогский залив». Примем, что танкер встретил волну в моменты прохождения ее резонансной полосы. Т.е. тогда, когда волна усилилась и одновременно образовала глубокую впадину на поверхности океана.

Трудность исследования подобной трансрезонансной эволюции экстремальных волн определяется тем, что мы не знаем ни протяженности резонансной полосы, ни времени ее существования, ни закона ее перемещения по водной поверхности, который может зависеть, например, от характера ветра и течений. В случае танкера «Таганрогский залив» мы не знаем даже глубины океана. Поэтому, для качественного исследования, мы максимально упростим

технику моделирования, а именно, положим, что внутри полосы меняется только амплитуда нелинейной составляющей выражения (15.9). Причем амплитуда максимальна в середине полосы и обращается в нуль на ее краях. В этом случае, полосу можно моделировать функцией

$$\text{sech}^m(:^* X^*). \quad (15.10)$$

Здесь :^{*} и m — постоянные, определяющие ширину полосы, X^* — координата, имеющая начало в середине полосы. С учетом сказанного (15.9), запишем так:

$$u_a = -C^{-1} \sqrt{\varepsilon C^3 (15gh)^{-1}} A \cos \frac{1}{2} \omega r - C^{\infty 0.5} \alpha_*^{-0.5} \text{sech}(:^* X^*)! \\ \times \left\{ \frac{2R}{5} + \tanh \left[2\omega^{-1} \chi^{-1} \sqrt{\alpha_*} \right] \sin \left(\frac{1}{2} \omega r + \varphi \right) \cos \varphi \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \omega r \right\}. \quad (15.11)$$

Здесь $m = 1$. Используя (15.10), (15.11) и линейризованное выражение (15.7), мы исследовали процесс развития гармонической волны в экстремальную волну. При расчетах использовался достаточно большой коэффициент χ , учитывающий влияние ветра и течения (12.78). Таким образом, мы избавились от чрезмерно крутых фронтов в волне. Результаты, соответствующие случаю «Таганрогский залив», представлены на рис. 146. Выделено три момента прохождения волной резонансной полосы.

На рис. 146 сплошные толстые кривые описывают профили волн, вычисленные для трех моментов времени. Пунктирные гармонические

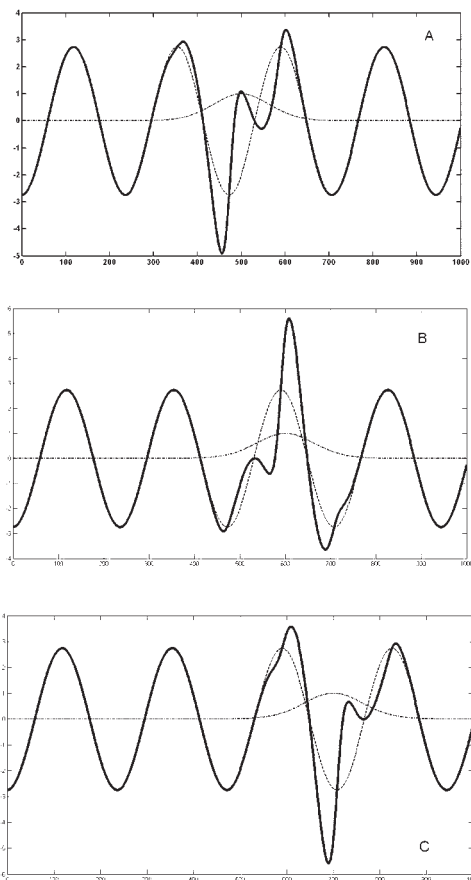


Рис. 146. Качественная картина трансрезонансной эволюции гармонической волны и моделирование «дыры в море», встреченной танкером «Таганрогский залив». Показаны профили волн, вычисленных для трех моментов прохождения волной резонансной полосы.

кривые определяют волну, проходящую резонансную полосу. Штрихпунктирные линии дают ширину резонансной полосы, в которой имеет место эволюция волны. Видно, что перед фронтом волны могут возникать очень глубокие ложбины. Причем ширина их может быть значительна (около 200 м) и вполне достаточна, чтобы крупное судно почти полностью, относительно плавно, погрузилось в ложбину. Затем следует удар крутого фронта волны, который в этот момент может опрокидываться, что создает особую опасность для судна (см. раздел 3.5 и главу 17).

В заключение отметим, что своеобразие рассмотренной волне придает ступенька на ее фронте.

15.3. Моделирование прибрежной эволюции самовозбуждающихся волн

Цель этого раздела — сравнение результатов развитой теории с данными недавних экспериментов. Детальное описание экспериментов может быть найдено в [60]. Здесь некоторые результаты экспериментов представлены вместе с данными вычислений. Использовалось выражение (15.9) и линеаризованная формула (15.7) в предположении, что

$$A = \pm (h / h_0)^{-0.75} \exp(-\bar{g} g^{-0.5} \rho^{-1} h_a^{-1.5} a^{-0.5}). \quad (15.12)$$

Здесь h_0 — максимальная глубина воды (приблизительно 18 см). Типичный профиль волны, возбуждаемый в [60], показан на рис. 147.

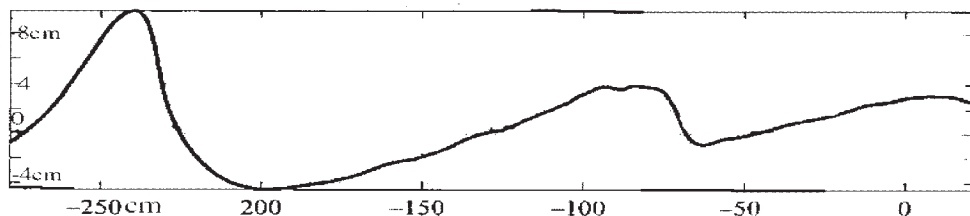


Рис. 147. Профиль набегающей на берег волны [60].

На рис. 148 дано сравнение замеренных (левая колонка [60]) и вычисленных (правая колонка) волн.

Во время вычислений мы приняли, что амплитуда начальной волны J , равнялась 12 м/сек и $\bar{g} g^{-0.5} \rho^{-1} = 0.02 \text{ м}^{0.5}$, $\chi = 0.1 \text{ с}$. Последние две величины определены донным трением и кинематической вязкостью, соответственно. Рис. 148 показывает, что достаточно простые выражения (15.9) и (15.12) при удачном выборе параметров модели могут описать прибрежное развитие волн.

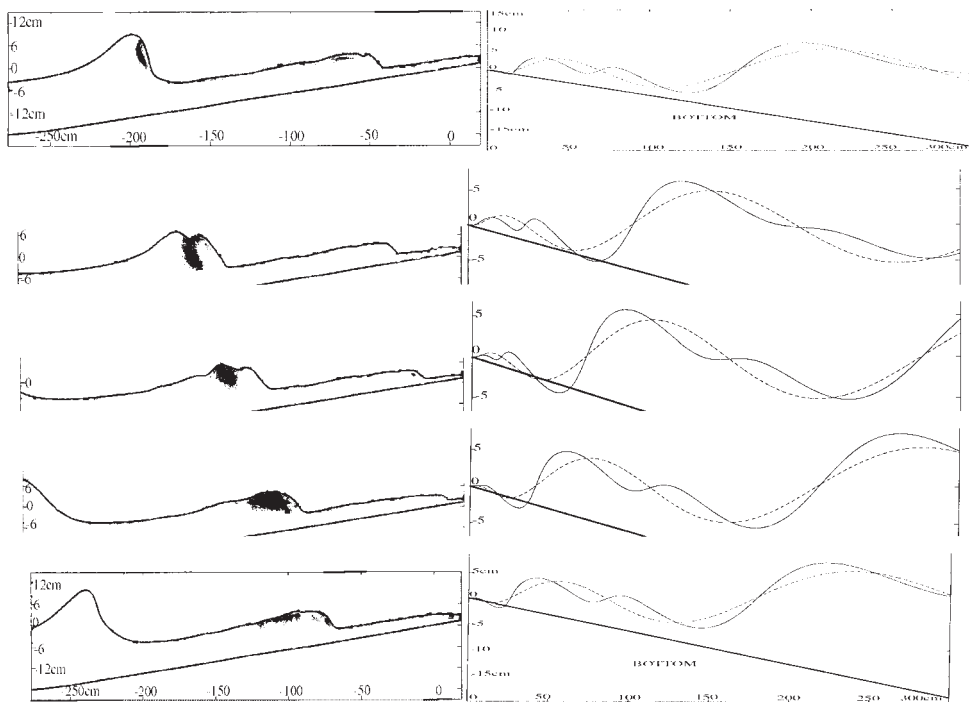


Рис. 148. Трансрезонансное развитие прибрежных волн. Замеренные волны расположены в левой колонке [60], а рассчитанные волны расположены в правой колонке. Сплошные линии найдены согласно нелинейной модели (15.9) с учетом (15.12); прерывистые линии получены согласно закону Грина с донным трением (т. е. используется (15.12)).

15.4. Моделирование экстремальных волн. Эффект дисперсии

Теперь, используя результаты раздела 8.6 и 13.5, мы изучим влияние дисперсии на экстремальные длинные волны.

Влияние фазы. Мы записали выше общие выражения для катастрофической длинной волны (15.3) и (15.4). Мы имеем в этих выражениях как начальную компоненту волны, так и ее нелинейную, резонансную, составляющую. Теперь, используя (13.18), мы можем записать:

$$\begin{aligned}
 (u_a)_+ = & \mp C^{-1} \sqrt{\varepsilon} A \sin \frac{1}{2} \omega r - C^{-1} \sqrt{\sigma} \left\{ 2R5^{-1} + \right. \\
 & \left. + [\hat{A} \operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) + \hat{C}] \cos^2 \frac{1}{2} \omega r_j^+ \right\}. \quad (15.13)
 \end{aligned}$$

Здесь $\tau = \omega Nr - \arcsin R$ (13.29). Величины σ и $\hat{A}, :, \hat{C}$ определены выражениями (12.80) и (13.27), соответственно. Поэтому мы можем записать (15.13) в виде:

$$(u_a)_{\mp} = \mp C^{-1} \bar{\varepsilon}^{0.5} A \sin \frac{1}{2} \omega r - C^{-1} \sigma^{0.5} \left\{ 2R5^{-1} + \right. \\ \left. + [3\operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) - 1] \cos^2 \frac{1}{2} \omega r_j^+ \right\}. \quad (15.14)$$

Выражение (15.14) определяет две волны: $(u_a)_-$ и $(u_a)_+$. У этих волн составляющие суммы сдвинуты относительно друг друга на π . Теперь учтем, что иницирующая (начальная) компонента волны и ее усиливающаяся (резонансная) часть могут иметь в точном резонансе сдвиг по фазе, равный $\pi > 2$. В этом случае выражения (15.4) и (13.18), (3.27) дают

$$u_a = -C^{-1} \bar{\varepsilon}^{0.5} A \cos \frac{1}{2} \omega r - C^{-1} \sigma^{0.5} \left\{ 2R5^{-1} + \right. \\ \left. + [3\operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) - 1] \cos^2 \frac{1}{2} \omega r_j^+ \right\}. \quad (15.15)$$

Если величина N в (13.29) задана, то (15.14) и (15.15) определяют три типа волн. Ниже приведены результаты расчетов с использованием всех трех указанных вариантов. Непосредственно из последних выражений видно, что усиление в резонансной полосе гармонической волны (начальная волна), приходящей из океана, может быть достаточно весомо. Соответствующие поверхностные волны находятся с учетом всех квадратично-нелинейных эффектов, согласно выражению (15.7).

Рассмотрим особенности трансрезонансного усиления волн. Это можно сделать, следуя разделу 15.2, а именно, запишем следующие выражения для волн, проходящих резонансную полосу:

$$(u_a)_{\mp} = \mp C^{-1} \bar{\varepsilon}^{0.5} A \sin \frac{1}{2} \omega r - \bar{C}^{-1} \sigma^{0.5} \operatorname{sech}^m(: X^*) \left\{ 2R5^{-1} + \right. \\ \left. + [3\operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) - 1] \cos^2 \frac{1}{2} \omega r_j^+ \right\}, \quad (15.16)$$

$$u_a = -C^{-1} \bar{\varepsilon}^{0.5} A \cos \frac{1}{2} \omega r - \bar{C}^{-1} \sigma^{0.5} \operatorname{sech}^m(: X^*) \left\{ 2R5^{-1} + \right. \\ \left. + [3\operatorname{sech}^2(\gamma \sin \tau) - 1] \cos^2 \frac{1}{2} \omega r_j^+ \right\}. \quad (15.17)$$

Здесь, как и ранее, $\tau = \omega Nr - \arcsin R$ (13.29). Мы ввели в (15.16)–(15.18) множитель (15.10) с тем, чтобы описать эволюцию волны, проходящей резо-

нансную полосу. Различные профили волны, вычисленные согласно (15.14)–(15.18), представлены на рисунках этого раздела.

Волна «белая стена». Сперва мы приведем рисунок, иллюстрирующий тот факт, что сумма (наложение) гармонической волны с волной, подобной солитону, может дать волну с фронтом более крутым, чем фронты суммирующих волн. При расчетах использовались параметры, близкие параметрам «Новогодней» волны: $h = 70$ м, $\lambda = 220$ м, и амплитуда набегающей на резонансную полосу волны равнялась 5.8 м.

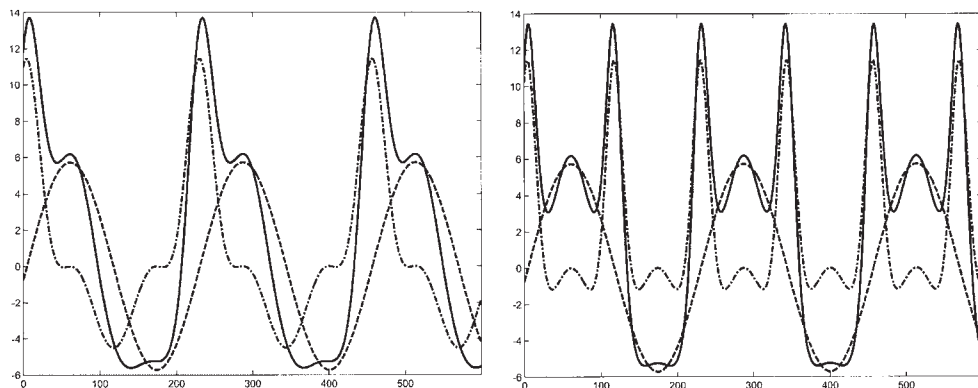


Рис. 149. Эффект дисперсии на волну «белая стена». Резонансные волны, вычисленные с использованием $(u_a)_-$ (15.14). Слева случай $N = 0.25$, $R = 0$, справа случай $N = 0.5$, $R = 0$.

На рис. 149 штриховые гармонические линии определяют волны, пришедшие из открытого океана. Штрихпунктирные линии описывают самовозбужденные нелинейные составляющие волн. Сплошные линии дают резонансные профили волн. Волны бегут справа налево. Отметим, что резонансные профили, представленные на левой стороне рис. 149, мы уже встречали ранее (см. рис. 101 и 138). Таким образом, в результате резонансного взаимодействия линейных, нелинейных и дисперсионных эффектов могут возникать волны с крутым фронтом. Этот фронт качественно можно определить как движущаяся «белая стена». Подчеркнем, что расчет кривых рис. 149 произведен при фиксированном значении координаты, соответствующей $R = 0$ и лежащей в резонансной полосе. Трансрезонансная эволюция этих волн показана на рис. 150. Штриховые линии характеризуют гармонические волны, приходящие извне, штрихпунктирные — ограничивают резонансные полосы, в которых имеет место усиление волн.

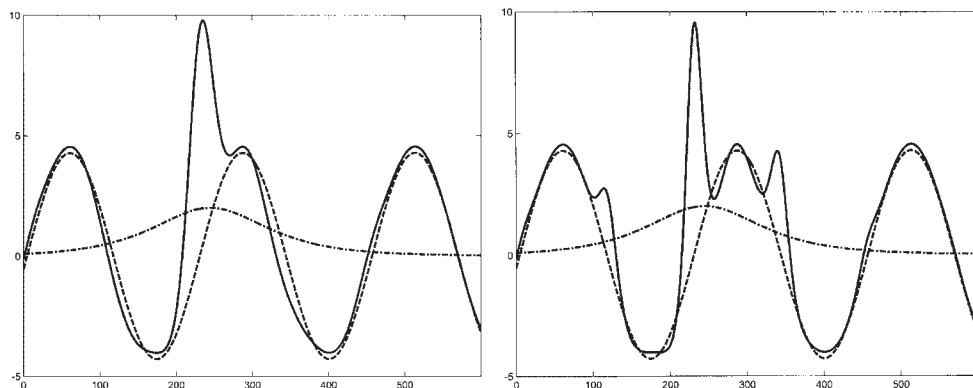


Рис. 150. Резонансные волны «белая стена», вычисленные с использованием $(u_a)_+$ (15.16).

Слева случай $N = 0.25$, $m = 1$, $R = 0$, справа случай $N = 0.5$, $m = 1$, $R = 0$.

Волны бегут справа налево.

При расчетах рис. 150 мы использовали параметры, данные для экстремальной волны, представленной на рис. 1.4(a) [3]. Расчеты качественно соответствуют данным наблюдений.

Экстремальные волны часто имеют крутой передний склон и более плавно спадающий задний склон. На двух эпюрах (из пяти) экстремальных волн, представленных на рис. 1.4 [3], можно видеть своеобразные полочки, напоминающие показанные на заднем склоне волны на рис. 150. Такие волны достаточно часто фиксируются в экспериментах и наблюдаются на водной поверхности.

Волна «ступенчатый фронт».

Далее мы рассмотрим волну, порождаемую выражением (15.14).

В этом случае полочка возникает на переднем фронте волны. Крутизна задней стороны волны, в целом, сильнее, чем у передней стороны. Другие примеры таких своеобразных волн можно видеть на рис. 101, 102. Они возникали непосредственно за началом склона подводной топогра-

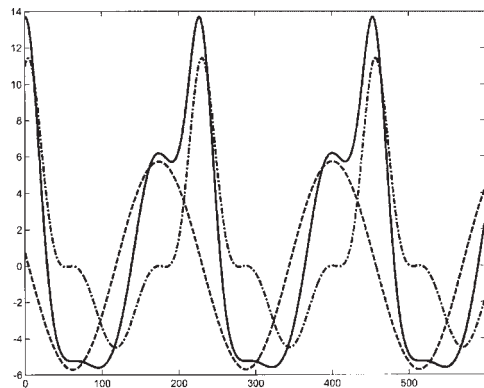


Рис. 151. Эффект дисперсии. Резонансная волна (сплошная линия), вычисленная с использованием $(u_a)_+$ (15.14) (случай $N = 0.25$, $R = 0$). Штриховая линия характеризует гармоническую волну, приходящую извне, штрихпунктирная — описывает самовозбужденную нелинейную составляющую волны. Волна бежит справа налево.

фии. Заметим также, что аналитическое решение, результаты которого представлены на рис. 151, хорошо описывает удивительные, недавно экспериментально обнаруженные волны [61], показанные тонкой линией в верхней части рис. 152. Интересно, что использование численных методов не всегда приводит к успеху при моделировании этих волн.

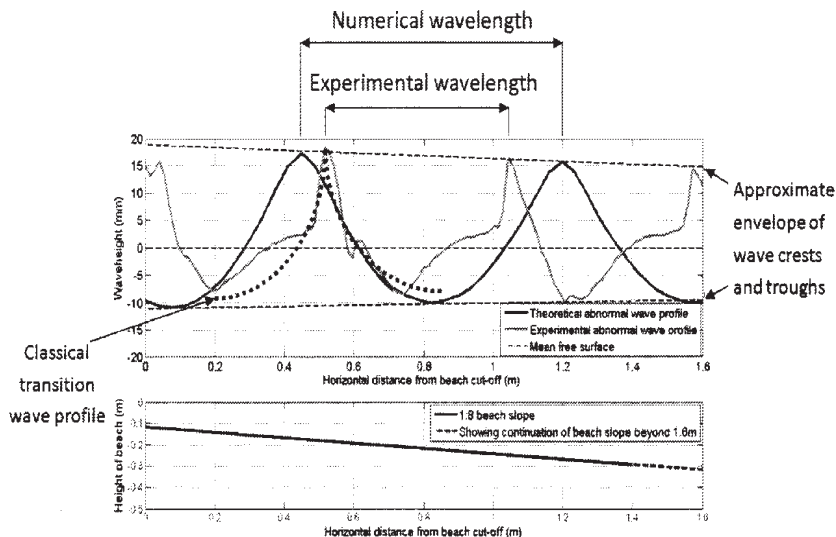


Рис. 152. Волна удивительной формы — «ступенчатый фронт». Сравнение наблюдаемой волны (тонкая линия в верхней части рисунка) и результата ее численного моделирования (толстая гармоническая кривая там же) [61]. Волна бежит справа налево.

Пример экстремальной волны, имеющей маленькую полку на крутом фронте, представлен на рис. 153 (верх). В соответствии с подходом к катастрофическим волновым явлениям, излагаемым в книге, мы нашли, что возникновение этой волны связано с локальным резонансом (рис. 153, низ).

На рис. 153 (низ) обозначения соответствуют рис. 150. Таким образом, мы нашли, что учет дисперсии позволяет в рамках квадратично-нелинейной теории длинных волн описать резонансное развитие гармонических волн в экстремальные волны. Теперь обратимся к наиболее часто упоминаемой специалистами так называемой «Новогодней» волне.

Моделирование одиночной или «Новогодней» волны. Рассмотрим волны, порождаемые выражением (15.15). Результаты расчетов даны на рис. 154, где обозначения соответствуют рис. 151.

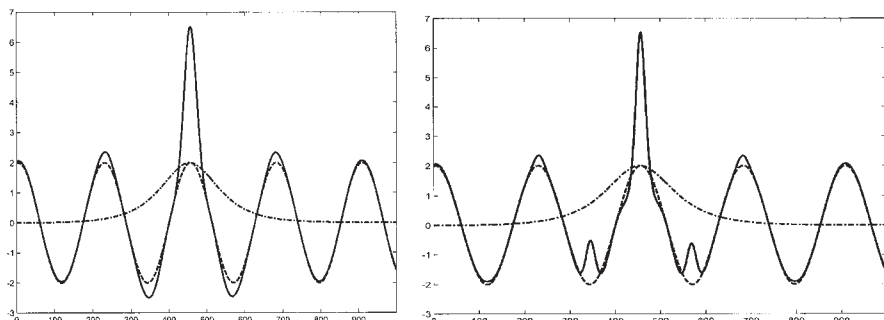
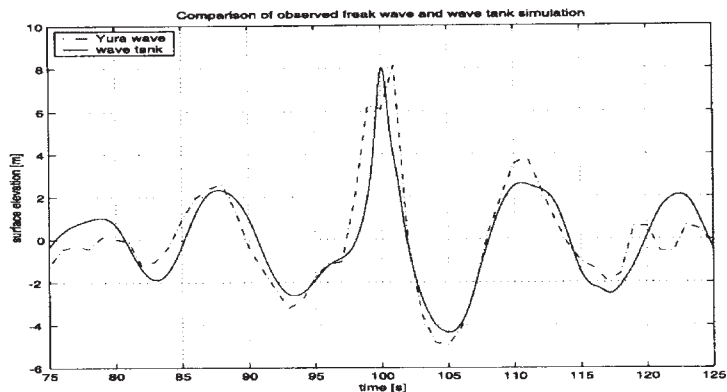


Рис. 153. Эволюция экстремальной волны – «ступенчатый фронт» [7] (верх).
Расчет этой волны по формуле (15.17) (низ). Слева случай $N = 0.25$, $m = 1$, $R = 0$,
справа случай $N = 0.5$, $m = 1$, $R = 0$.

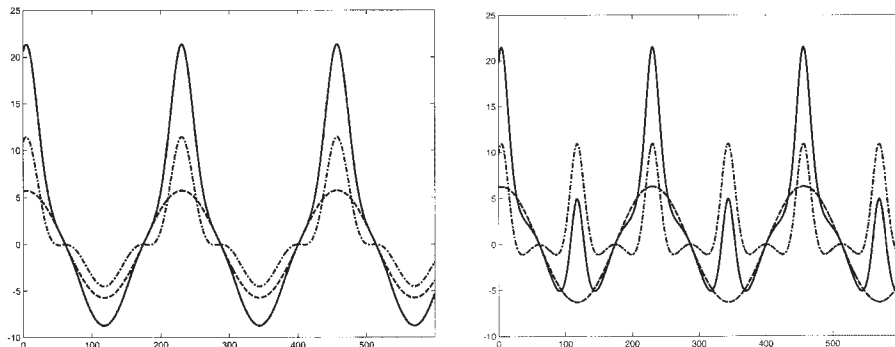


Рис. 154. Эффект дисперсии. Резонансные волны (сплошные линии), вычисленные
с использованием $(u_a)_-$ (15.15). Слева случай $N = 0.5$, $R = 0$,
справа случай $N = 0.5$, $R = 0$.

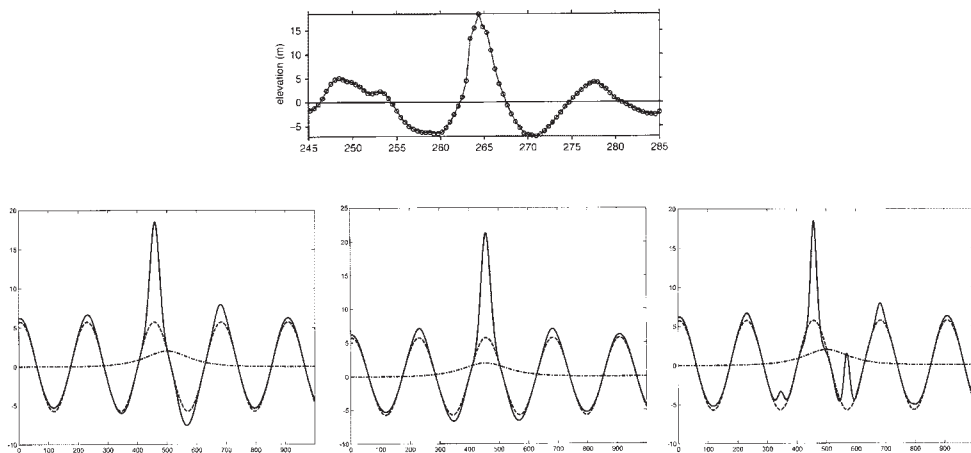


Рис. 155. Трансрезонансная эволюция «Новогодней» волны. Показания прибора на нефтяной платформе «Дропнер». Высота волны — в метрах, время — в секундах (верх). Трансрезонансная эволюция «Новогодней» волны, рассчитанная с использованием (15.17): слева случай $N = 0.25$, $m=1$, $R = 0$, имеется отклонение волны от середины резонансной полосы; центр — случай $N = 0.25$, $m=1$, $R = 0$, не имеется отклонения волны от середины резонансной полосы; справа случай $N = 0.5$, $m=1$, $R = 0$.

В целом, волны, представленные на рис. 154, соответствуют показаниям прибора на нефтяной платформе «Дропнер» (рис. 68). Наша цель — описать математически показания прибора. В увеличенном масштабе эти показания даны на рис. 155 (верх). Результаты вычислений для случая точного резонанса показаны на рис. 155 (низ).

В целом, из рис. 155 достаточно хорошо видно, что наша теория описывает «Новогоднюю» волну.

Мы рассмотрели в разделе 15.2 и в этом разделе, по-видимому, наиболее часто упоминаемые типы катастрофических волн. Осталось рассмотреть «три сестры».

Моделирование группы волн «три сестры». Экстремальные волны в некоторых случаях распространяются группами из небольшого числа очень крутых волн. Упомянем случай, описанный капитаном Фредерик-Моро — командиром учебного крейсера ВМС Франции «Жанна д'Арк».

5 февраля 1963 г. крейсер «Жанна д'Арк» находился в 430 милях к юго-востоку от Токио. Дул западный ветер 15–20 м/сек, волнение — 7 баллов, средняя высота волн около 7–8 м. Утром впереди по курсу, сразу за полосой относительно спокойной воды, была замечена группа больших обрушивающихся волн (высота волн 4–5 м). Затем судно встретило первую волну; высота волны

была около 15 м. Эта волна бросила судно влево таким образом, что оно оказалось в провале между первой и второй волнами, потом судно было настигнуто второй волной. Третья волна имела несколько меньшую амплитуду и была пройдена относительно легко. Инцидент с «Жанной д'Арк» известен как «Великолепная тройка». В описании этого случая эксперты отмечают следующие характерные черты:

1. аномальная высота (до 15–20 м) волн и исключительно крутой (почти вертикальный) передний фронт;

2. малое расстояние между последовательными гребнями (около 100 м).

Здесь мы моделируем эти волны, используя (15.17). Результаты расчетов даны на рис. 156.

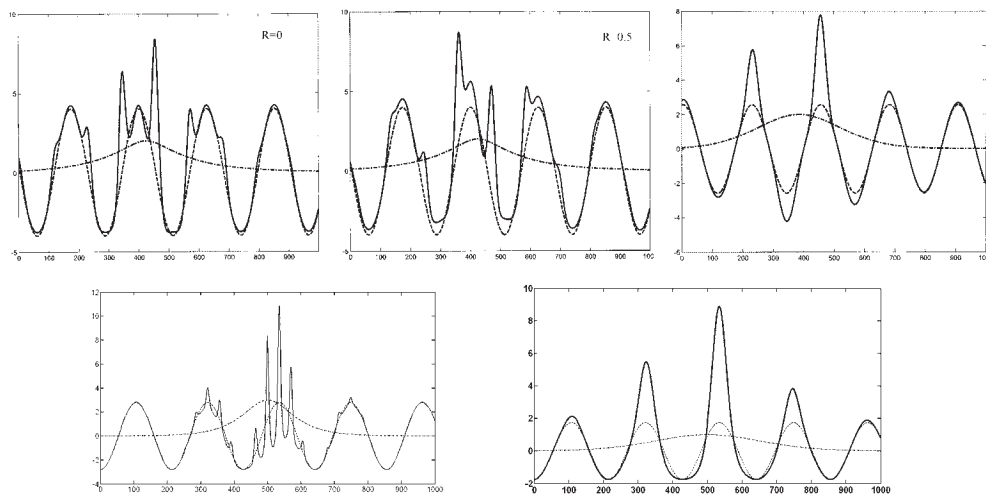


Рис. 156. Верхний ряд. Трансрезонансная эволюция группы волн «три сестры», вычисленных с использованием $(u_a)_+$ (15.16): случай $N = 0.5$, $m = 0.35$, $R = 0$ (слева), случай $N = 0.5$, $m = 0.35$, $R = 0.5$ (центр). Справа волны, вычисленные с использованием (15.17) и $N = 0.25$, $m = 6$, $R = 0$. Обозначения соответствуют рис. 150. Нижний ряд. Примеры трансрезонансной эволюции группы волн «три сестры», данные в <https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/6123>.

Таким образом, расчеты показывают, что возможна последовательность близко расположенных катастрофических волн (рис. 156, слева и центр). Она качественно моделирует наблюдения с борта «Жанна д'Арк». Вместе с тем выражение (15.17) также описывает резонансное усиление группы волн и в случае $N=0.25$. Это имеет место внутри резонансной полосы, если она имеет дос-

точную ширину. Пример такого усиления дан на рис. 156 (справа). Расчет выполнен при $m = 6$, $R = 0$. Он моделирует волны, показанные на рис. 1.4 (d) [3]. В этом случае мы предполагали широкую, т.е. охватывающую три волны, но весьма локализованную резонансную полосу.

Моделирование «дыры в море». В этом разделе, как читатель может видеть, мы сделали акцент на моделировании экстремальных волн, представленных на рис. 1.4 [3]. Уже три волны из пяти, показанных на этом рисунке, рассмотрены. Рассмотрим еще одну, иллюстрирующую возникновение ложбины в море (рис. 1.4 (с) [3]).

Мы не будем останавливаться на рассмотрении рис. 1.4 (е) [3]. Там представлена волна, эпюра и амплитуда которой принципиально не отличаются от показанных на рис. 150.

Замечание. Суммируя представленные выше результаты, можно сделать вывод, что учет дисперсии очень важен. Учет дисперсии позволил нам описать основные типы катастрофических волн. Не исключена возможность появления таких волн даже далеко от берега, если влияние дисперсии на волны приблизительно равно влиянию нелинейности.

Напомним, что в разделе использовались формулы, следующие из решения (15.13). Прямое использование (15.13) не всегда позволяет описать наблюдения. Как уже отмечалось, это связано с тем, что решение не учитывает возможного сдвига фазы между вынуждающей и возбуждаемой составляющими волны. Мы ввели фазу в выражениях (15.15) и (15.17).

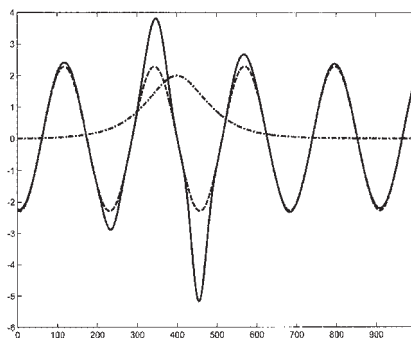


Рис. 157. Трансрезонансная эволюция «дыры в море». Вычисления выполнены с использованием (15.17) (случай $N = 0.25$, $m = 1$, $R = 0$). Обозначения соответствуют рис. 150.

15.4.1. Пример трансрезонансной эволюции катастрофических волн

Подчеркнем, что внутри резонансных полос мы проводили расчеты при фиксированном R . Причем обычно трансрезонансный параметр $R=0$. Конечно, приблизительно это значение можно использовать и в окрестности точки $R=0$, что следует из рассмотрения результатов глав 13, 14 и разделов 15.1 и 15.2, полученных для $-1 \leq R \leq 1$. Однако при R , приближающемся к ± 1 , может возникнуть большая неточность. Чтобы получить какое-то понимание сложности трансрезонансной эволюции катастрофических волн, мы исследу-

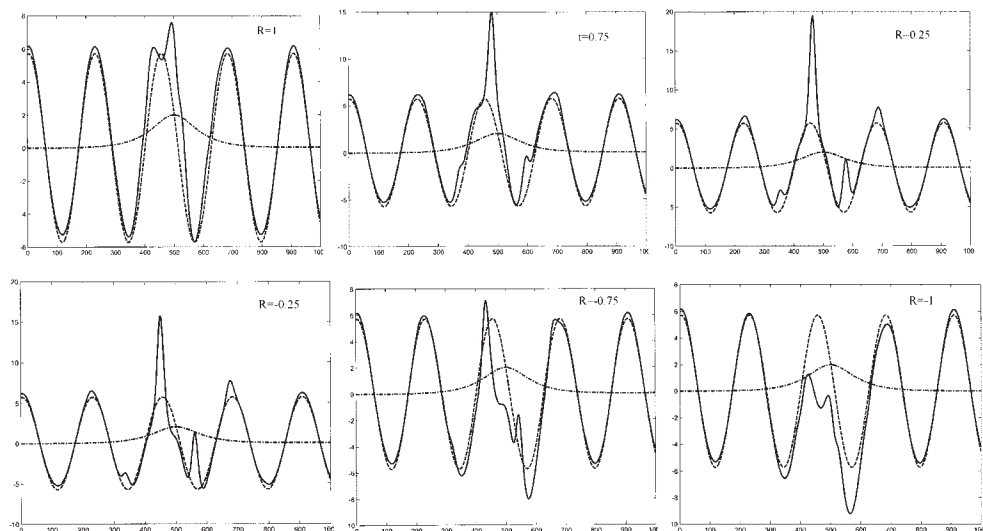


Рис. 158. Трансрезонансная эволюция одиночной волны при $N=0.5$, $m=1$ в (15.17).

ем влияние R на профили волн, определяемые выражением (15.17). С этой целью на рис. 158 построены профили волн в предположении, что на расстоянии, равном приблизительно ее длине, трансрезонансный параметр R не меняется.

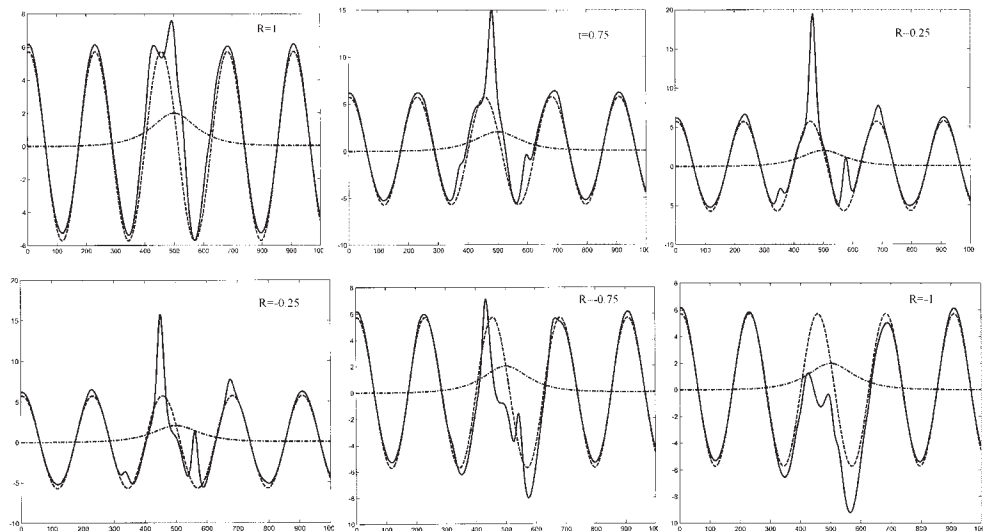


Рис. 159. Трансрезонансная эволюция одиночной волны при $N=0.25$, $m=1$ в (15.17).

На рис. 158 резонансная волна (сплошная линия) вычислена по (15.17) (случай $N = 0.5$). Штриховая линия характеризует гармоническую волну, проходящую извне, штрихпунктирная линия ограничивает резонансную полосу. Из рисунка следует, что в резонансной полосе могут возникать волны, имеющие крутые передние или задние склоны (см. также рис. 155). В достаточно широком диапазоне R , лежащем вокруг $R = 0$, амплитуда волны меняется слабо, однако на краях полосы амплитуда волнения быстро и сильно меняется. В частности «дыра» в море возникает при $R = -1$.

Затем расчеты были повторены для случая, когда $N = 0.25$ в (15.17) (см. также рис. 155). Из рис. 159 следует, что вблизи края резонансной полосы, где $R \approx -1$, нелинейность уменьшает амплитуду волны, т.е. там наблюдатель может отметить уменьшение волнения по сравнению с окружающим океаном (пунктирные линии). При увеличении R за $R \approx -0.5$ высота волны начинает стремительно расти. При $R \approx 0.1$ она максимальна. Следовательно, она максимальна не при точном резонансе. При $R = 1$ высота волн меньше высоты набегающих на резонансную полосу волн. Таким образом, максимальные значения рассматриваемой катастрофической волны группируются в окрестности $R \approx 0.1$.

Заметим, что все расчеты в последних двух разделах выполнены для $t = 0$. Поэтому, повторяем, проведенные расчеты не дают полного представления о трансрезонансной эволюции катастрофических волн. Однако, очевидно, что эта эволюция не отличается качественно от показанной на рис. 137, 138 (см. также рис. 160). Вместе с тем развитие волн внутри резонансной полосы может быть достаточно сложным, поэтому расчеты, представленные в разделе 15.4, должны рассматриваться только как основа для более глубокого исследования возникновения и трансрезонансной эволюции катастрофических волн.

15.5. Эволюция волн, проходящих над подводной топографией

В последних двух разделах мы исследовали возникновение катастрофических волн, не связывая параметры резонансной полосы с какими-либо характеристиками глубины, ветра или течения. Здесь мы немного конкретизируем наше исследование. Будем рассматривать волны зыби при отсутствии течения. Ширина и характеристики резонансной полосы определяются только изменением глубины (подводной топографией).

Рассмотрим синусоидальную волну, распространяющуюся в открытом океане. Как она изменяется, проходя над топографией? Чтобы ответить на этот вопрос, мы будем использовать $(u_a)_-$ (15.16), где полагаем $A = 1$ и линеа-

ризованную формулу (15.7). Волна набегает на область топографии с правой стороны. Глубина над топографией меняется по закону:

$$h = \bar{h} + 200[1 + \cos(5 / 4.5 + 0.55a / L)], \quad (15.19)$$

где $L=3$ км. Результаты вычислений для различных $\bar{h}$ ($\bar{h} = 25, 40$ и 50 м) представлены на рис. 160. Резонансный параметр R (15.16) в данном случае зависит от глубины и определяется в процессе вычислений. Внутри полосы он меняется от 1 до -1.

Видно, что гармоническая волна, прибывающая из глубокого океана, может быть преобразована в волну с почти вертикальным фронтом. Вблизи от границ полосы возникают столообразные волны, подобные показанным на рис. 143 и 145.

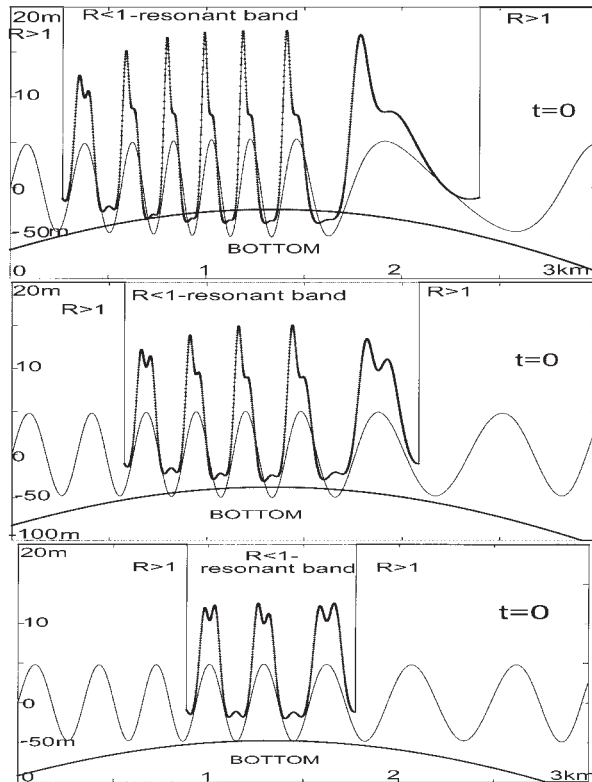


Рис. 160. Резонансная полоса и трансрезонансное развитие волн, идущих из открытого океана. Толстые линии вычислены согласно $(u_a)_-$ (15.16) и линеаризованной формулы (15.7) (случай $N = 0.5$, $\varphi = \arcsin(2^{-0.5} R)$). Тонкая линия представляет линейную часть волны, приходящей из открытого океана.

Можно видеть, что развитие волн, представленных на рис. 160, много сложнее эволюции волн, показанных на рис. 149 и 150, хотя оно тоже показано только с качественной стороны. Вместе с тем усиление квадратично-нелинейной длинной волны не является чрезмерным и, в целом, соответствует критерию усиления для экстремальных волн. Конечно, усиление могло быть больше, если бы глубина над вершиной топографии была меньше.

15.6. Трансрезонансное развитие океанских волн в облако смеси вода-воздух

Мы уже отмечали, что в принципе квадратично-нелинейная теория может описывать волны значительной (порядка глубины) амплитуды (см., например, подраздел 6.7.3). Расчеты экстремальных волн, проведенные выше, и их определенное соответствие данным наблюдений подтверждают это. Однако возможности квадратично-нелинейной модели ограничены. В частности, мы показали, что данное Дарвином описание прибрежной эволюции цунами возможно только при учете кубической нелинейности. Моделирование опрокидывающихся волн, высоких фонтанов пены и брызг, которые можно наблюдать часто недалеко от берега, также лежат за пределами квадратичной теории. Мы моделировали эти процессы в разделе 14.3 на основе кубически-нелинейной теории, предполагая, что волны возбуждаются ветром. Однако эти явления, конечно, возможны и для других волн, например, волн зыби. При рассмотрении их катастрофического развития примем, как и в предыдущем разделе, что резонансная полоса определяется изменением глубины.

При исследовании этих волн будем использовать подход, развитый ранее для волн цунами. Открытый океан рассматривается как источник следующих волн:

$$J(s) = \varepsilon \sin \omega s. \quad (15.20)$$

Для моделирования кубически-нелинейных эффектов использовалось следующее уравнение:

$$\hat{\eta}^3 - 15h\hat{\eta}^2 + 2\sqrt{gh}C^{-2}C_d h^2 \hat{\eta} + 15C^{-3}h^3 A^2 \sqrt{gh}(\omega \cos \omega s)^2 = 0. \quad (15.21)$$

Уравнение (15.21) учитывает эффект квадратично-нелинейного резонанса и соответствует (8.102). Оно имеет три решения. Используя эти решения, можно найти

$$\eta = -\varepsilon h^{0.25} g^{0.25} C^{-1} \omega \cos \omega s + \hat{\eta}. \quad (15.22)$$

Рассмотрен случай, когда глубина изменяется согласно закону

$$h = 25 + 200[1 + \cos(5 / 4.5 + 0.55 a / L)]. \quad (15.23)$$

Результаты вычислений для трех значений амплитуды φ : $\varphi = 50, 115$ и 200 м представлены на рис. 161, где $L = 4$ км. Линии 1, 2, и 3 вычислены согласно (15.22), где $\hat{\eta}$ определено аналитическими решениями уравнения (15.21). Линия 4 представляет линейную волну, прибывающую из открытого океана.

Цель вычислений — исследование кубически-нелинейных эффектов и демонстрация возможности сильного резонансного изменения волн, идущих из открытого океана. Найдено, что сильно-нелинейные эффекты возникают, если амплитуда φ (15.20) больше некоторого критического уровня. Для глубины, которая рассматривается, этот уровень $\varphi = 120$ м. При этом амплитуда волн увеличивается приблизительно с 20 м (открытый океан) до 60 м (над топографией).

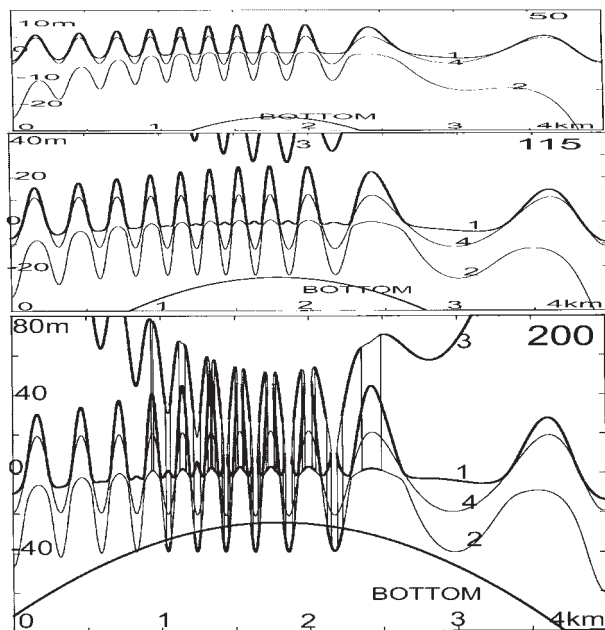


Рис. 161. Резонансная полоса и трансрезонансное развитие волн (толстые линии 1), прибывающих из открытого океана (тонкие линии 4) над топографией.

Эффект нелинейности приводит к тому, что вершины волн заостряются, а ложбины становятся более плоскими (картины 50 и 115). Затем начинает играть роль сильная нелинейность. Происходит бифуркация решения уравнения (15.21) и над топографией возникают многозначные волновые структуры. Результат этого процесса показан на картине, обозначенной на рис. 161 как 200.

Толстые кривые рис. 161 соответствуют сумме (15.22), где второй член определяется аналитическим решением кубического уравнения (15.21). Картина 200 на рис. 161 возникает потому, что при $\theta = 200$ м имеется возможность построения многозначного (бифуркационного) аналитического решения этого уравнения из однозначных решений. Чтобы более ясно показать результат использования такого решения уравнения (15.21), дадим на специальном рисунке кривые, приведенные на картинке 200 рис. 161, но вычисленные без линейной составляющей выражения (15.22). Они представлены на рис. 162, где на картинке А показаны кривые 1, 2 и 3, соответствующие трем аналитическим решениям уравнения. Используются обозначения рис. 161, соответственно кривая 4 определяет линейную волну, приходящую из океана. Там же на картинке В приведены кривые, построенные согласно численному решению уравнения (5.21). Видно, что разные методы расчета дают подобные, удивительные волновые картины над топографией. Они соответствуют опрокидыванию волн и разрушению океанической поверхности, т.е. возникновению брызговых куполов и огромных струй смеси вода-воздух над подводной топографией.

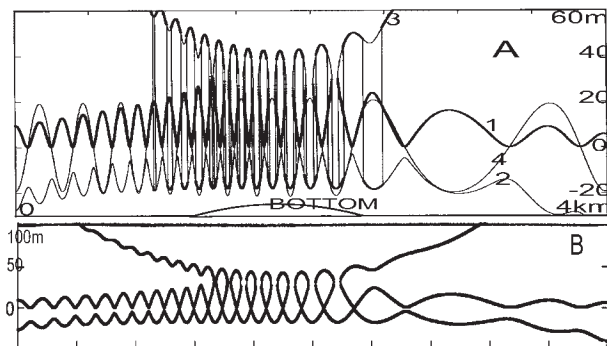


Рис. 162. Модельное исследование влияния кубической нелинейности на резонансную волну. Возможности катастрофического усиления волн и разрушения поверхности океана при прохождении огромных океанских волн над подводной возвышенностью.

Конечно, используемые при расчетах кривых рис. 161 и 162 параметры гармонической волны лежат далеко за пределами амплитуд реальных океанических волн. Подобные гармонические волны могут возникнуть в редчайших ситуациях, например, на некотором удалении от места удара метеорита по поверхности океана. Вместе с тем показанное разрушение водной поверхности и образование на ней выбросов смеси воды и воздуха — вполне заурядное явление. Оно ранее проиллюстрировано расчетами раздела 14.3. Явления, показанные на рис. 161 и 162, будут иметь место над рассматриваемой топографией

и в случае реальных океанических волн, если ее вершина будет расположена много более близко к водной поверхности.

Цель проведенных здесь расчетов в выявлении кубически-нелинейных механизмов возникновения катастрофических волн. Возможно с этим механизмом связано появление экстремальных волн, увенчанных струями и брызгами (см. рис. 1.2 (а) и (с) [3]). Более детально появления струй и капель над вершинами волн будет исследовано в главах 20 и 21.

Мы продолжим исследование эффекта кубической нелинейности в следующем разделе.

15.7. Кубически-нелинейные эффекты и гармонический анализ катастрофических волн

В предыдущих разделах главы показано, что в резонансной полосе поверхностная волна может достигнуть экстремальных значений. При этом становится существенным влияние кубической нелинейности. В этом разделе мы предпримем попытку учета этого влияния, предполагая, что экстремальные волны описываются гармоническими функциями.

15.7.1. Моделирование «Новогодней» волны

Чтобы упростить анализ, примем, что глубина постоянная ($A=1$). Рассматривается случай, когда

$$J_r = \varepsilon \cos \omega r. \quad (15.24)$$

Теперь рассмотрим компоненту $\bar{J}_r$ в (15.1). Уравнение (12.77), определяющее $\bar{J}_r$, запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} (B + 6ghC^{-4} J_r^2) \bar{J}_r + \alpha_* \bar{J}_r^2 + \beta_* \bar{J}_r^3 + (1 + 2ghC^{-2}) C^{-1} J_r \bar{J}_r + \\ + 6ghC^{-4} J_r \bar{J}_r^2 + b_1 \bar{J} + \chi \bar{J}_{rr} - k\alpha_* \bar{J}_{rrr} = \\ = -\frac{1}{2} C^{-1} (1 + 2ghC^{-2}) J_r^2 - 2ghC^{-4} J_r^3 - \bar{C}. \end{aligned} \quad (15.25)$$

Мы будем искать решение уравнения (15.25) для случая, когда влияние вязкости и трения отсутствует. Тогда, при учете (15.24), уравнение (15.25) дает

$$\begin{aligned} (B + 3ghC^{-4} \varepsilon^2) \bar{J}_r - k\alpha_* \bar{J}_{rrr} + \alpha_* \bar{J}_r^2 + \beta_* \bar{J}_r^3 + (1 + 2ghC^{-2}) C^{-1} \cos \omega r \bar{J}_r + \\ + 3ghC^{-4} \varepsilon^2 \cos 2\omega r \bar{J}_r + 6ghC^{-4} \cos \omega r \bar{J}_r^2 = \\ = -\frac{1}{2} C^{-1} (1 + 2ghC^{-2}) J_r^2 - 2ghC^{-4} J_r^3 - \bar{C}. \end{aligned} \quad (15.26)$$

Далее мы учитываем то, что здесь рассматриваются гармонические волны. Для них (см. также (8.65)) имеем

$$\bar{J}_{rr} = -K_1 \bar{J}_r. \quad (15.27)$$

Тогда (15.26) примет вид:

$$\begin{aligned} (B + 3ghC^{-4}\varepsilon^2 + k\alpha_* K_1) \bar{J}_r + \alpha_* \bar{J}_r^2 + \beta_* \bar{J}_r^3 + (1 + 2ghC^{-2}) C^{-1\circ} \cos\omega r \bar{J}_r + \\ + 3ghC^{-4}\varepsilon^2 \cos 2\omega r \bar{J}_r + 6ghC^{-4\circ} \cos\omega r \bar{J}_r^2 = \\ = -\frac{1}{2} C^{-1} (1 + 2ghC^{-2}) J_r^2 - 2ghC^{-4} J_r^3 - \bar{C}. \end{aligned} \quad (15.28)$$

Пусть

$$B + 3ghC^{-4}\varepsilon^2 + k\alpha K_1 \approx 0. \quad (15.29)$$

В результате мы получили следующее уравнение для резонансных волн:

$$\begin{aligned} \alpha_* \bar{J}_r^2 + \beta_* \bar{J}_r^3 + (1 + 2ghC^{-2}) C^{-1\circ} \cos\omega r \bar{J}_r + 3ghC^{-4\circ 2} \cos 2\omega r \bar{J}_r + \\ + 6ghC^{-4} \varepsilon \cos\omega r \bar{J}_r^2 = -\frac{1}{2} C^{-1} (1 + 2ghC^{-2}) J_r^2 - 2ghC^{-4} J_r^3 - \bar{C}. \end{aligned} \quad (15.30)$$

Решение последнего уравнения ищем в виде:

$$\bar{J}_r = A_1 \cos\omega r. \quad (15.31)$$

Выражение (15.31) подставляется в (15.30). Приравнявая далее в получившемся уравнении постоянные к нулю, определяем $\bar{C}$. Мы не будем здесь выписывать выражение для $\bar{C}$, так как оно не представляет интереса для данного исследования. Алгебраическое уравнение для A_1 находим, собирая вместе члены, содержащие $\cos\omega r$. Это уравнение имеет следующий вид:

$$A_1^3 + 3^\circ A_1^2 + A_1^{\circ 2} + \circ^3 \approx 0. \quad (15.32)$$

Рассмотрим простейший случай. Пусть $A_1 = \circ$, тогда

$$A_1 \approx -3^\circ. \quad (15.33)$$

После уточнения этого решения мы получим

$$A_1 = -\sqrt[3]{25}^\circ. \quad (15.34)$$

Двухкратный рост амплитуды. Таким образом, вблизи резонанса возможно сильное усиление нелинейной составляющей волны (15.31). Теперь, принимая, что возможен сдвиг фаз между возбуждающей (линейной) и возбуждаемой (нелинейной) составляющими волны, равный $5>2$, запишем следующее выражение для продольного перемещения:

$$u = (\cos\omega r - \sqrt[3]{25} \sin\omega r)^\circ \omega^{-1}. \quad (15.35)$$

При исследовании трансрезонансной эволюции волны, как и в разделах 15.2 и 15.4, мы максимально упростим технику моделирования, предположив,

что влияние полосы можно моделировать функцией $\text{sech}^m(:^*X^*)$ (15.10). Далее, используя (15.1), мы находим

$$\eta = [\sin \omega r - \sqrt[3]{25} \text{sech}^m(:^*X^*) \cos \omega r]^\circ h C^{-1}. \quad (15.36)$$

Используя (15.36), мы исследовали процесс развития гармонической волны в «Новогоднюю» волну (см. разделы 3.5, 11.2 и 15.4). Для самого грубого расчета принимали, что $^\circ h C^{-1} = 6$ м, $h = 70$ м и $m = 4.5$. Результаты расчетов представлены на рис. 163.

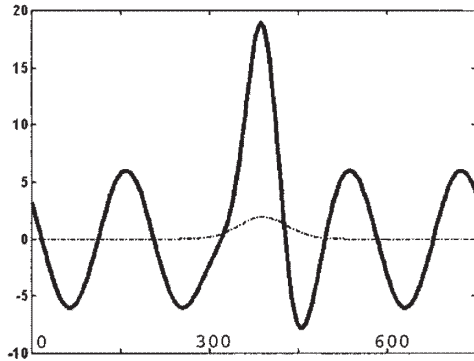


Рис. 163. Трансрезонансная эволюция гармонической длинной океанской волны в экстремальную волну.

Штрихпунктирная линия определяет резонансную полосу.

ли случай, когда сдвиг фаз между $J(r)$ и $\bar{J}(r)$ равен $5 > 2$. Если сдвиг фаз отсутствует или он равен 5, то вместо (15.36) мы имеем приближенно

$$\eta = \varepsilon h C^{-1} [1 - 3 \text{sech}^m(:^*X^*)] \cos \omega r \quad (15.36a)$$

или

$$\eta = \varepsilon h C^{-1} [1 + 3 \text{sech}^m(:^*X^*)] \cos \omega r. \quad (15.36b)$$

Таким образом, усиление волн в случае точного резонанса может быть как двухкратным, так и четырехкратным.

15.7.2. Малые делители и катастрофическое усиление гармонических волн

Мы рассмотрели выше удивительный случай самовозбуждения первой гармоники, порождающий экстремальную волну той же частоты. В общем случае экстремальная волна — результат взаимодействия различных волновых

Таким образом мы показали, что катастрофические длинные волны могут описываться простой формулой, если влияние трения и вязкости на их развитие практически отсутствует. При этом, очень крутые волновые фронты, описанные в разделе 15.2, не формируются. В весьма грубом приближении, полученное решение (15.36) соответствует выражению (15.17), которое также использовалось для описания «Новогодней» волны. Видно, что рис. 163 достаточно хорошо согласуется с рис. 155.

Двухкратный или четырехкратный рост амплитуды. Мы рассмотре-

гармоник на поверхности океана. Для рассмотрения этого взаимодействия рассмотрим случай, когда

$$G = G^{(1)} + G^{(2)}. \quad (15.37)$$

Здесь $G^{(1)}$ — линейная компонента, описывающая первичные волны, приходящие из открытого океана. Мы принимаем, что

$$G^{(1)} = \sum_{i=1}^J A_i \sin \omega_i r_i, \quad r_i = t - C_i^{-1} a - \varphi_i. \quad (15.38)$$

Здесь ω_i — угловые частоты и C_i — скорости волн, соответственно. Функция $G^{(2)}$ в (15.37) описывает поправку к волнам (15.38). Мы принимаем, что $G^{(1)} = G^{(2)}$, и изучаем взаимодействие этих составляющих. Выражение (15.38) подставляется в (12.23), где предварительно полагаем $\chi = b_1 = \beta_* = C = 0$. В результате получим:

$$B_i (G^{(1)} + G^{(2)}) + \alpha_{*i} (G^{(1)} + G^{(2)})^2 - k \alpha_{*i} (G^{(1)} + G^{(2)})_{rr} = 0. \quad (15.39)$$

Здесь $B = ghC_i^{-2} - 1 + \alpha \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 K_i h C_i^{-2}$ и $\alpha_{*i} = ghC_i^{-3} + \frac{1}{2} C_i^{-1}$ (12.22). Величины ω_i и C_i определяются следующими дисперсионными соотношениями:

$$B_i + k \alpha_{*i} \omega_i^2 = 0, \quad (15.40)$$

следующими из линеаризованного уравнения (15.39). Далее мы рассмотрим величины второго порядка. Подставляя (15.38) в (15.39) и отбрасывая малые члены $G^{(1)} G^{(2)}$ и $G^{(2)^2}$, мы запишем следующее неоднородное волновое уравнение для $G^{(2)}$:

$$\begin{aligned} & B_i G^{(2)} - k \alpha_{*i} G_{rr}^{(2)} = \\ & = -\frac{1}{2} \alpha_{*i} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^J A_i A_j [\cos(\omega_i r_i - \omega_j r_j) - \cos(\omega_i r_i + \omega_j r_j)]. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Решение уравнения (15.41) ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частных решений. Нелинейный резонанс имеет место, если некоторые гармоники

$$\cos(\omega_i r_i - \omega_j r_j) \text{ или } \cos(\omega_i r_i + \omega_j r_j) \quad (15.42)$$

удовлетворяют приближенно некоторому из дисперсионных соотношений (15.40). В этом случае в решении появятся малые делители и соответствующие частные решения будут сингулярными. Очевидно, резонансные волны будут доминировать в силу их сингулярного роста.

Таким образом, резонансное взаимодействие волн малой амплитуды может, согласно представленному решению, генерировать волны бесконечной амплитуды. Конечно, этот результат справедлив, хотя бы в какой-то мере, только в самом начале роста амплитуды волны. Когда эта амплитуда начинает

приближаться к амплитуде первичной волны, нелинейные эффекты начинают играть важнейшую роль и проведенный анализ становится несправедливым. Подобные эффекты объясняют качественно появление и развитие катастрофических волн, отличных от «одинокой волны». Одну из таких волн рассмотрим в следующем подразделе.

15.7.3. Моделирование группы волн «три сестры». Эффект дисперсии

В подразделе 15.7.1 мы рассмотрели резонансное усиление простой гармонической волны. При этом пренебрегали волнами более высокой частоты. Чтобы их учесть, мы примем, что

$$J_r = \varepsilon \cos \omega r + {}^\circ_2 \cos 2\omega r + {}^\circ_3 \cos 3\omega r. \quad (15.43)$$

Очевидно, что для этих гармоник справедливы дисперсионные соотношения (15.40), если в последних положить $\omega_2 = 2\omega$, $K_2 = 2K$ и $\omega_3 = 3\omega$, $K_3 = 3K$. Далее мы примем, что

$$\bar{J}_r = A_1 \cos \omega r + A_2 \cos 2\omega r + A_3 \cos 3\omega r. \quad (15.44)$$

С целью максимального упрощения задачи полагаем, что амплитуда A_1 меняется мало по сравнению со случаем, рассмотренным в разделе 15.7.1. Следовательно, в резонансе $A_1 = -\sqrt{253}^\circ \approx 3^\circ$ (15.34). Кроме этого при определении A_3 ограничимся рассмотрением только квадратично-нелинейного члена в (15.26) и полагаем там ${}^\circ_2 \approx {}^\circ_3 \approx 0$. В этом случае (15.26) и (15.43) дают

$$\begin{aligned} B\bar{J}_r - k\alpha_* \bar{J}_{rr} + \alpha_* \bar{J}_r^2 + (1 + 2ghC^{-2})C^{-1} \cos \omega r \bar{J}_r = \\ = -\frac{1}{2}C^{-1}(1 + 2ghC^{-2})J_r^2 - \bar{C}. \end{aligned} \quad (15.45)$$

Учитывая (15.44), переписываем (15.45) в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_2(B + 4\omega^2 k\alpha_*) \cos 2\omega r + \alpha_*(A_1 \cos \omega r + A_2 \cos 2\omega r + A_3 \cos 3\omega r)^2 + \\ + (1 + 2ghC^{-2})C^{-1} \varepsilon \cos \omega r (A_1 \cos \omega r + A_2 \cos 2\omega r + A_3 \cos 3\omega r) = \\ = -\frac{1}{2}C^{-1}(1 + 2ghC^{-2})\varepsilon^2 \cos^2 \omega r - \bar{C}. \end{aligned} \quad (15.46)$$

Далее собираем вместе постоянные и члены, содержащие $\cos 2\omega r$. Постоянные члены не рассматриваем, так как они не представляют для нас интереса. Приравняем к нулю другую сумму и получаем следующее уравнение, определяющее A_3 :

$$\begin{aligned} 2A_2(B + 4\omega^2 k\alpha_*) + (1 + 2ghC^{-2})C^{-1}A_3 = \\ = -15C^{-1}\varepsilon^2 - \alpha_* A_1^2 - \alpha_* A_1 A_3 - (1 + 2ghC^{-2})C^{-1}A_1. \end{aligned} \quad (15.47)$$

В силу (15.40), т.е. в точном резонансе, $B + 4\omega^2 k\alpha_* = 0$. Принимая далее $A_1 = -3^\circ$ (15.33) и $\alpha_* = 15C^{-1}$ (12.78), найдем искомую амплитуду:

$$A_3 \approx 4\epsilon. \quad (15.48)$$

Таким образом, вблизи резонанса возможно очень сильное усиление третьей гармоники в (15.44). Теперь, следуя подразделу 15.7.1, мы находим

$$u = (\cos \omega r - \sqrt[3]{25} \sin \omega r) {}^\circ \omega^{-1} + \frac{4}{3} {}^\circ \omega^{-1} \sin 3\omega r. \quad (15.49)$$

Выражение (15.49) учитывает сдвиг фаз, равный $5>2$ между линейной и нелинейными составляющими волны. Далее формула (15.7) дает

$$\eta = (\sin \omega r - \sqrt[3]{25} \cos \omega r) {}^\circ h C^{-1} + 4 {}^\circ h C^{-1} \cos 3\omega r + \\ + h^{-1} [(\sin \omega r - \sqrt[3]{25} \cos \omega r) {}^\circ h C^{-1} + 4 {}^\circ h C^{-1} \cos 3\omega r]^2. \quad (15.50)$$

Мы получили выражение, описывающее форму группы волн, называемых «три сестры». Рассмотрим теперь трансрезонансную эволюцию гармонической волны внутри резонансной полосы. При этом используем выражение (15.10) и следуем разделам (15.2) и (15.4). В результате (15.50) переписывается в виде:

$$\eta = [\sin \omega r - \sqrt[3]{25} \operatorname{sech}^m ({}^\circ X^*) \cos \omega r] {}^\circ h C^{-1} + 4 {}^\circ h C^{-1} \operatorname{sech}^m ({}^\circ X^*) \cos 3\omega r + \\ + h^{-1} \{ [\sin \omega r - \sqrt[3]{25} \operatorname{sech}^m (\gamma {}^\circ X^*) \cos \omega r] {}^\circ h C^{-1} + \\ + 4 {}^\circ h C^{-1} \operatorname{sech}^m ({}^\circ X^*) \cos 3\omega r \}^2. \quad (15.51)$$

При моделировании исходим из наблюдений с борта крейсера «Жанна д'Арк». Примем, что ${}^\circ h C^{-1} = 2.5$ м и $m = 4.5$. Скорее всего, глубина под крейсером была большая, поэтому третий член в (15.51) отбрасываем. Полагаем, что резонансная полоса не превышает существенно длину первичной волны.

Используя (15.51), мы исследовали процесс развития гармонической волны в группу волн «три сестры» (рис. 164).

Полученная кривая существенно, в худшую сторону, отличается от результатов расчетов, данных на рис. 156. По-видимому, это следствие допущений, принятых при анализе волн в этом подразделе.

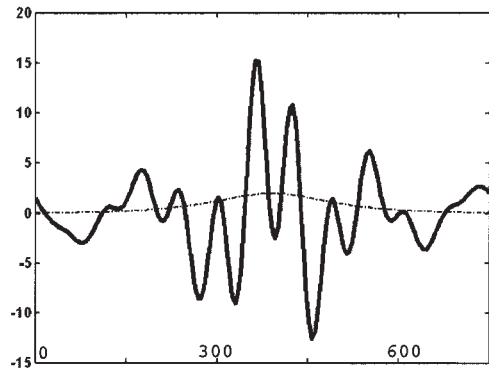


Рис. 164. Трансрезонансная эволюция гармонической океанской волны в экстремальные волны типа «три сестры». Штрихпунктирная линия определяет резонансную полосу.

15.7.4. Условие возникновения катастрофических волн

Теперь, имея некоторый опыт и результаты гармонического анализа катастрофических океанских волн, мы можем рассмотреть, приближенно, условие, при котором они могут появиться. Исходим из уравнения (12.64), записанного с использованием переменной (12.69) для случая постоянной глубины и однонаправленной волны. Пусть характеристики линейной компоненты волны J_r удовлетворяют дисперсионному соотношению (12.72):

$$\left(1 + \frac{1}{3}h^2\omega^2 C^{-2}\right)J_{rr} - (gh + \alpha\rho^{-1}\bar{\rho}U_1^2 Kh)C^{-2}J_{rr} = 0. \quad (15.52)$$

На поверхности океана существует огромное разнообразие волн, характеристики которых весьма далеки от определяемых соотношением (15.52). Вместе с тем могут быть и волны с характеристиками, почти, но не вполне, удовлетворяющими этому соотношению. Рассмотрим эти волны. Для них (15.52) дает некоторый малый остаток $4J_{rr}$. Мы будем учитывать его в (15.28). В результате (15.28) дает

$$\begin{aligned} (B + k\alpha_* K_1 + 3ghC^{-4}\varepsilon^2)\bar{J}_r + 4J_r + \alpha_*\bar{J}_r^2 + \beta_*\bar{J}_r^3 + (1 + 2ghC^{-2})C^{-1}\varepsilon\cos\omega r\bar{J}_r + \\ + 3ghC^{-4}\varepsilon^2\cos 2\omega r\bar{J}_r + 6ghC^{-4}\varepsilon\cos\omega r\bar{J}_r^2 = \\ = -\frac{1}{2}C^{-1}(1 + 2ghC^{-2})J_r^2 - 2ghC^{-4}J_r^3 - \bar{C}. \end{aligned} \quad (15.53)$$

Далее мы полагаем, что $\bar{J}_r$ и J_r определяют одну и ту же функцию, поэтому

$$J_r = w\bar{J}_r. \quad (15.54)$$

Здесь w — неизвестная постоянная. Подставляем (15.54) в левую часть уравнения (15.53). Далее рассматривается возникающее там выражение $(B + k\alpha_* K_1 + 3ghC^{-4}\varepsilon^2 + 4w)\bar{J}_r$. Полагаем, что катастрофические гармонические волны возникают, если этот член равен нулю. Это условие дает

$$4 + 4w + 3ghC^{-4}\varepsilon^2 = 0. \quad (15.55)$$

Неизвестная постоянная w может быть найдена после отыскания $\bar{J}_r$. Подчеркнем, что она не мешает приближенному определению резонансной величины $\bar{J}_r$, так как w входит в условие резонанса и в точном резонансе выпадает из уравнения (15.53). Таким образом, мы вывели приближенное условие возникновения катастрофических гармонических длинных волн. В подразделах 15.7.1 и 15.7.3 мы не привлекали внимание читателя к этому вопросу, чтобы излишне не усложнять излагаемый там материал.

15.8. Моделирование катастрофических волн составными решениями

Теперь мы вспомним, что, наряду с уравнением (12.81), мы можем использовать уравнения (12.84) и (12.85) для моделирования катастрофических волн. Здесь как пример использования этих уравнений рассмотрим (12.85). Отбрасывая в нем малые члены, получим

$$\bar{J}_r^2 + \alpha_*^{-1} B \bar{J}_r - \frac{3}{4} \alpha_*^{-1} C^{-1\sigma} \cos \omega r = 0. \quad (15.56)$$

Пусть $R = \alpha_*^{-1} B$, тогда

$$\bar{J}_r^2 + R \bar{J}_r - \frac{3}{4} \alpha_*^{-1} C^{-1\bar{\epsilon}} \cos \omega r = 0. \quad (15.57)$$

Это уравнение определяет два значения $(\bar{J}_r)_\pm$. Очевидно, что в случае достаточно малых R , т.е. в случаях наиболее интересных для нас, уравнение (15.57) для разных r имеет или вещественное или комплексное решение. Имея это в виду, мы переписываем выражение (12.86):

$$(u_r)_\pm = \pm \sqrt{\bar{\epsilon}} \cos \frac{1}{2} \omega r + (\bar{J}_r)_\pm. \quad (15.58)$$

Теперь, используя (15.7), можно вычислить два значения η для каждого r . Подчеркнем, что каждое из этих значений для малых, но различных R может быть или вещественным, или комплексным. Однако, имея в виду, что мы имеем два решения, и используя только их вещественные значения, можно составить новую непрерывную периодическую кривую. Полагаем, что она определяет искомый профиль катастрофической волны.

Результаты расчетов представлены на рис. 165 и 166. Мы предполагали, что R определяет ширину резонансной полосы. При расчетах кривых рис. 165 координата фиксировалась, а время менялось. Там верхние три картинки воспроизводят кривые, рассчитанные по (15.57) и (15.58). Звездочки определяются одним решением уравнения (15.57), сплошная толстая кривая дается другим решением. Штрихпунктирные кривые — это волна, идущая из глубин океана. Видно, что при малых R , кривые, определяемые различными решениями, частично перекрываются. Это проявление сильной нелинейности, существующей в области малых значений R . При значительном R ($R = -0.2$), оба решения расходятся, а зоны их перекрытия исчезают. При этом решение, определяемое звездочками, теряет физический смысл. В этом случае мы сосредотачиваем внимание на сплошной толстой кривой. Она имеет плоские вершины и узкие ложбины с крутым склоном. Т.е. кривая соответствует волнам, представленным на рис. 143–145, которые ранее названы столообразными. Отметим, что

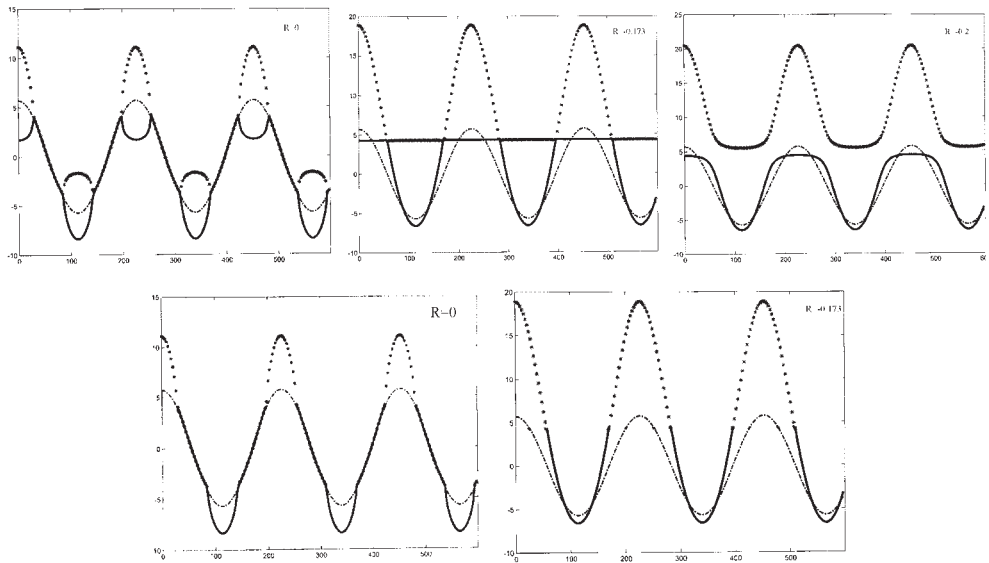


Рис. 165. Результаты моделирования волн, проходящих различные точки резонансной полосы.

Левая картина нижнего ряда соответствует левой картине верхнего ряда. Правая картина нижнего ряда соответствует центральной картине верхнего ряда.

при дальнейшем росте параметра R влияние нелинейности исчезает, а сплошная толстая кривая начинает соответствовать волне, набегающей из океана. Таким образом, катастрофическое усиление волны возможно только в определенной резонансной полосе. Для нас, конечно, это не новость. Последовательность катастрофических волн показана на нижних картинках рис. 165. Они образованы отрезками толстых линий и звездочками.

Изменение океанских волн и их катастрофическое усиление при прохождении резонансных полос иллюстрируются рис. 166. При расчетах, следуя алго-

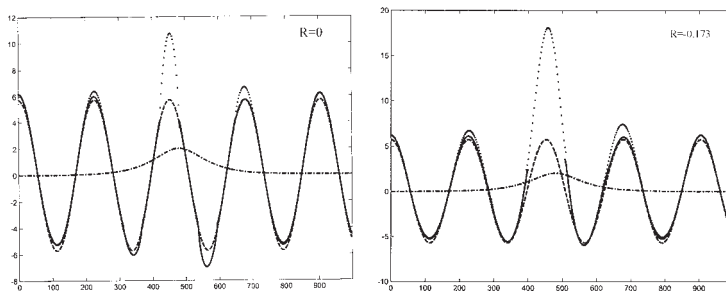


Рис. 166. Картины эволюции океанских волн в катастрофические.

ритму разделов 15.2 и 15.4, предполагаем, для простоты, что внутри резонансной полосы параметр R не меняется. Найдено, что усиление максимально при $R = -0.175$. Мы не приводим расчеты для $R = -0.2$, так как в последнем случае усиление волны практически отсутствует. Таким образом, в интервале $-0.175 > R > -0.2$ происходит резкое уменьшение амплитуды волны, соответствующее ее обрушению. Это объясняет очень быстрое исчезновение катастрофических океанских волн после их быстрого роста.

В этом разделе мы ограничились рассмотрением только «Новогодней» волны. В силу простоты алгоритма расчета читатель, при желании, может распространить это исследование на случаи других катастрофических океанских волн.

Заключительное замечание по главе. Показанное выше определенное соответствие наблюдений и теории неожиданно, так как использовалась теория длинных волн. В этом контексте отметим лишь, что известно много случаев, когда модель длинных волн удовлетворительно работает даже за пределами найденной теоретически области ее применимости. Автора удивило также то, что решения, полученные при исследовании резонансных волн в бассейнах более 10 лет назад [56], оказались полезными при изучении неожиданно возникшей проблемы катастрофических океанских волн.

16. Катастрофические волны на поверхности океана

Симплицио. Причина этого явления общеизвестна, и всякий знает, что это тяжесть.

Сальвиати. Вы ошибаетесь, синьор Симплицио, вы должны были бы сказать — всякий знает, что это называется тяжестью, но я вас спрашиваю не о названии, а о сущности вещи...

Галилей

Мы рассмотрели в главах 13, 14 и 15 случаи длинных волн, причем разделили два случая. Первый, при котором в давлении ветра содержится гармоническая составляющая, и второй, когда ветра нет или в нем не содержится вышеупомянутая гармоническая составляющая. Последние два варианта сводятся к решению подобных уравнений (12.27) и (12.81), отличающихся только значениями коэффициентов. Аналогичные случаи и варианты имеют место и в случае коротких волн.

Сам факт возникновения, быстрого роста и пусть кратковременного, но существования катастрофических волн внушает мысль, что в зонах их возникновения влияние дисперсии по каким-то причинам не является подавляющим. Влияние же нелинейности очень важно. Все это, полагаем, справедливо и для глубокого океана. Там катастрофические волны возникают, если влияние дисперсии мало или не проявляет себя. Например, если эта волна описывается одной гармоникой. Сказанное определяет основную идею, лежащую в основе исследования этой главы.

16.1. Простейшее рассмотрение вынужденных и свободных волн

Как введение в исследование океанических волн, рассмотрим простейшее приближенное решение уравнения (12.34) для волн, возбуждаемых гармоническим давлением ветра.

Введем следующее обозначение:

$$\hat{A} = \bar{V} h \alpha \omega^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2 K^2, \quad (16.1)$$

тогда после интегрирования уравнение (12.34) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{11} \Phi_a + \bar{\alpha}_{22} \Phi_{aaa} + \bar{\alpha}_1 \Phi + \bar{\alpha}_2 \Phi_{aa} = \frac{1}{2} h \omega^2 (\Phi_{aa} \Phi) - \\ - \frac{1}{3} h K \omega^2 \left[\Phi \int (\Phi_a^2)_{aa} da + 2 \Phi_{aa} \int \Phi_a^2 da \right] + \hat{A} \cos(\omega t - Ka) + \bar{C}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Пусть $\bar{C} = 0$. Решение ищем в виде, соответствующем выражению для давления ветра:

$$\Phi = \bar{B} \sin r. \quad (16.3)$$

Здесь $r = \omega t - ka$. Выражение (16.3) подставляется в уравнение (16.2). Затем приравняем там члены, содержащие $\sin r$. В результате получаем следующее кубическое алгебраическое уравнение:

$$-\bar{\alpha}_{11} K \bar{B} + \bar{\alpha}_{22} K^3 \bar{B} = \frac{1}{12} h \omega^2 \bar{B}^3 K^5 + \hat{A}. \quad (16.4)$$

Коэффициенты этого уравнения (см. (12.33), (12.35), (16.1)) сложным образом зависят от параметров воздействия ветра и течения. Эти параметры нам неизвестны. Поэтому не будем останавливаться подробно на анализе уравнения (16.4), а рассмотрим только случай точного резонанса, когда

$$-\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{22} K^2 = 0. \quad (16.5)$$

Принимая во внимание (12.33), переписываем (16.5) так:

$$[\omega^2 K^{-2} - gh - \rho^{-1} h \alpha \bar{\rho} U_1^2 K + \omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C)^3 \langle (U - C) \rangle_{\alpha_{11}}] - \\ - [\omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \langle (U - C) \rangle_{\alpha_{22}} - h K^{-3} \omega^2] K^2 = 0. \quad (16.6)$$

Уравнение (16.6) определяет дисперсионные характеристики волны, которые зависят от параметров ветра и течения. В точном резонансе уравнение (16.4) дает

$$\bar{B} = \omega^{-1} K^{-1} (-12 \bar{V} \alpha \rho^{-1} \bar{\rho} U_1^2)^{\frac{1}{3}}. \quad (16.7)$$

Мы учли (16.1). Таким образом, мы получили формулу, которая качественно, но явным образом, показывает зависимость амплитуды волны от ветровой нагрузки, а также от длины и частоты волны.

16.2. Основные соотношения и уравнения развиваемой теории катастрофических океанских волн

В этом разделе мы сделаем попытку обобщения полученных в разделе 15.4 результатов на случай глубокого океана. При этом возникает трудность описания сильного влияния дисперсии на распространение океанских волн. В случае катастрофических волн эта трудность усугубляется, так как скорости океанских волн начинают зависеть от их амплитуды [62].

16.2.1. Условие возникновения катастрофических волн

Рассмотрим уравнение (12.32), которое выведено при учете факторов ветра, океанского течения и ветер-волна взаимодействия. Эти факторы могут очень сильно влиять на возможность зарождения катастрофических океанских волн. Интегрируем уравнение (12.32) и после некоторых преобразований получим

$$\bar{\alpha}_{11} \Phi_a + \bar{\alpha}_{22} \Phi_{aaa} + \bar{\alpha}_1 \Phi + \bar{\alpha}_2 \Phi_{aa} = \frac{1}{4} h \omega^2 \Phi_a^2 - \frac{2}{9} h K \omega^2 \Phi_a^3 + H(\Phi) + \bar{C}, \quad (16.8)$$

где

$$H(\Phi) = \frac{1}{2} h \omega^2 \int \Phi_{aaa} \Phi da - \frac{2}{3} h K \omega^2 \Phi \Phi_a \Phi_{aa} - \frac{2}{3} h K \omega^2 \int \left(\Phi_{aaa} \int \Phi_a^2 da \right) da. \quad (16.9)$$

Легко видеть, что (16.8) соответствует уравнениям для длинных волн, если $H(\Phi) = 0$. В частности, при этом, после соответствующих преобразований, (16.8) можно записать в виде (12.23). Для удобства последующего анализа примем далее, что $H(\Phi)$ можно представить как сумму волны, имеющей длину и частоту, соответствующие основной волне Φ , и волн других длин и частот. Т.е. положим, что

$$H(\Phi) = m_1 \Phi_a + m_2 \Phi_{2a} + m_3 \Phi_{3a}. \quad (16.10)$$

Здесь m_1 , m_2 и m_3 — постоянные, Φ_2 — гармоника удвоенной частоты по сравнению с Φ , а Φ_3 — гармоника утроенной частоты по сравнению с Φ . Например, если Φ соответствует $\cos(\omega t - Ka)$, то Φ_2 и Φ_3 соответствуют $\cos 2(\omega t - Ka)$ и $\cos 3(\omega t - Ka)$. Чтобы еще более упростить последующий анализ примем в уравнение (16.8), что $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0$. Далее вспомним, что уравнение (16.8) выведено для волн с волновым числом K . В результате (16.8) перепишется в виде:

$$\bar{\alpha}_{11} \Phi_a + \bar{\alpha}_{22} \Phi_{aaa} = \frac{1}{4} h \omega^2 \Phi_a^2 - \frac{2}{9} h K \omega^2 \Phi_a^3 + m_1 \Phi_a + \bar{C}. \quad (16.11)$$

Полагаем далее, что

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}. \quad (16.12)$$

Причем $\Phi^{(1)}$ и $\bar{\Phi}^{(1)}$ описываются здесь одной и той же гармонической функцией. Принципиальная разница $\Phi^{(1)}$ и $\bar{\Phi}^{(1)}$ в том, что $\Phi^{(1)}$ — известная функция, характеризующая волну, перемещающуюся в направлении резонансной полосы, в то время как $\bar{\Phi}^{(1)}$ характеризует усиление этой волны в резонансной полосе. Подставляем (16.12) в (16.11) и получим

$$(\bar{\alpha}_{11} - K^2 \bar{\alpha}_{22}) \Phi_a^{(1)} + (\bar{\alpha}_{11} - K^2 \bar{\alpha}_{22}) \bar{\Phi}_a^{(1)} = \frac{1}{4} h \omega^2 (\Phi_a^{(1)} + \bar{\Phi}_a^{(1)})^2 - \\ - \frac{2}{9} h K \omega^2 (\Phi_a^{(1)} + \bar{\Phi}_a^{(1)})^3 + m_1 (\Phi_a^{(1)} + \bar{\Phi}_a^{(1)}) + \bar{C}. \quad (16.13)$$

Мы рассматриваем гармонические волны и в соответствии с этим использовали в (16.13) следующее равенство:

$$\bar{\Phi}_{aaa}^{(1)} = -K^2 \bar{\Phi}_a^{(1)}. \quad (16.14)$$

На поверхности океана существует много почти гармонических волн. Среди них могут быть и волны с характеристиками почти, но не вполне, удовлетворяющими следующему условию:

$$\bar{\alpha}_{11} - K^2 \bar{\alpha}_{22} = 0. \quad (16.15)$$

Остается некоторое малое расхождение $\bar{4}$, а именно:

$$\bar{\alpha}_{11} - K^2 \bar{\alpha}_{22} = \bar{4}. \quad (16.16)$$

В этом случае уравнение (16.13) принимает вид:

$$\bar{\Delta} \Phi_a^{(1)} + (\bar{4} - m_1) \bar{\Phi}_a^{(1)} = \frac{1}{4} h \omega^2 (\Phi_a^{(1)} + \bar{\Phi}_a^{(1)})^2 - \\ - \frac{2}{9} h K \omega^2 (\Phi_a^{(1)} + \bar{\Phi}_a^{(1)})^3 + m_1 \Phi_a^{(1)} + \bar{C}. \quad (16.17)$$

Напомним, что $\bar{\Phi}^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ определяются одной и той же гармонической функцией, поэтому

$$\Phi^{(1)} = \bar{w} \bar{\Phi}^{(1)}. \quad (16.18)$$

Подставляем (16.18) в (16.17) и получим

$$\left(\bar{4} + \bar{4} \bar{w} - m_1 - m_1 \bar{w} + \frac{2}{3} h K \omega^2 \Phi_a^{(1)2} \right) \bar{\Phi}_a^{(1)} = \frac{1}{4} h \omega^2 (\Phi_a^{(1)} + \bar{\Phi}_a^{(1)})^2 - \\ - \frac{2}{9} h K \omega^2 (\Phi_a^{(1)3} + 3 \Phi_a^{(1)} \bar{\Phi}_a^{(1)2} + \bar{\Phi}_a^{(1)3}) + \bar{C}. \quad (16.19)$$

Полагаем, что катастрофические гармонические волны возникают, если постоянная составляющая коэффициента $(\bar{4} + \bar{4} \bar{w} - m_1 - m_1 \bar{w} + \frac{2}{3} h K \omega^2 \Phi_a^{(1)2})$ левой части этого уравнения равна нулю. Чтобы пояснить это положение, рассмотрим случай, когда

$$\Phi_a^{(1)} = A_1 \cos \omega t. \quad (16.20)$$

Тогда условие возникновения катастрофической гармонической волны примет вид:

$$\bar{4} + 4\bar{w} - m_1 - m_1\bar{w} + \frac{1}{3}hK\omega^2 A_1^2 = R. \quad (16.21)$$

Здесь R — трансрезонансный параметр. Ниже для простоты мы будем рассматривать случай точного резонанса, т.е. полагать $R = 0$. Важно подчеркнуть нелинейный характер условия (16.21), так как оно зависит от квадрата амплитуды набегающей на резонансную полосу волны. Кроме этого в (16.21) входит величина m_1 , которая определяется нелинейным соотношением (16.10). При учете (16.21) уравнение (16.19) запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}hK\omega^2 A_1^2 \cos 2\omega r \bar{\Phi}_a^{(1)} &= \frac{1}{4}h\omega^2 (A_1 \cos \omega r + \bar{\Phi}_a^{(1)})^2 - \\ &- \frac{2}{9}hK\omega^2 (A_1^3 \cos^3 \omega r + 3A_1 \cos \omega r \bar{\Phi}_a^{(1)^2} + \bar{\Phi}_a^{(1)^3}) + \bar{C}. \end{aligned} \quad (16.22)$$

Таким образом, мы определили приближенно условие (16.21) для возникновения катастрофической гармонической океанской волны. Катастрофическая волна существует, когда выполняется условие резонанса, т.е. только внутри некоторой резонансной полосы, существование которой зависит от многих параметров. По-видимому, условие (16.21) имеет место в течение очень короткого времени движения волны. После быстрого достижения огромной высоты волны теряют устойчивость и мгновенно разрушаются, поэтому на поверхности океана они напоминают мгновенно возникающие и исчезающие уединенные, а не гармонические волны.

16.2.2. Вывод основного уравнения

Обратим внимание читателя еще раз на то, что первичная гармоническая волна (например, (16.20)) в силу нелинейности уравнения (16.22) может не только самоусиливаться, но также порождать вынуждающие волны удвоенной и утроенной частоты. Таким образом, появляется возможность перекачивания энергии первичной волны в волны удвоенной и утроенной частоты, если таковые существуют на поверхности океана. Чтобы исследовать возможность и результат подобного перекачивания, мы примем, что движущаяся к резонансной полосе волна содержит две гармоники — основную гармонику и кратную ей гармонику много меньшей амплитуды.

В разделе 6.6 выведены уравнения для одной волны, распространяющейся по поверхности глубокого океана. Таким образом они не могут описать обмен энергией между волнами разной длины и частоты. Чтобы иметь возможность исследовать влияние перекачки энергии от одной гармонической волны в дру-

гую, мы здесь обобщим уравнения раздела 6.6 на случай двух поверхностных волн. Следуя разделу 6.6, мы примем, что

$$w = \bar{\eta} \beta \sinh K(h - c) + \eta^{(n)} \beta^{(n)} \sinh nK(h - c). \quad (16.23)$$

Здесь $\bar{\eta}$ описывает поверхностную волну основной гармоники, $\eta^{(n)}$ описывает поверхностную волну кратной (кратность n) частоты. Введены следующие обозначения:

$$\beta = -\sinh^{-1}(Kh) \text{ и } \beta^{(n)} = -\sinh^{-1}(nKh). \quad (16.24)$$

Далее (16.23) подставляется в (6.46). В результате получим уравнение, содержащее члены, зависящие как от $\bar{\eta}$ или $\eta^{(n)}$, а также и от произведений этих величин. Чтобы максимально упростить анализ, примем, что эти произведения не могут качественно изменить характер решения полученного уравнения, и, в частности, характер поверхностного волнения. В результате, следуя разделу 6.6, мы записываем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Phi_{tt} - g h \Phi_{aa} - h K^{-1} \Phi_{taa} + \Phi_{tt}^{(n)} - g h \Phi_{aa}^{(n)} - h n^{-1} K^{-1} \Phi_{taa}^{(n)} = \frac{1}{2} h K^2 (\Phi_{tt} \Phi)_{aa} - \\ - \frac{1}{3} h K^3 \left[\Phi \int (\Phi_a^2)_{tt} da + 2 \Phi_{tt} \int \Phi_a^2 da \right]_{aa} + \\ + \frac{1}{2} h n^2 K^2 (\Phi_{tt}^{(n)} \Phi^{(n)})_{aa} - \frac{1}{3} h n^3 K^3 \left[\Phi^{(n)} \int (\Phi_a^{(n)2})_{tt} da + 2 \Phi_{tt}^{(n)} \int \Phi_a^{(n)2} da \right]_{aa} + \\ + {}^{-1} p_{31}(a, t, c = 0) - {}^{-1} p_{31}(a, t, c = h) + {}^{-1} h p_{0,aa}. \end{aligned} \quad (16.25)$$

Здесь в соответствии с (6.23)

$$\Phi_a = \bar{\eta} \text{ и } \Phi_a^{(n)} = \eta^{(n)}. \quad (16.26)$$

Если внешнее давление равно нулю и поверхностное трение отсутствует, то уравнение (16.25) описывает волны зыби. Вместе с тем уравнение (16.25) можно переписать в виде, учитывающем влияние ветра. Для этого, следуя разделу 12.2, где было выведено уравнение (12.17), справедливое для основной гармоники, мы приведем (16.25) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Phi_{tt} - g h \Phi_{aa} - h K^{-1} \Phi_{taa} + \Phi_{tt}^{(n)} - g h \Phi_{aa}^{(n)} - h n^{-1} K^{-1} \Phi_{taa}^{(n)} = \\ = \frac{1}{2} h K^2 (\Phi_{tt} \Phi)_{aa} - \frac{1}{3} h K^3 \left[\Phi \int (\Phi_a^2)_{tt} da + 2 \Phi_{tt} \int \Phi_a^2 da \right]_{aa} + \\ + \frac{1}{2} h n^2 K^2 (\Phi_{tt}^{(n)} \Phi^{(n)})_{aa} - \frac{1}{3} h n^3 K^3 \left[\Phi^{(n)} \int (\Phi_a^{(n)2})_{tt} da + 2 \Phi_{tt}^{(n)} \int \Phi_a^{(n)2} da \right]_{aa} + \\ + {}^{-1} (U - C) \left((U - C) \left(-\alpha_1 h^{-1} \Phi_t + \alpha_{11} \Phi_{ta} - \alpha_2 h^{-1} \Phi_{taa} + \alpha_{22} \Phi_{taaa} \right) + \right. \\ \left. + {}^{-1} (U - C) \left((U - C) \left(-\alpha_1 h^{-1} \Phi_t^{(n)} + \alpha_{11} \Phi_{ta}^{(n)} - \alpha_2 h^{-1} \Phi_{taa}^{(n)} + \alpha_{22} \Phi_{taaa}^{(n)} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (16.27)$$

Мы здесь не учитываем гармонической составляющей ветра. Далее рассматриваются однонаправленные волны. Примем, что

$$\Phi = \Phi(\omega t - Ka) \text{ и } \Phi^{(n)} = \Phi^{(n)}(n\omega t - nKa). \quad (16.28)$$

Затем, следуя подразделу 12.3.2, запишем уравнение, которое обобщает (12.32):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{11} \Phi_{aa} + \alpha_{11}^{(n)} \Phi_{aa}^{(n)} + \bar{\alpha}_{22} \Phi_{aaaa} + \alpha_{22}^{(n)} \Phi_{aaaa}^{(n)} + \bar{\alpha}_1 \Phi_a + \alpha_1^{(n)} \Phi_a^{(n)} + \bar{\alpha}_2 \Phi_{aaa} + \alpha_2^{(n)} \Phi_{aaa}^{(n)} = \\ = \frac{1}{2} h \omega^2 (\Phi_{aa} \Phi)_a - \frac{1}{3} h K \omega^2 \left(\Phi \Phi_a \Phi_{aa} + 2 \Phi_{aa} \int \Phi_a^2 da \right)_a + \\ + \frac{1}{2} h n^2 \omega^2 (\Phi_{aa}^{(n)} \Phi^{(n)})_a - \frac{1}{3} h n^3 K \omega^2 \left[\Phi^{(n)} (\Phi_a^{(n)})^2 \right]_a + 2 \Phi_{aa}^{(n)} \int \Phi_a^{(n)2} da \Big]_a. \end{aligned} \quad (16.29)$$

Здесь $\Phi_i^{(n)} = -\omega K^{-1} \Phi_a^{(n)}$. Коэффициенты $\bar{\alpha}_{11}$, $\bar{\alpha}_{22}$, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ определены ранее (12.33), и

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(n)} &= \omega^2 K^{-2} - gh + \omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_{11}, \\ \alpha_{22}^{(n)} &= \omega K^{-1} \rho^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_{22} - h n^{-1} K^{-3} \omega^2, \\ \bar{\alpha}_1 &= -\omega (Kh \rho)^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_1, \\ \bar{\alpha}_2 &= -\omega (Kh \rho)^{-1} \bar{\rho} (U - C) \|(U - C)\| \alpha_2. \end{aligned} \quad (16.30)$$

Введенные коэффициенты позволили достаточно компактно записать уравнение, описывающее распространение двух гармоник по поверхности океана. Далее мы пренебрегаем влиянием трения, т.е. полагаем, что $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1^{(n)} = 0$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2^{(n)} = 0$. Тогда (16.29) дает

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{11} \Phi_{aa} + \bar{\alpha}_{22} \Phi_{aaaa} &= \frac{1}{2} h \omega^2 (\Phi_{aa} \Phi)_a - \frac{1}{3} h K \omega^2 \left(\Phi \Phi_a \Phi_{aa} + 2 \Phi_{aa} \int \Phi_a^2 da \right)_a - \\ &- \alpha_{11}^{(n)} \Phi_{aa}^{(n)} - \alpha_{22}^{(n)} \Phi_{aaaa}^{(n)} + \frac{1}{2} h n^2 \omega^2 (\Phi_{aa}^{(n)} \Phi^{(n)})_a - \\ &- \frac{1}{3} h n^3 K \omega^2 \left[\Phi^{(n)} (\Phi_a^{(n)})^2 \right]_a + 2 \Phi_{aa}^{(n)} \int \Phi_a^{(n)2} da \Big]_a. \end{aligned} \quad (16.31)$$

Теперь мы можем приступить к рассмотрению катастрофических волн, описываемых двумя гармониками. Первым делом отметим, что уравнение (16.31) вполне аналогично (12.32). Отличие только в добавочных членах, которые мы с самого начала определили как малые. Теперь, повторяя последовательно все операции подраздела 16.2.1 и используя те же обозначения, мы можем записать (16.31) в виде:

$$\frac{1}{3} h K \omega^2 \varepsilon^2 \cos 2\omega r \Phi_a^{(2)} = \frac{1}{4} h \omega^2 \left(\cos \omega r + \Phi_a^{(2)} \right)^2 -$$

$$-\frac{2}{9}hK\omega^2\left(\varepsilon^3\cos^3\omega r+3^\circ\cos\omega r\Phi_a^{(2)^2}+\Phi_a^{(2)^3}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}hn^2\omega^2\Phi_{aa}^{(n)}\Phi^{(n)}-\frac{1}{3}hn^3K\omega^2\left[\Phi^{(n)}(\Phi_a^{(n)^2})_a+2\Phi_{aa}^{(n)}\int\Phi_a^{(n)^2}da\right]+\bar{C}. \quad (16.32)$$

В (16.32) мы положили, что $\alpha_{11}^{(n)} = \alpha_{22}^{(n)} = 0$. Если $\Phi^{(n)} = 0$, то (16.32) приводит к (16.22). Отметим, что (16.32) имеет место при точном резонансе, когда выполняется условие (16.21). Таким образом, надо найти слагаемые $\bar{\Phi}^{(1)}$ и $\bar{\Phi}^{(n)}$ суммы:

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \bar{\Phi}^{(1)} + \bar{\Phi}^{(n)}. \quad (16.33)$$

Здесь мы учли (16.12) и (16.23). Теперь примем во внимание, что компоненты $\bar{\Phi}^{(1)}$ и $\bar{\Phi}^{(n)}$ усиливаются только внутри резонансной полосы, где (16.21). Поэтому, следуя главам 15 и 16, мы записываем следующее выражение, определяющее катастрофическую океанскую волну:

$$\eta = \Phi_a^{(1)} + (\bar{\Phi}_a^{(1)} + \bar{\Phi}_a^{(n)})\text{sech}^m(\gamma^* X^*). \quad (16.34)$$

Еще раз подчеркиваем качественный характер нашего исследования. Это, в первую очередь, определяется тем, что мы пренебрегли при выводе (16.32) взаимодействием первичной и усиленной гармонических волн. Формула (16.34), в которую входят значения $\Phi_a^{(1)}$, $\bar{\Phi}_a^{(1)}$, $\bar{\Phi}_a^{(n)}$, определяемые только для точного резонанса, вместе с тем будет использоваться ниже для приближенного рассмотрения трансрезонансной эволюции катастрофических океанских волн.

16.3. Моделирование катастрофических океанических волн

Уравнение (16.32) приближенно описывает распространение двух поверхностных гармонических волн. Внутри резонансной полосы энергия первой резонансно усиливающейся гармоники может начать перераспределяться на вторую гармонику. Вторая гармоника начинает как бы высасывать энергию первой гармоники. Описывает ли этот процесс возбуждение наблюдаемых катастрофических волн?

Моделирование одиночных волн одной гармоникой. Как первый шаг анализа рассмотрим гармоническую волну. Следовательно, примем в (16.32), что $\Phi^{(n)} = 0$. В этом случае, так как $\Phi_a^{(1)}$ задана выражением (16.20), наша задача — найти второе слагаемое в (16.12). Полагаем, что

$$\bar{\Phi}_a^{(1)} = A_2 \cos(\omega t - Ka). \quad (16.35)$$

Подставляем (16.35) в (16.32) и, рассматривая только первую гармонику, находим $A_2 \approx -3A_1$. Теперь, следуя главам 14 и 15, запишем следующее выражение для катастрофической волны, проходящей резонансную полосу:

$$\eta = A_1 \cos(\omega t - Ka) - 3A_1 \operatorname{sech}^m(\gamma X^*) \cos(\omega t - Ka). \quad (16.36)$$

Таким образом, в точном резонансе, когда $\operatorname{sech}(\gamma X^*) = 1$, волна может усиливаться в два раза. Теперь примем, что между волнами $\Phi^{(1)}$ и $\overline{\Phi}^{(1)}$ существует сдвиг фазы равный, $5 > 2$, тогда (16.36) запишется в виде:

$$\eta = A_1 \sin(\omega t - Ka) - 3A_1 \operatorname{sech}^m(\gamma X^*) \cos(\omega t - Ka). \quad (16.37)$$

Если сдвиг фазы между $\Phi^{(1)}$ и $\overline{\Phi}^{(1)}$ равен 5, то имеет место четырехкратное усиление волны, т.е.

$$\eta = -A_1 \cos(\omega t - Ka) - 3A_1 \operatorname{sech}^m(\gamma X^*) \cos(\omega t - Ka). \quad (16.38)$$

Таким образом, согласно нашему сугубо приближенному анализу, усиление волны внутри резонансной полосы может быть от двух до четырех раз. В целом, это согласуется с данными наблюдений [3] и расчетами, данными для длинных волн (см. главу 15). Таким образом, согласно представленной теории, высота волны «одинокая башня», возникающей на поверхности глубокого океана, может составлять от двух до четырех высот волн, окружающих резонансную полосу.

Влияние волны удвоенной частоты. В этом случае примем во внимание вторую гармонику, которую ищем в следующем виде:

$$\Phi_a^{(2)} = \overline{A}_2 \cos 2(\omega t - Ka). \quad (16.39)$$

Выражение (16.39) вносим в (16.32). Приравняв там к нулю члены, содержащие вторую гармонику, найдем уравнение для $\overline{A}_2$. Откуда получаем

$$\overline{A}_2^3 = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2)^2 K^{-1}. \quad (16.40)$$

Теперь мы можем записать выражение для моделирования катастрофических волн, учитывающее вторую гармонику. Например, (16.34) и (16.37) дают

$$\begin{aligned} \eta = & A_1 \sin(\omega t - Ka) - 3A_1 \cos(\omega t - Ka) + \\ & + \sqrt[3]{-\frac{1}{4}(A_1 + A_2)^2 K^{-1}} \cos 2(\omega t - Ka) \frac{1}{2} \operatorname{sech}^m(\gamma X^*). \end{aligned} \quad (16.41)$$

Аналогичным образом можно модифицировать выражения (16.36) и (16.38).

Влияние волны утроенной частоты. Примем во внимание третью гармонику:

$$\overline{\Phi}_a^{(3)} = \overline{A}_3 \cos 3(\omega t - Ka). \quad (16.42)$$

Она подставляется в (16.32), где далее группируем члены, содержащие $\cos 3(\omega t - Ka)$. Решая соответствующее уравнение, находим амплитуду этой гармоники:

$$\bar{A}_3 \approx \frac{1}{3}(A_1 + A_2). \quad (16.43)$$

Теперь принимая $\bar{A}_2 \approx -3A_1$, мы можем записать следующее выражение:

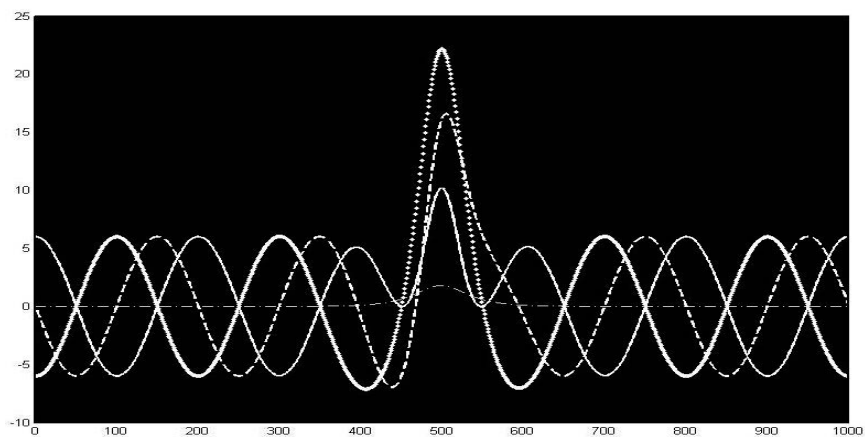
$$\eta = A_1 \sin(\omega t - Ka) - \frac{1}{6} 3A_1 \cos(\omega t - Ka) + \frac{2}{3} \cos 3(\omega t - Ka) \frac{1}{2} \operatorname{sech}^m(: X^*). \quad (16.44)$$

Аналогичным образом можно модифицировать выражения (16.34) и (16.36).

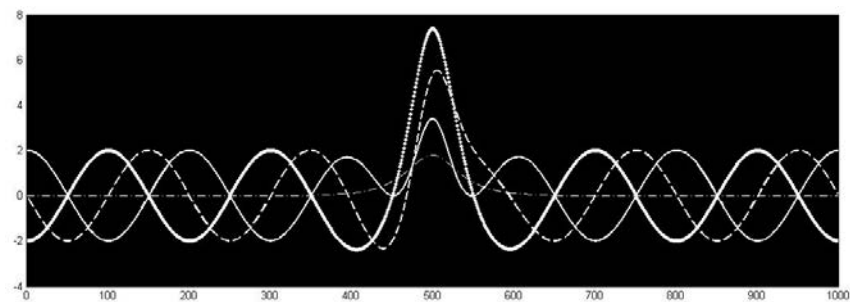
Результаты расчетов. Они представлены на рис. 167. Мы принимали, что $A_1 = 2$ м или 6 м, $m = 1$, длина волны 200 м. Кривые картины А рассчитаны для $A_1 = 6$ м, картины В рассчитаны для $A_1 = 2$ м. Там же сплошные кривые рассчитаны по формулам (16.36), пунктирные кривые по (16.37) и точки определяют волну (16.38). Видно, что может иметь место очень сильное, почти 3-х кратное, усиление волны в резонансной полосе. В целом, этот результат согласуется с расчетами, представленными в главе 15, где рассматривались длинные волны.

Нижние картинки рассчитаны по формуле (16.41) (С, левая сторона) и (16.44) (D, правая сторона). Видно, что вторая и третья гармоники могут существенно сказаться как на форме, так и амплитуде катастрофических океанских волн. В целом, волновые профили рис. 167 качественно соответствуют экстремальным волнам, возбуждаемым в случае, когда начальная линейная волна имеет амплитуду, близкую 2 м (рис. 153, 154 и 1.4 (е) [3]). Кривые, нанесенные точками и пунктирами на рис. 167 А, в целом, описывают «Новогоднюю волну». Мы не приводим здесь расчетов случаев, когда ширина резонансной полосы достигает нескольких длин волны. Именно тогда высота волн достигает 4-х кратного усиления. Видимо, это редчайший случай, так как перед подобным усилением волна становится неустойчивой и разрушает саму резонансную полосу.

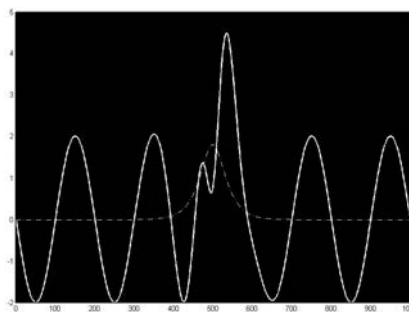
Таким образом, в этой главе мы получили резонансное условие (16.21), при выполнении которого основная гармоника катастрофически усиливается. При этом появляется возможность усиления другой, кратной первой, гармоники, так как в силу нелинейности в управляющем уравнении (16.32) появляются вынуждающие члены с частотами, кратными частоте основной гармоники. Конечно, мы рассмотрели в значительной степени идеализированный случай, но он иллюстрирует возможность зарождения и усиления на водной поверхности высоких гармоник.



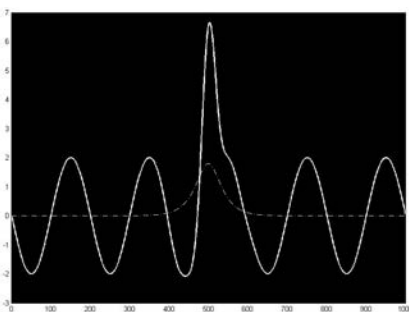
A



B



C



D

Рис. 167. Примеры трансрезонансной эволюции океанской волны в катастрофическую волну.
Штрихпунктирные линии определяют резонансные полосы.

16.4. Заключение по главам 11–16

Замечание Дарвина о гигантской волне, встреченной у мыса Горн, рассмотренное в свете публикаций последних десяти лет, посвященных экстремальным волнам, оказалось решающим толчком для проведения исследования, результаты которого изложены в главах 11–16 книги. Уже первое знакомство с проблемами, связанными с появлением экстремальных поверхностных волн, обнаружило исключительную важность этих проблем, для которых еще нет устоявшихся концепций и решений. Было решено для описания катастрофических волн использовать результаты наших публикаций за 1970 [49] и 1998 [56] годы, в которых изучалась возможность резонансного двух- и более кратного усиления волн в газе и на поверхности жидкости.

Мы приняли как догму некоторые причины, лежащие в основе возникновения катастрофических волн. К ним отнесены эффект резонанса как механизма усиления волн и эффект нелинейности как механизма, ограничивающего рост волн. Таким образом, задача была в раскрытии некоторых механизмов зарождения этих волн, но не в исследовании неизмеримо более сложной проблемы взаимодействия океан-атмосфера. Поэтому мы ограничились только простейшим анализом этого взаимодействия, который, вместе с тем, качественно показал возможность усиления океанских волн ветром (см. раздел 12.4, главы 13 и 14). Этого вполне достаточно для начала нашего исследования. Далее внимание читателя акцентируется на возможности самовозбуждения катастрофических волн, на разделении механизмов, ответственных за появление одиночных волн, «трех сестер» или «белой стены» воды. При этой огромной важности проблема детального исследования влияния ветра и течения воды, которая в нашем исследовании сводится к анализу дифференциальных или алгебраических уравнений, уходит в тень. В окончательных выражениях для катастрофических волн различной формы влияние ветра и течения как бы отсутствует, так как оно спрятано в выражение для коэффициентов уравнений, которые при расчетах детально не расшифровываются. Исследование влияния этих коэффициентов — это область специального исследования, любой результат которого не должен, по нашему мнению, изменить описанные механизмы возбуждения катастрофических волн.

Отметим некоторую искусственность развитого выше метода исследования катастрофических волн. Дело в том, что в исходные уравнения вида (8.81) или (12.77) входят постоянные интегрирования $\bar{C}$. Легко видеть, что при $\bar{C}=0$ некоторые важные для нашего исследования частные случаи этих уравнений имеют мнимые решения. Чтобы избежать этого мы, следуя Галиеву

(Изв. АН СССР, МТТ, 1972, №4, 80), подбираем $\bar{C}$ специальным образом, так чтобы решение было вещественным.

Квадратичные и кубические нелинейные члены в волновых уравнениях могут формировать волны различных типов. Квадратичные члены определяют волны с крутым, даже разрывным фронтом. Кубическая нелинейность может порождать катастрофические волны, имеющие складки на их профилях (см. также часть V). В общем случае, амплитуда кубически-нелинейных волн, возбуждаемых в конечных резонаторах, может существенно превосходить амплитуду квадратичных резонансных волн [54, 55, 57, 63, 67].

Появление катастрофических океанских волн, имеющих крутые, даже складчатые фронты, удивительно, так как влияние дисперсии на волны в глубоком океане велико, и, согласно этому, экстремальные океанские волны там могут возникнуть только благодаря случайному наложению гармонических волн. Однако, согласно развитой теории, они могут возникать вполне закономерно в следующих случаях. Во-первых, когда глубина не превышает половины длины волны. Тогда, если параметры волны, ветра и ветер-волна взаимодействия удовлетворяют условию резонанса ($|R| \approx 1$), то волна может усилиться и приобрести очень крутой фронт. Такие волны описываются развитой в книге теорией нелинейных, слабо дисперсионных волн (раздел 6.7 и глава 8). Такие волны могут развиваться, например, в Северном море. Во-вторых, когда на поверхности океана возникают слои воды, отличающиеся механическими свойствами. Такие слои, достигающие километровой и более длины, открыты в последние десятилетия. Они могут образовывать резонансные полосы. Как и в первом случае, возникающие там поверхностные волны могут быть описаны как нелинейные, длинные, слабо дисперсионные волны. Сказанное не отменяет возможность появления катастрофических волн на поверхности глубокого, неизменного по глубине, океана, однако фронт таких океанских волн не может быть крутым. Эти волны описываются одной или двумя гармониками. Влияние ветра, течений и нелинейности на возможность появления этих волн, видимо, очень существенно. При определенном сочетании указанных факторов океанские волны умеренной высоты трансформируются в катастрофические. Математически это приводит к тому, что указанные факторы начинают определять дисперсионное соотношение для волн на глубокой воде. Волна возникает, если выполняется условие резонанса (16.21).

Возникнув, катастрофическая волна меняет окружающую среду (воздушные потоки, приповерхностные и волновые характеристики океана). Это приводит к нарушению условий резонанса и мгновенному исчезновению волны.

Таким образом, появление резонансных условий и их реализация в открытом океане — редкое и кратковременное событие, поэтому волны, следующие за катастрофической, обычно не усиливаются. Исключение составляют «три сестры». Конечно, сказанное в этом параграфе не относится к прибрежным волнам и волнам над топографиями, где условия для волнового резонанса выполняются много чаще.

Проведенный в главах 11–16 анализ имеет, в первую очередь, качественный характер. Мы только наметили направления дальнейших исследований, объяснив появление катастрофических океанских волн резонансными эффектами. Вместе с тем мы полагаем, что представленные решения описывают важнейшие с точки зрения приложений характеристики волн, такие как крутизна фронтов и амплитуда волн. Это позволяет нам, в соответствии с планом исследования, данным в 12.5, перейти из плоскости теоретического исследования и моделирования нелинейных волн в не менее важную область исследования физических процессов, которые могут определять эффект воздействия катастрофических волн на корпуса судов.

17. Экстремальное взаимодействие волны с корпусом судна

Наука построена из фактов, как дом из камней. Но коллекция фактов не больше наука, чем куча камня — дом.

Пуанкаре

17.1. Экстремальные нагрузки на корпус судна, вызванные поверхностными волнами

Результаты действия поверхностной волны на корпус судна зависят от многих обстоятельств, но, видимо, в первую очередь, от массы и скорости со-

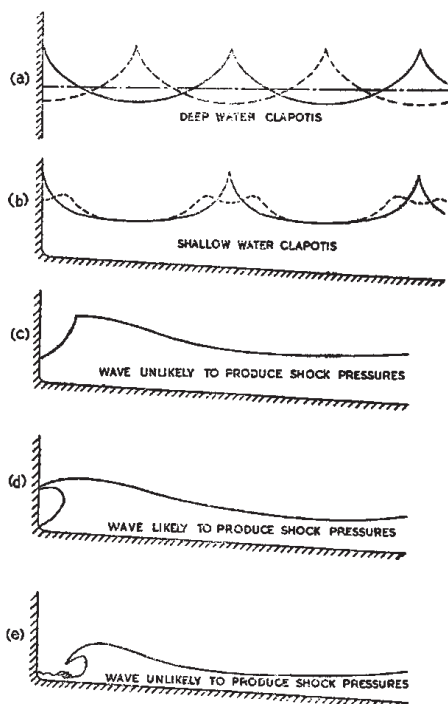


Рис. 168. Виды воздействий, которым может быть подвергнута вертикальная преграда со стороны волн на воде различной глубины. Ситуация, изображенная на (d), соответствует возникновению на преграде самого высокого давления [40].

ударяющихся масс. Современные суда движутся с высокой скоростью и, если корпус такого судна испытывает воздействие экстремальной волны в момент ее опрокидывания, то на корпусе возникает импульс очень мощного давления. Его с полным правом можно сравнить с действием сильного взрыва на корпус. В результате не исключено разрушение самых прочных корпусов [3].

Чтобы понять механизм действия поверхностной волны на корпус, рассмотрим результаты модельных экспериментов, приведенных в [40]. В экспериментах воздействию волн подвергалась вертикальная стена, на поверхности которой замерялось давление.

Оказалось, что давление волны не велико, если волна гармоническая и распространяется над значительной глубиной. Давление остается не чрезмерным, даже если волна становится кноидальной или имеющей достаточно крутой фронт (рис.168 (a)–(c)).

С другой стороны, возникающее на преграде давление остается довольно маленьким, если волна опрокидывается далеко от стенки (рис.168 (е)). Во всех перечисленных случаях время изменения давления может измеряться секундами и давление можно определить как почти статическое. Однако эксперименты показали, что имеется случай, для которого давление на преграде резко увеличивается. Это увеличение имеет место при опрокидывании волны (рис.168 (d)). Таким образом, если волна не опрокидывается на преграду или опрокидывается, но достаточно далеко от нее, то на преграде может возникнуть довольно высокое, длящееся до нескольких секунд, но не чрезмерное квазистатическое давление. Если, однако, воздействие воды происходит в некоторый особый момент опрокидывания, то очень высокие давления могут возникать в течение времени порядка 0.01 секунд. Время возрастания давления может быть порядка 0.001 секунды. Возникает импульсное давление, которое можно сопоставить с давлением при взрыве на преграде или около нее.

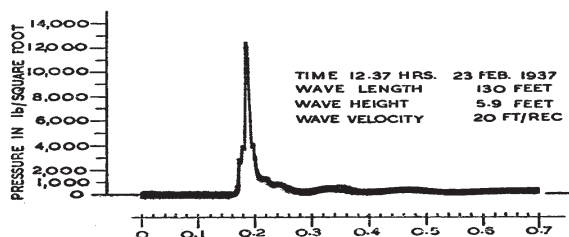


Рис. 169. Давление на вертикальную стену, вызванное опрокидывающимися волнами. Максимальное давление превышает 12.700 фунтов на квадратный фут. Время — в секундах [40].

В экспериментах, описанных в [40], давление измерялось на поверхности вертикальной стены, погруженной в море на 1 м. Пьезоэлектрические датчики измеряли давление в точке, расположенной на 0.64 м ниже среднего уровня моря, и в точках, расположенных на 0.33 м и 1.2 м выше среднего уровня моря. Некоторые волны (меньше, чем пять из ста) оказывали высокое давление. Давления достигали своих максимумов за время от 0.005 сек до 0.05 сек. Максимальное давление 0.68 МПа было в наинижней точке (см. рис. 169); в промежуточной точке оно было 0.29 МПа; в то время как в высшей точке его удавалось очень редко регистрировать. Профиль давления приближенно описывается показательной функцией.

Пример изменения давления на преграду дан на рис. 170. Возникновение пиков давления сильно зависит от множества случайных обстоятельств, поэтому предсказать величину максимального давления и момент его возникновения практически невозможно.

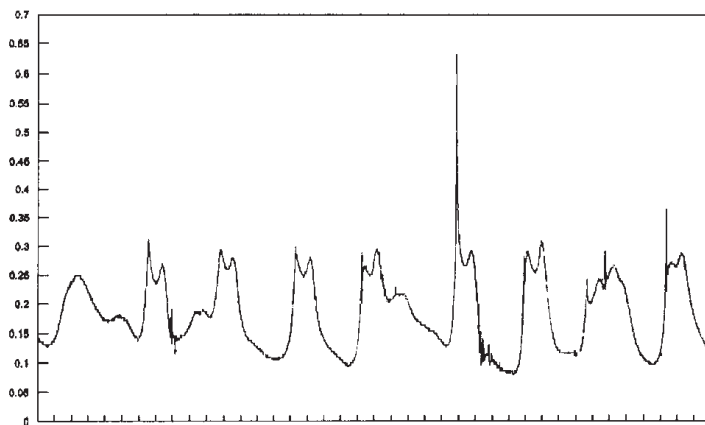


Рис. 170. Изменение волнового давления на преграду [42].

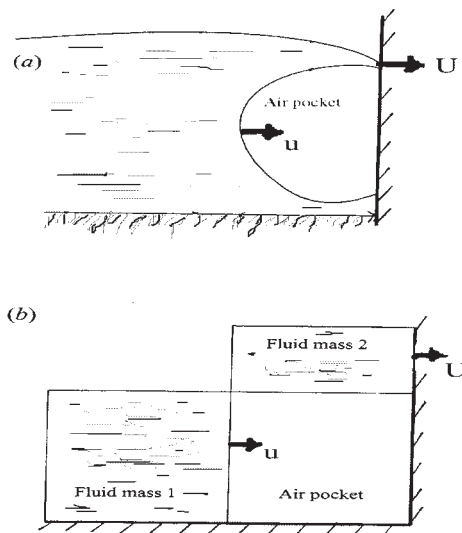


Рис. 171. Картина нагружения преграды опрокидывающейся волной (a) и ее грубая схема (b) [41].

При опрокидывании волна захватывает некоторый объем воздуха, прилегающий к преграде. Этот объем часто называют воздушной «ловушкой» или «подушкой» или «карманом» (рис.171). Эффект захваченного атмосферного воздуха может быть очень важен [17, 40–42]. Он может существенно уменьшить величину давления. Этот эффект, возможно, объясняет редкость гибели судов из-за удара поверхностных океанских волн по корпусу. Действительно, из-за захваченного в ловушку (карман) атмосферного воздуха судно испытывает воздействие со стороны смеси вода-воздух вместо действия гидравлического удара. В то же самое время обнаружено, что самое большое давление возникает, когда количество воздуха, ограниченного

движущимся фронтом волны и преградой мало, но не нуль. По-видимому, это связано с тем, что малый слой воздуха позволяет фронту волны разогнаться и, вместе с тем, количество воздуха слишком мало, чтобы сильно изменить плотность воды на фронте волны.

Мы подчеркиваем, что данные, представленные выше [40], согласуются хорошо с недавними исследованиями [41–43]. Переграйн [42] отметил, что «В лаборатории пик давления существует в течение приблизительно 1 миллисекунды, а длительность пикового давления от 10 до 100 миллисекунд». Таким образом, профиль и продолжительность импульсного давления от сильных поверхностных волн может напоминать возникающие при подводных взрывах [21, 63].

Вместе с тем заметим, что продемонстрированное выше высокое давление — только одна шестая того, что теоретически возможно, и длительность его много меньше, чем это следует из теории гидравлического удара в предположении, что воздушный слой бесконечно тонкий [42].

Дадим анализ влияния тонкой воздушной прослойки между поверхностью корпуса, которая моделируется жесткой стеной, и поверхностью жидкости. Чтобы без изменений использовать данные, полученные в [64] Ильгамовым, примем одномерную модель соударения и рассмотрим случай удара движущейся стенки о неподвижную жидкость. Очевидно, что возникающее при этом давление будет тем же, что и при ударе плоского фронта экстремальной поверхностной волны о неподвижную жесткую стену [64]:

$$p = V_0 a_0 \rho_0 [1 - 2\theta \rho_0 ({}_g M)^{-1} \theta] \exp(a_0 \rho_0 M^{-1} t) \ll 1 - \exp[-{}_g a_0 ({}_g \theta)^{-1} t)] \quad (17.1)$$

Здесь V_0 — скорость соударения, a_0 — скорость звука в воде, ρ_0 — плотность воды, M — масса плоского фронта ударяющей поверхностной волны, отнесенная к площади фронта, θ — коэффициент адиабаты для воды, ${}_g \theta$ — коэффициент адиабаты для воздуха, θ — толщина воздушного слоя.

17.2. Эффекты кавитации на корпусе судна на нагрузку

Формула (17.1) может быть полезна для расчета нагрузок на корпус судна. Но в последнем случае возникает усложняющее обстоятельство, связанное с деформируемостью корпуса, что может сильно влиять на результирующее давление воды. А именно, под действием импульса давления элемент корпуса начинает перемещаться так быстро, что отрывается от воды. Возникает так называемая «корпусная» (*hull*) кавитация. В результате давление, действующее на корпус, может принципиально измениться. Это явление, в силу его специфичности практически неизвестно гидромеханикам, хотя ему посвящено несколько книг и ряд статей [65–78]. Оно изучалось применительно к действию подводных взрывов на суда. Применительно к действию поверхностных волн на корпуса судов оно почти не упоминалось [21, 63], поэтому, как первый шаг в этом направлении, мы будем использовать подобие между профилями им-

пульсов давления, возникающих при подводном взрыве, и действии поверхностной волны на преграду. В обоих рассматриваемых случаях на корпус действует не давление идеально чистой воды, а давление смеси газ-вода или давление пузырьковой (кавитирующей) жидкости.

Корпусная кавитация ограничивает падение давления в жидкости. В результате она может увеличить давление на корпус и существенно повлиять на конечный результат действия волны на судно. Из-за захваченного атмосферного воздуха и корпусной кавитации может возникнуть большая неопределенность в расчетах реальных нагрузок на корпуса судов от больших поверхностных волн, поэтому любые данные, касающиеся этой проблемы, могут быть полезны.

Чтобы представить эффект корпусной кавитации, рассмотрим результаты нескольких экспериментов. В [78] элемент корпуса моделировался круглой пластиной. На пластину действовала подводная ударная волна. На рис. 172 помещена фотография кавитационных пузырьков (темные точки и их сгущения), возникающих при этом перед пластиной.

Таким образом, при действии импульса воды на гибкую пластину давление может стать отрицательным в некоторых точках жидкости, прилегающих или близких к пластине. В результате вода переходит в кавитационное состояние. Если вода кавитирует, то последующее движение пластины будет зависеть от этого процесса.

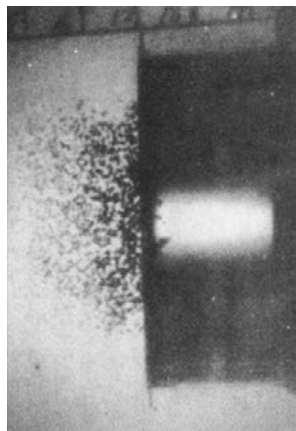


Рис.172. Кавитация, возникающая после отражения ударной волны от круглой пластины, закрывающей конец цилиндрической трубы [78].

Фотографии, представленные на рис. 173 и 174, иллюстрируют особенности кавитационного взаимодействия стенки трубки с ударной волной в жидкости, заполняющей трубку. Волна возбуждалась электровзрывом медной проволоочки в разрядном контуре с емкостью конденсаторов 18 МкФ, начальным напряжением 25 кВ и индуктивностью 3 мкГ. Проволочка располагалась на оси симметрии трубки. Длина и диаметр проволоочки выбирались, исходя из условия энергетической оптимизации, и для принятых параметров контура равнялись, соответственно, 10 и 0.051 см.

Трубочки изготавливались из стали X18H10T. Их длина равнялась длине проводника. Регистрация радиальных смещений оболочки трубочки и поверхности газового канала осуществлялась высокоскоростной камерой СФР-2М в режиме непрерывной развертки с помощью оптической системы, обеспечи-

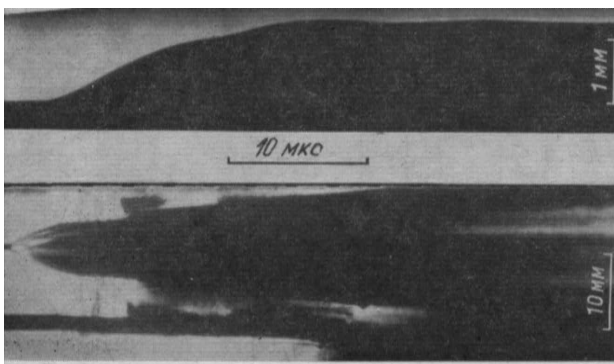


Рис. 173. Скоростная регистрация процессов в сечении трубки, показывающая динамическое расширение продуктов взрыва (низ) и перемещение точки стенки трубки (верх), а также возникновение кавитации в жидкости [66, 68].

вающей десятикратное увеличение смещений. На рис.173 приведены типичные фоторазвертки перемещения прогиба и поверхности канала, полученные при съемке с торца оболочки (радиус 1.47 см, длина 10 см, толщина стенок 0.2 см), погруженной в жидкость. Верхняя фотография показывает фоторазвертку перемещения внутренней точки оболочки при ее расширении. В результате в жидкости формируются кавитационные зоны (нижняя фотография рис.173). На фотографии светлые области соответствуют жидкости, темные зоны в жидкости — кавитации, расширяющаяся осесимметричная темная область — продукты взрыва.

Видно, что материал оболочки деформируется пластически с незначительной упругой разгрузкой в конце процесса. Волна, образованная при взрывном расширении материала проволоочки, испытывает многократное отражение как от оболочки, так и от канала разряда. При этом она трансформируется из волны сжатия в волну разрежения и наоборот. В результате в воде возникают зоны кавитации.

Рис. 174 дает результаты другого эксперимента. Там, как и на рис.173 (нижняя картинка), показана развертка процесса расширения сечения стенки трубки и газового канала. Перемещения верхней и нижней точек трубы определены прямыми толстыми линиями (верхняя, хорошо различимая линия, и нижняя, расположенная на нижнем краю рис. 174). Центральная темная зона сформирована металло-водным паром (продуктами взрыва). Светлые зоны — вода. Линии, идущие от продуктов взрыва к трубке и обратно, определяют траекторию волны, возникшей при взрыве. Темные зоны, расположенные вдоль некоторых из этих линий и около внутренних точек трубки, сформированы нестационарной кавитацией.



Рис. 174. Скоростная регистрация кавитационных процессов, возникающих при осесимметричном взрыве внутри заполненной водой цилиндрической трубки [68].

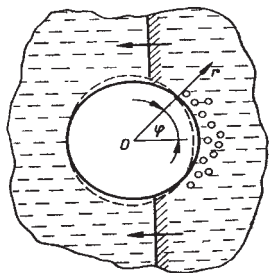


Рис. 175. Качественная картина кавитационного взаимодействия подводной ударной волны с цилиндрическим корпусом судна [65, 66].

Рис. 173 и 174 демонстрируют некоторые важные особенности взаимодействия оболочек и волн в жидкости. Волна воздействует на оболочку. Последняя ускоряется, и в воде формируются зоны нестационарной кавитации. Аналогичные процессы могут иметь место и при действии подводной взрывной волны на судно или погруженную в воду тонкостенную конструкцию (рис. 175). «Корпусная» кавитация не исключает появления кавитации и вдали от судна, если сумма давлений падающей и отраженной волн, а также статического давления, зависящего от глубины, падает ниже некоторого критического значения.

Подобные явления могут иметь место и на поверхности судовых корпусов при воздействии на них экстремальных поверхностных волн, так как время действия поверхностной волны при ее опрокидывании на корпус может быть весьма малым, а возникающие давления весьма большими. Возникает мысль об использовании при анализе подобной ситуации опыта, накопленного при расчетах судов на действие подводных взрывов. В част-

ности, могут использоваться методы учета влияния кавитации на динамическую прочность подводных военно-морских судов, которые обязаны сохранять высокий стандарт эксплуатационной эффективности при действии взрыва.

В следующем разделе мы продолжаем рассмотрение влияния кавитации. Отмечаем также, что модели нестационарной кавитации будут рассмотрены в части IV, где мы будем изучать поведение слабосвязных материалов при быстрой декомпрессии.

17.3. Влияние кавитации на импульсное деформирование элемента корпуса судна поверхностной волной

Проблема исследования воздействия экстремальных волн на морские конструкции сформулирована в нескольких публикациях (см., например, [18–20]). В них используются современные численные методы исследования. Приведены результаты ряда модельных экспериментов [18–20]. Однако они существенно не дополняют того понимания, которое получено на примерах недеформируемых преград. В частности, нет эпюр давления экстремальных поверхностных волн на деформируемые преграды. Поэтому, чтобы начать исследование, мы приняли, что эпюра давления импульса поверхностной волны в наиболее опасных для корпуса случаях, может напоминать эпюру давления от подводного взрыва. Учет воздушной «подушки» можно выполнить, следуя [64]. Такой подход позволяет качественно учесть эффект кавитации на деформацию элемента корпуса, нагруженного экстремальной океанской волной.

17.3.1. Модель взаимодействия и результаты числового исследования

Для простоты рассматривается элемент корпуса в виде круглой пластины. Принято, что край пластины зашпелен, а фронт поверхностной волны параллелен поверхности пластины (рис. 176). Поверхность пластины намного меньше, чем поверхность фронта волны, так что в начальный момент взаимодействия давление постоянно на поверхности пластины. В следующие моменты пластина деформируется осесимметрично. Влияние мембранных сил и пластических деформаций не учитывается. В этом случае движение пластины описывается следующим классическим уравнением [65, 66]:

$$w_{rrrr} + 2r^{-1}w_{rrr} - r^{-2}w_{rr} + r^{-3}w_r = -12(1 - \nu^2)(\rho h w_{tt} + p)E^{-1}h^{-3}. \quad (17.2)$$

Здесь w — смещение пластины, индексы t и r определяют производные относительно времени и радиальной координаты, ρ — плотность листового материала, h — толщина пластины, E — модуль Юнга, ν — отношение Пуассона и p — гидродинамическое давление.

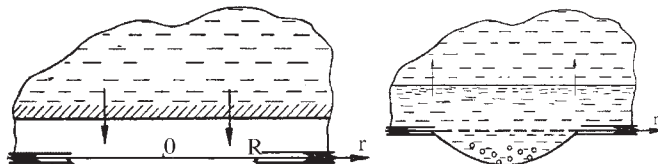


Рис. 176. Схемы нагружения пластины поверхностной волной (слева) и кавитационного взаимодействия пластины с импульсным воздействием воды (справа).

Рассмотрим уравнение движения пластины (17.2), принимая во внимание кавитацию, возникающую на пластине. В этом случае давление p в (17.2) может быть записано в виде:

$$p = \delta(r, t)(p_i - \rho_0 a_0 w_t), \quad (17.3)$$

где p_i — давление волны, измеренное на недеформируемой пластине (на жесткой преграде $p = p_i$), ρ_0 — плотность воды, a_0 — скорость звука в воде, и w_t — нормальная скорость пластины. Видно, что величина $\rho_0 a_0 w_t$ в (17.3) принимает во внимание эффект деформируемости пластины. Функция $\delta(r, t) = 1$ или 0. Она определяется в процессе численных вычислений. Случай $\delta(r, t) = 1$ имеет место в случае слабой волны, когда кавитация на пластине не возникает. Очевидно, корпус судна деформируем, и он начинает искажаться и перемещаться под действием гидроудара поверхностной волны. При этом возникает отраженная волна, зависящая от смещения корпуса. Ее значение в случае пластины равно $-\rho_0 a_0 w_t$. Нормальная скорость положительна, таким образом, величина $-\rho_0 a_0 w_t$ отрицательна (волна растяжения). Если суммарное давление $(p_i - \rho_0 a_0 w_t)$ падает ниже некоторого критического значения p_k , то смоченная поверхность пластины отделяется от воды и возникает кавитация. Мы уже отмечали, что в отличие от хорошо известной в гидромеханике кавитации, это явление известно, как «корпусная» кавитация. Описанный процесс называют кавитационным взаимодействием жидкость-конструкция. Известно, что иногда это взаимодействие имеет большой эффект на отклик корпуса подводного судна на действие взрывной нагрузки.

Опишем процесс отыскания функции $\delta(r, t)$. Если в некоторый момент времени и некоторой точке влажной поверхности пластины $p_i - \rho_0 a_0 w_t > p_k$, то в следующий момент времени в этой точке мы принимаем $\delta(r, t) = 1$. Наоборот, если $p_i - \rho_0 a_0 w_t < p_k$, то в следующий раз момент мы полагаем $\delta(r, t) = 0$. Таким образом, учитывается кавитация на влажной поверхности пластины. Обычно принимается, что кавитация возникает при давлениях от -0.2 до -0.35 МПа. Заметим также, что рассматриваемая продолжительность нагрузки очень мала (рис. 169, 170) и движение судна, как целого, не очень существенно для взаимодействия корпус-волна. Поэтому при расчетах можно принимать, что начальные смещение и скорость пластины равны нулю. Начальное давление воды на пластине, следуя [64, 65], можно описать выражением

$$p_i = A(1 - e^{\beta a_0 t})e^{\alpha a_0 t}, \quad (17.4)$$

где A , α , β — константы, которые определяют амплитуду и форму волны. Эти постоянные могут учитывать влияние захваченного волной воздуха [64].

17.3.2. Эффект деформируемости пластины на импульсное давление воды

Исследовалось влияние толщины стальной круглой пластины на прогиб и давление на пластине. Расчеты проводились при $R=5.5$ см, $a_0 = 1500$ м/сек. Параметры, определяющие давление в волне (17.4), составляли: $A=2.5$ МПа, $\alpha = -0.07$ см⁻¹ и $\beta = -5$ см⁻¹, т.е. эпюра давления имела участок быстрого роста и более плавного спада. При расчетах использовался метод конечных разностей [65, 66].

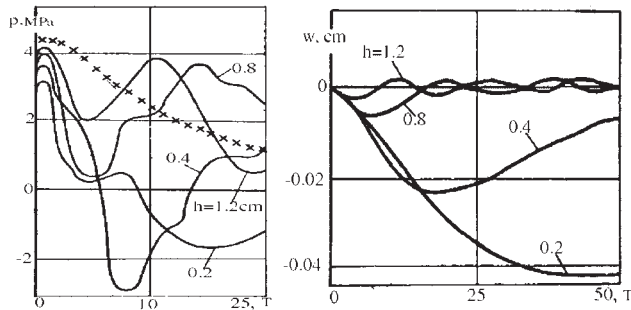


Рис. 177. Давление, вычисленное без учета кавитации (слева) и смещение (справа), найденные в центре пластин различной толщины. Здесь $T = \text{см}/a_0$.

На рис. 177 дается сравнение кривых давления на центр пластин разной толщины (крестики — давление на абсолютно неподвижную преграду) и кривых прогиба в центре этих же пластин. Цифры 1.2, 0.8, 0.4, и 0.2 на рисунке показывают, при каких h проводился расчет отмеченных кривых. Как видно, влияние податливости пластины проявляется уже в первые мгновения. Это приводит к зависимости первого пика давления от толщины пластины. В последующем смещение пластины в направлении действия волны может вызвать резкое падение давления.

В частности, для $h \approx 0.8$ см давление не падает ниже нуля, в то время как при $h \leq 0.4$ см в воде возможно возникновение разрывов сплошности, если принять, что кавитация возникает при давлениях от -0.2 до -0.35 МПа. На пластине с $h = 0.4$ см кавитация может появиться при $t \approx 6 \text{ см}/a_0$. И отрицательное давление существует до $t \approx 13 \text{ см}/a_0$. При уменьшении толщины до $h = 0.2$ см отрицательное давление возникает позднее ($t \approx 9 \text{ см}/a_0$), однако, время существования зоны разрежения на поверхности пластины больше, чем в случае $h = 0.4$ см. Интересно, что в первые моменты взаимодействия скорость смещения пластины с $h = 0.4$ см выше, чем у более тонкой пластины с $h = 0.2$ см. Ко-

гда w_t приближается к нулю, пластина становится все более жесткой для волны и давление начинает повышаться. При обратном движении пластины вода сжимается дополнительно и давление начинает превышать давление на твердую поверхность. Абсолютная величина и форма второго пика давления на рис. 177 зависят от собственной частоты колебаний пластины. Увеличение частоты (толщины пластины) приводит к уменьшению интервалов между пиками давления. Таким образом, из рис. 177 следует, что эффект отрицательного давления может быть важным, если продолжительность нагрузки пиком давления волны меньше, чем период фундаментальной частоты пластины.

12.3.3. Эффекты корпусной кавитации

Используя модель, описанную выше, мы изучили эффект кавитации на смещение пластины и давление. Были исследованы пластины из алюминиевого сплава Д16АТ [65, 66] различных толщин. Результаты вычисления представлены на рис. 178 (сплошные линии — кавитационная модель, разрывные линии — расчет без учета кавитации). Мы принимали $a_0 = 1200$ м/сек, $p_k = -0.2$ МПа, $R = 5.5$ см. Параметры импульса давления: $A = 1.7$ МПа, $\beta = -0.3$ см⁻¹ и $\alpha = -0.07$ см⁻¹. Кривые давления в центре пластины, отмеченные цифрами 1, 2, 3 и 4, 5, 6, соответствуют толщинам $h = 0.8, 0.4$ и 0.2 см. У кривых 5 и 6, которые вычислены согласно кавитационной модели, есть отрезки, совпадающие с линией $p = 0$. Для $h = 0.8$ см давление достигает отрицательных величин, но не опускается ниже, т.е. кавитация не возникает. Кавитация появляется для $h = 0.4$ см. Время жизни кавитационной зоны около 10 см/ a_0 . Для $h = 0.2$ см кавитационная зона существует приблизительно в течение 16 см/ a_0 . Таким образом, расчеты показывают, что кавитация может существенно изменить давление волны на центр пластины. Теперь исследуем

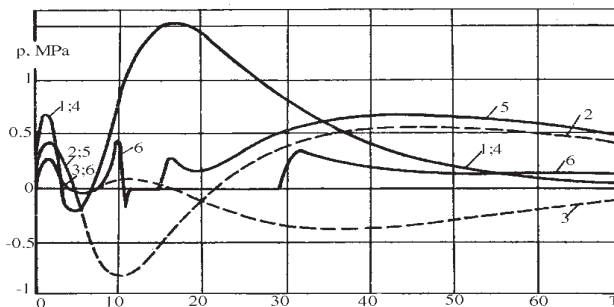


Рис. 178. Кривые характеризуют изменение давления на центр смоченной поверхности пластины. Здесь $T = \text{см}/a_0$.

влияние кавитации на деформацию всей пластины и давление, действующее на нее.

Кривые на рис. 179 характеризуют изменения давления на пластину и ее смещения в случае $h = 0.2$ см. Кривые 1, 2, 3 и 4, 5, 6 соответствуют моментам 10, 20, 70 см/а₀ и 10, 20, 32 см/а₀. Сплошные кривые найдены с учетом, а прерывистые кривые — без учета кавитации. Согласно кавитационной модели, смещение достигло своего максимального значения раньше (кривая 6, $t = 32$ см/а₀), в то время как некавитационная модель дала максимальное значение позже (кривая 3, $t = 70$ см/а₀). Максимальное смещение, найденное при учете кавитации, было почти в два раза больше смещения, вычисленного без его учета. Из рис. 178 видно, что центральная часть пластины перемещается в начальные моменты как твердое тело. Смещение изменяется быстро только около края. Поэтому кавитация возникает около края пластины. Там при $t = 10$ см/а₀ формируется подобная кольцу кавитационная зона. При $t = 20$ см/а₀ кавитационная зона перемещается в центральную часть пластины. Скорость движения пластины в последующем уменьшается, и кавитационная зона, уменьшается тоже. Кавитация исчезает, когда пластина начинает возвращаться в исходное состояние.

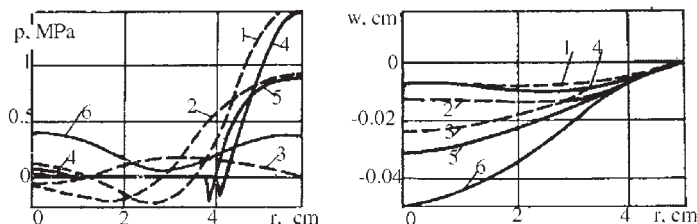


Рис. 179. Изменение давления на поверхности пластины (слева) и смещение пластины (справа), рассчитанные для $h = 0.2$ см. Сплошные кривые найдены с учетом, а прерывистые кривые — без учета кавитации.

Предлагаемая простая модель и результаты расчетов показывают, что эффект кавитации на деформацию элементов корпуса судна в некоторых экстремальных случаях действия океанских поверхностных волн может быть очень важным. В целом, это заключение соответствует результатам многих публикаций, где рассматривается действие подводного взрыва на корпуса судов.

17.3.4. Экспериментальные данные

Эксперименты проводились на установке, принципиальная схема которой представлена на рис. 180. Основной принцип, используемый в эксперимен-

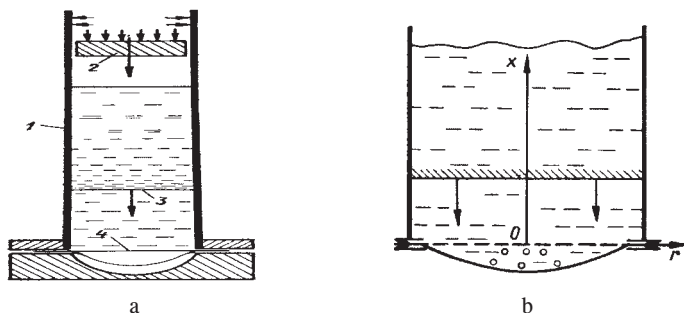


Рис. 180. Схемы экспериментального аппарата (а) и взаимодействия ударной волны в воде с пластиной (б).

те, — преобразование кинетической энергии быстро движущейся массы (плоский поршень) в энергию гидродинамического давления, действующего на пластину. Поршень разгонялся сжатым газом, заключенным в верхнюю часть цилиндра (радиус $R=5.5$ см).

Экспериментальная установка состоит из вертикальной цилиндрической металлической трубы (1), имеющей внутренний диаметр 112 мм. Толщина стенки трубы 20 мм. Скорость звука, вычисленная для воды в трубе, 1265 м/сек. Поршень (2) ударяет по поверхности воды и создает волну сжатия (3). Нижний конец трубы закрыт круглой пластиной (4), которая зажата по периметру ее края. Волна сжатия деформирует пластину, как показано на рис. 180. Пластина нарисована в ее начальном и деформированном состояниях. Высота водного столба над пластиной 50 см. Между поршнем и поверхностью воды имеется воздух (воздушная подушка). Этот воздух откачивается, но некоторое влияние воздушной подушки остается. Она уменьшает амплитуду волны в воде до двух раз по сравнению с давлением, возникающим при полном отсутствии воздушной подушки.

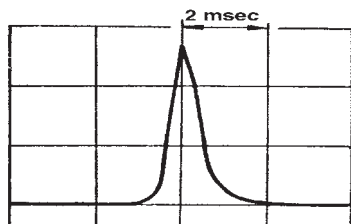


Рис. 181. Осциллограмма изменения давления на поверхности столстой пластины.

Сначала изложим некоторые данные исследований влияния кавитации на давление, возникающее в жидкости. Изучались случаи маленьких (упругих) деформаций пластины, когда масса поршня составляла 13 кг, а скорость удара поршня по водной поверхности сохранялась постоянной 1.8–2.0 м/сек. Давление измерялось в различных точках водного столба с помощью пьезоэлектрических датчиков давления. Кривые изменения давления регистрировались на экране осциллографа. Пьезоэлектрические датчики

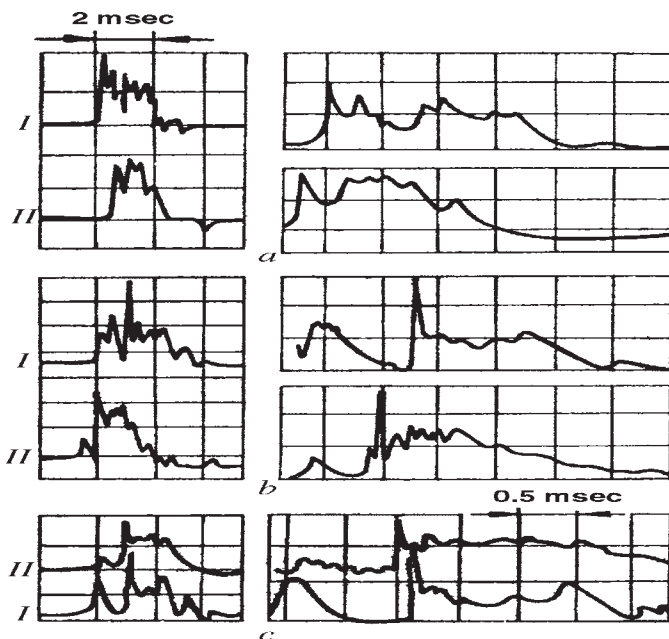


Рис. 182. Эффект толщины пластины на гидродинамическое давление в различных точках по высоте слоя воды.

давления были калиброваны статически и динамически, и обе калибровки дали идентичные результаты.

Осциллограмма изменения давления на поверхности пластины с толщиной $h=20$ мм показана на рис. 181. Видно, что давление увеличивается быстро и затем спадает по экспоненциальному закону. Амплитуда давления 1.25 МПа, и время существования давления около 2 мсек. Эта осциллограмма рассматривается как исходная точка последующего анализа влияния кавитации. Ниже мы исследуем, как эта осциллограмма меняется при изменении h .

Осциллограммы изменения давления на поверхности пластин из сплава Д16АТ с толщинами $h = 8, 4$ и 2 мм показаны на рис. 182 (а, б, с), соответственно. Давления, измеренные на стенке трубы в точках 255 мм и 55 мм от кромки пластины, соответствуют кривым I и II, соответственно. У помещенных слева кривых одно горизонтальное деление сетки соответствует 2 мсек, у расположенных справа тех же кривых одно горизонтальное деление сетки соответствует 0.5 мсек. Верхняя пара кривых замерена для случая пластины с $h = 8$ мм, средняя пара — для $h = 4$ мм и нижняя пара кривых соответствует $h = 2$ мм.

Видно, что уменьшение толщины пластины приводит к радикальному изменению пиков в кривых давления и к увеличению их длины, т.е. к увеличению времени динамического взаимодействия пластина-жидкость. При анализе осциллограмм мы рассмотрим, прежде всего, кривые, полученные датчиком П, расположенным вблизи пластины. Эти кривые состоят из первого пика, участка спада давления и второго пика, который более растянут, чем первый. Первый пик формируется давлением, возникающим в начале взаимодействия, когда пластина только начинает перемещаться. Влияние взаимодействия пластина-жидкость на этот пик очевидно. Пиковая амплитуда давления сильно зависит от толщины пластины и может быть много меньше, чем максимальное давление 1.25 МПа пика на рис. 181.

Давление остается положительным, несмотря на его сильное изменение в случае пластины толщиной 8 мм (а). Однако после первого пика возникает кавитация, если толщина пластины уменьшается до 4 мм (b) и 2 мм (с). Затем давление резко и сильно возрастает, что объясняется столкновением водного слоя и пластины, когда кавитационная зона около пластины разрушается. Амплитуда второго пика близка ($h=8$ мм (a)) или превышает ($h=4$ мм (b) и $h=2$ мм (с)) величину первого пика и зависит сильно от h . Таким образом, время существования кавитации и длина второго пика определяются характером движения пластины, т.е. ее замедлением и обратным движением под действием упругих сил.

Эффект толщины пластины влияет более слабо на кривые давления I, измеренные на расстоянии 255 мм от кромки пластины. На них первый пик определяется фронтовой частью волны, инициируемой ударом поршня (рис. 182), поэтому этот пик зависит слабо от толщины пластины. Однако следующая за пиком зона разрежения и кавитации существенно зависит от толщины пласти-

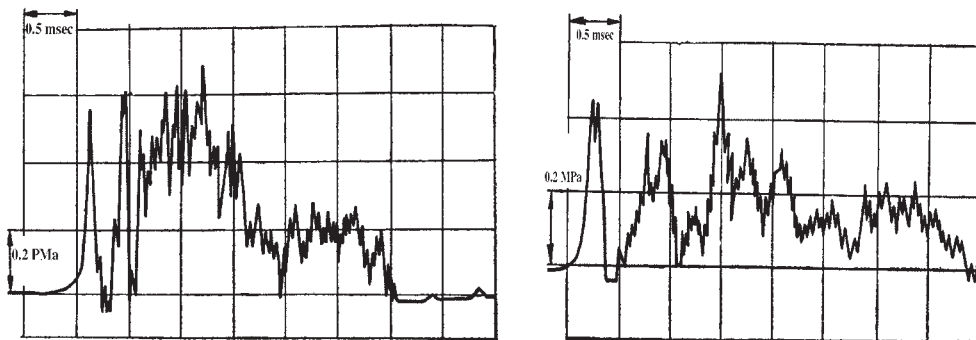


Рис. 183. Давление в центре пластины: алюминиевый сплав Д16АТ, $h = 2$ мм (слева) и бронзовый сплав БрКМц, $h = 1$ мм (справа).

ны. Второй пик определяется взаимодействием пластина-вода. Он возникает, если $h=4$ мм (b) и $h=2$ мм (c), после схлапывания зоны кавитации и последующего удара жидкости по пластине.

Осциллограммы давления, измеренные около центра двух различных пластин, представлены на рис. 183. Толщины и материалы пластин выбраны разными. В обоих случаях пластины получали значительные перемещения в зоне упругого поведения материала. Это гарантировало появление кавитационных эффектов при нестационарном взаимодействии пластина-вода.

Осциллограммы отличаются от представленных на рис. 182. У них есть три главных пика, которые определяются сильным радиальным движением воды вдоль пластин во время взаимодействия. Время жизни кавитационных зон определяется интервалами между пиками на кривых давления. Видно, что максимальное время существования зоны кавитации в центре пластины приблизительно 0.2 мсек. Третий пик сформирован обратным движением пластины и определяется периодом собственных колебаний пластины.

Во время начального периода взаимодействия движение воды можно считать одномерным. Далее из-за перемещения пластины, которое зависит от радиальной координаты, возникает сильное радиальное движение жидкости и формируются радиальные волны давления и кавитации, поэтому осциллограммы, измеренные в различных точках пластины, как это и ожидалось, отличались.

17.4. Кавитационные процессы при упруго-пластическом деформировании пластин импульсом воды

Корпусная кавитация, по самой своей природе, сильно зависит от характера деформирования преграды. Чтобы подчеркнуть это, мы рассмотрим данные экспериментов, выполненных при сильном увеличении амплитуды падающей волны и уровня деформации пластины.

Использовалась та же экспериментальная установка. Высота столба воды была увеличена до 65 см. Скорость удара поршня возросла от 1.8–2 м/сек до 30–33 м/сек. Масса поршня

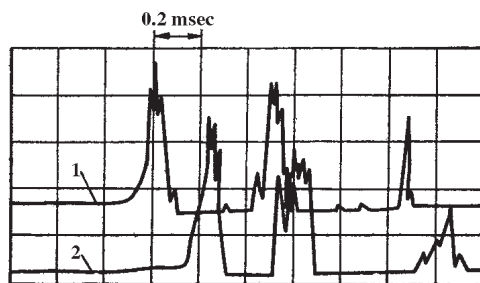


Рис. 184. Волны давления, замеренные на стенке трубы на расстоянии 32 см (кривая 1) и 1.5 см (кривая 2) от кромки толстой пластины.

уменьшилась от 13 кг до 2.3 кг. В результате давление в волне возросло до 15–18 МПа.

Осциллограммы давления, замеренные в двух точках внутренней поверхности трубы на расстоянии 32 см (кривая 1) и 1.5 см (кривая 2) от пластины, показаны на рис. 184. Толщина пластины $h = 2$ см. Одно деление на кривой 1 соответствует 8 МПа, на кривой 2 — 11 МПа. У кривой 1 есть два больших пика. Это связано с прохождением падающей и отраженной волн. Скорость распространения гидроудара в трубе установки, вычисленная по формуле Жуковского, равна 1265 м/сек, поэтому волна проходит расстояние 64 см за 0.5 мсек, что согласуется с расположением пиков на кривой 1. Кривая 2 имеет большой первый пик, вызванный почти удвоением амплитуды волны у пластины, и второй, расположенный недалеко от первого. Появление его невозможно объяснить отражением волны от поршня (третьи незначительные пики на верхней и нижней кривых). Происхождение второго пика, очевидно, связано с радиальным движением воды на поверхности пластины, вызванным некоторой деформируемостью пластины и трубы, так как около пластины возникает очень высокое давление.

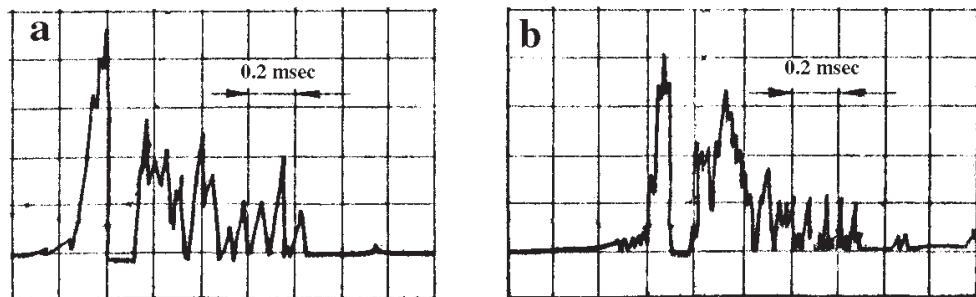


Рис. 185. Примеры развития корпусной кавитации вблизи кромок пластин из стали (а) и алюминиевого сплава (б).

На рис.185 дано сопоставление кривых давления для пластин из стали Ст. 3 (а) и дуралюмина (б). Толщина пластин $h = 4$ мм. Давление измерялось на поверхности трубы на расстоянии 1.5 см от пластины. Кривые характеризуются вызванными кавитацией пиками. В случае стальной пластины кавитационные зоны являются более определенными и существуют дольше, чем для пластины из алюминиевого сплава. Остаточные прогибы пластин составляли, соответственно, 13 мм и 12.4 мм.

Оценим теперь влияние движения жидкости по поверхности пластины. Осциллограммы давления, измеренного на краях (кривая 1) и в центре (кри-

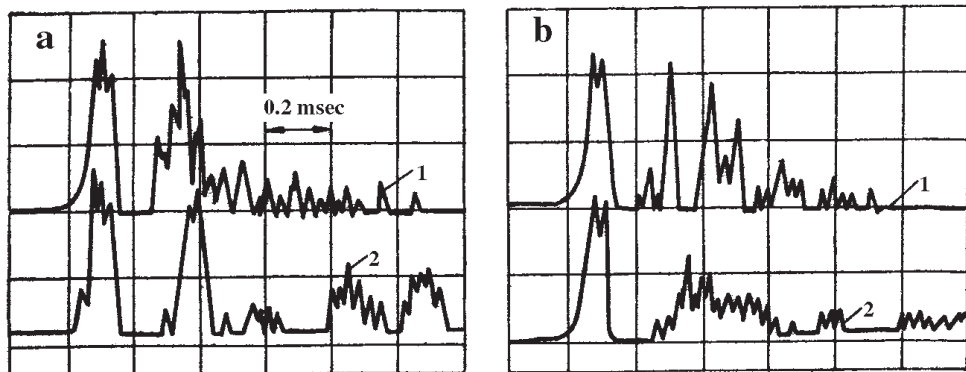


Рис. 186. Примеры развития корпусной кавитации на краях (кривая 1) и в центре (кривая 2) пластины при упругопластических деформациях.

вая 2) пластины из алюминиевого сплава Д16АТ в 1.5 см от ее поверхности, представлены на рис. 186 (а — для $h=4$ мм, б — для $h=2$ мм). Быстрые изменения кривых давления связаны с возникновением в воде кавитации и с ее радиальным движением, вызванным деформацией пластины. Из кривых следует, что зоны кавитации могут охватывать всю поверхность пластины. Максимальное время существования кавитации в центре пластины превышает 0.2 мсек. Величина пиков давления зависит от толщины пластины. Деформируемость пластины сильно меняет давление в жидкости по сравнению с давлением в падающей волне (см. рис.184). Время действия жидкости на пластину увеличивается.

В [65–68] приведены результаты численного исследования динамики кавитационных зон, возникающих в столбе жидкости при описанных выше экспериментах. Для простоты столб жидкости над пластиной считался бесконечным. На рис. 187 показаны положения зон кавитации, возникающих при одном варианте действия волны давления на пластину. Расчеты показали, что при $t \approx 0.0000075$ сек скорость пластины достигла величины, достаточной для отрыва от жидкости. На пластине

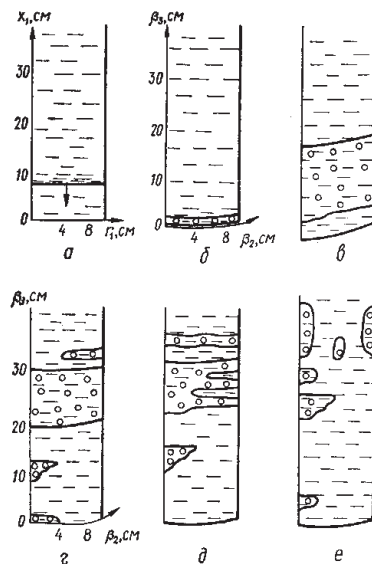


Рис. 187. Динамика развития зон кавитации [65–68].

возникает кавитация. Далее падающая волна отражается от границы кавитирующей жидкости как волны разрежения, жидкость у границы разрушается, объем зоны быстро растет. Частицы жидкости проходят через зону кавитации, достигают пластины, и давление на ее поверхности начинает возрастать. При $t \approx 0.000008$ сек кавитационная зона отделяется от пластины и ее толщина достигает 20 см. В последующем она уменьшается в размерах. Это связано с тем, что с некоторого момента времени верхняя граница кавитации перестает смещаться, так как амплитуда падающей на нее волны давления становится настолько малой, что возникающие отрицательные давления не достаточны для разрушения жидкости. В то же время нижняя граница смещается вверх под действием волны сжатия, возникающей в результате торможения частиц жидкости на пластине. Зона кавитации начинает расслаиваться и уменьшаться в размерах при $t \approx 0.0000265$ сек. Кроме рассмотренной, в разные моменты времени в жидкости возникают и другие зоны кавитации, однако их время существования и размеры меньше, чем у основной зоны.

Поведение кавитационных зон и пластины зависит от уровня деформации. В случае упругих деформаций пластина всегда возвращается к ее исходному положению. При пластической деформации пластина приобретает форму пологой сферы или разрушается.

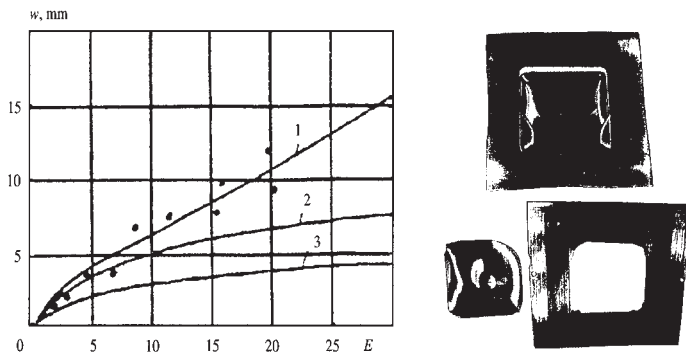


Рис. 188. Влияние кавитации на максимальный прогиб центра пластины (слева) [73]; и пластины, разрушенные импульсом в воде (справа) [65, 66]. Величина E определяет энергию импульса воды.

Мы показали очень сильное влияние корпусной кавитации на давление в жидкости. Вместе с тем экспериментальные и теоретические данные демонстрируют значительное влияние кавитации на остаточный прогиб пластин. На рис. 188 (слева) представлены некоторые кривые из приведенных в [73]. Дано сопоставление максимальных прогибов пластин (ширина 78 мм, длина

78 мм, толщина 0.6 мм), нагруженных импульсом давления экспоненциального профиля в воде. Энергия импульса E менялась [73]. Данные экспериментов нанесены точками. Расчеты выполнялись по разным теориям: по двумерной теории кавитации — кривая 1 (метод Галиева [65, 66]), по гипотезе Шауэра — кривая 2 и без учета кавитации — кривая 3 [73]. Представленные данные свидетельствуют о хорошем соответствии двумерного расчета с экспериментом. Погрешность расчета по схеме Шауэра и по схеме сплошной жидкости растет с увеличением максимального прогиба пластины, и она может быть весьма значительной.

Таким образом, учет влияния корпусной кавитации на пластическое деформирование тонких пластин импульсом жидкости очень важен. Отсюда следует, что учет кавитации может быть решающим для оценки прочности корпуса при импульсном действии поверхностной волны. Если амплитуда импульса воды достаточно велика, то корпус или его элемент может быть разрушен. Процесс разрушения пластин гидроударом изучался в работах [65, 66]. Жестко защемленные пластины разрушались обычно путем среза с кромок. При более мягких условиях на краях разрушение могло начинаться от центра пластины. Фотографии разрушенных импульсом воды квадратных пластин из алюминиевого сплава ($h=1$ мм) представлены на рис. 188 (справа).

В заключение главы приведем небольшое замечание об истории исследований влияния кавитации на динамическую прочность пластин, приведенное в книге [73]. В этой книге Перцев и Платонов пишут: «Наиболее простая схема учета кавитации для расчета прогибов пластин при действии ударной волны была предложена Шауэром. Согласно этой схеме, в тот момент, когда давление на поверхности пластины равно нулю, пластина отрывается от жидкости и движется далее по инерции вплоть до остановки. Исследования Л.В. Фремке показали, что схема Шауэра дает неплохие результаты в случае действия на пластины очень коротких ударных волн. Более сложную схему предложил Кирквуд. Он полагал гидродинамическую нагрузку одномерной и считал, что в жидкости происходит разрыв в той точке, в которой давление достигает значения. При таком подходе вода перед пластиной разбивается на ряд слоев, которые движутся по инерции, сливаются друг с другом и, в конечном итоге, воздействуют на пластину. Исследования Кирквуда были существенно развиты в работах Б. В. Замышляева, Д. А. Александрина, И. Г. Новоселова. Расчеты по данной схеме лучше совпадают с экспериментом, чем расчеты, выполненные по схеме Шауэра.

Следующий шаг в изучении кавитационных явлений был сделан Ш. У. Галиевым. Он рассматривал уже пространственные задачи и полагал, что при ус-

ловии $p = p_k$ в жидкости образуются зоны кавитации, заполненные некой однородной средой. Динамика этих зон изучалась численными методами с использованием волнового уравнения на примерах воздействия волны давления на круглые пластины и цилиндрические круговые оболочки.

Отметим, что для одномерного случая метод Галиева и метод Кирквуда-Замышляева дают примерно одинаковые результаты».

17.5. Заключение по главе 17

Уже первое знакомство с проблемами, связанными с действием экстремальных поверхностных волн на суда, обнаружило исключительную важность этой проблемы, для которой еще нет устоявшихся концепций и решений. В силу своей исключительной мощности и возможного импульсного характера это воздействие не вписывается полностью в традиционные методы расчета динамической прочности судов.

Результаты, представленные в этой главе, позволяют нам сделать следующие выводы:

1. Давление поверхностных волн на преграды зависит от множества случайных обстоятельств и плохо поддается теоретическому предсказанию. Однако можно предполагать, что оно максимально в случаях, когда преграда встречает волну в момент ее опрокидывания. При этом на преграду может действовать высокоскоростная струя воды, создающая пик давления высокой интенсивности и очень малой продолжительности.

2. Величина максимального давления сильно зависит от количества захваченного воздуха в кармане, ограниченном фронтом опрокидывающейся волны и преградой.

3. Возникающие на преграде при опрокидывании волны давления по длительности, характеру изменения и амплитуде могут быть сопоставлены с нагрузками, возникающими при действии заряда взрывчатого вещества.

4. Деформация тонких элементов судового корпуса импульсом давления опрокидывающейся поверхностной волны может сопровождаться «корпусной» кавитацией. Эффект кавитации может быть важным при условии, что время действия импульса меньше, чем период фундаментальной частоты колебаний элемента корпуса.

5. Кавитационные зоны могут занять значительную часть смоченной поверхности корпуса и, таким образом, полностью изменить действующую нагрузку по сравнению с давлениями, которые были бы развиты в отсутствие кавитации.

6. Во время деформации элемента корпуса на смоченной поверхности могут развиваться волны кавитации.

7. Так же как и в случае подводных взрывов, кавитация может резко усложнить отклик корпуса судна на действие экстремальной поверхностной волны. Время действия пика возникающего давления может существенно возрасти, а вероятность разрушения корпуса резко увеличиться.

8. Имеется значительная неопределенность в нагрузках, возникающих при действии экстремальных поверхностных волн, и в преобразовании этих нагрузок во время взаимодействия волн с конструктивными элементами.

Литература

- [1] Лавренов, И. В., 1998. Математическое моделирование ветровых волн в пространственно-неоднородном океане. Гидрометеоиздат, Санкт-Петербург, 1998. (Lavrenov, I. V., 2003. Wind-Waves in Ocean. Springer).
- [2] Куркин, А. А., Пелиновский, Е. Н., 2004. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Нижегород. гос. техн. ун-т, Нижний Новгород.
- [3] Kharif, C., Pelinovsky, E., Slunyaev, A., 2009. Rogue Waves in the Ocean. Springer.
- [4] Rogue Waves 2008. Ed. M. Olagnon, M. Prevosto, Ifremer, 2009, <http://www.ifremer.fr/web-com/stw2008/rw/>.
- [5] Perkins, S., 2006. Dashing rogues. *Science News*, **70**, Issue 21.
- [6] Denchfield, S. S., Murphy, A. J., Temarel, P., 2009. A deep-water beach laboratory generation of abnormal waves. In *Rogue Waves 2008*. Ed. M. Olagnon, M. Prevosto, Ifremer, 219–229.
- [7] Clauss, G., Schmittner, C., Henning, J., 2003. Simulation of rogue waves and their impact on marine structures. Proc. *MAXWAVE Final Meeting*, October 8–10, Geneva, Switzerland.
- [8] Zakharov, V. E., Dyachenko, A. I., 2010. About shape of giant breather. *European J. of Mechanics, B*, 29(2), 127–131.
- [9] Zakharov, V. E., Dyachenko, A. I., Shamin, R. V., 2010. How probability for freak wave formation can be found. *Eur. Phys. J.-Spec. Top.*, 185 (1), 113–124.
- [10] Kharif, C., 2007. On the modelling of huge water waves called rogue waves. In *Tsunami and Nonlinear Waves*. Ed A. Kundu, Springer.
- [11] Fochesato, C., Grilli, S., Dias, F., 2007. Numerical modelling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing. *Wave Motion*, **44** (5), 395–416.
- [12] Kharif, C., Giovanangeli, J.-P., Touboul, J., Grare, L., Pelinovsky, E., 2008. Influence of wind on extreme wave events: experimental and numerical approaches. *J. Fluid Mech.*, **594**, 209–247.
- [13] Dysthe, K., Krogstad, H. E., Muller, P., 2008. Oceanic rogue waves. *Annual review of fluid mechanics*, **40**, 287–310.
- [14] Akhmediev, N., Ankiewicz, A., Taki, M., 2009. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace. *Phys. Lett. A*, **373**, 675–678.
- [15] Akhmediev, N., Soto-Crespo, J. M., Ankiewicz, A., 2009. Extreme waves that appear from nowhere: On the nature of rogue waves. *Phys. Lett. A*, **373**, 2137–2145.
- [16] Kibler, B., Fatome, J., Finot, C., Millot, G., Dias, F., Genty, G., Akhmediev, N., Dudley, M., 2010. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics. *Nature Physics*, doi:10.1038/nphys1740.

- [17] Bascom, W., 1980. Waves and Beaches. Anchor Press, NY.
- [18] 15th International Ship and Offshore Structures Congress 2003, August 11–15, 2003, San Diego, USA. Volume 1, Dynamic Response, 193–264.
- [19] 16th International Ship and Offshore Structures Congress 2006, August 20–25, Southampton, UK. Volume 2, Naval Ship Design, 213–263.
- [20] 17th International Ship and Offshore Structures Congress 2009, August 16–21, Southampton, UK. Volume 2, 341–419.
- [21] Galiev, Sh.U., Flay, R.G., 2009. The transient interaction of plates with extreme water waves: effects of deformability and hull cavitation. In *Fluid Structure Interaction V*. Ed. C.Brebbia, WIT Press.
- [22]. Kjeldsen, S.P. Examples of heavy weather damages caused by giant waves. SNAJ. Bulletin of the Society of Naval Architects of Japan. **828**, 1997/10, 744–748.
- [23] Clauss, G., 2010. Freak waves and their interaction with ships and offshore structures. In: *Advance in coastal and ocean engineering*. Ed. Q. Ma, World Scientific.
- [24] Holliday, N.P., Yelland, M. J., Pascal, R., Swail, V.R., Taylor, P.K., Griffiths, C.R., Kent, E., 2006. Were extreme waves in the Rockall Trough the largest ever recorded. *Geophys. Res. Lett.*, **33** (5), L05613.
- [25] Островский, Л.А., Потапов, А.С., 2003. Введение в теорию модулированных волн. Физматлит, Москва. (Ostrovsky L.A., Potapov A.I., 1999. Modulated Waves. Theory and Applications. The Johns Hopkins. Univ. Press, Baltimore and London).
- [26] Lamb, H., 1932. Hydrodynamics. 6th edn. Dover Publications, New York.
- [27] Gill, A.E., 1982. Atmosphere–Ocean Dynamics, Academic Press.
- [28] Janssen, P., 2004. The Interaction of Ocean Waves and Wind. Cambridge University Press, UK.
- [29] Alexakis, A., Youhg, Y.–N., Rosner, R., 2004. Weakly–nonlinear analysis of wind– driven gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **503**, 171–200.
- [30] Kelvin, Lord W., 1871. The influence of wind on waves in water supposed frictionless. *Philos. Mag.*, **42**, 368–374.
- [31] Jeffreys, H., 1925. On the formation of water waves by wind. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**: 189–206.
- [32] Jeffreys, H. 1926. On the formation of water waves by wind. (Second paper). *Proc. R. Soc. Lond. A*, **110**, 241–247.
- [33] Wind stress over the ocean. Eds. I. S. F. Jones, Y. Toba. Cambridge University Press, UK, 2001.
- [34] Miles, J.W., 1957. On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.*, **3**, 185–204.

- [35] Akylas, T.R., 1982. A nonlinear theory for the generation of water waves by wind. *Stud. Appl. Maths.*, **67**, 1–24.
- [36] Akylas, T.R., 1984. On the excitation of nonlinear water waves by a moving pressure distribution oscillatory at resonant frequency. *Phys. Fluid*, **27**, 2803–2807.
- [37] Diorio, J. D., Cho, Y., Duncan, J. H., Akylas, T. R., 2011. Resonantly forced gravity–capillary lumps on deep water. Part 1. Experiments. *J. Fluid Mech.*, **672**, 268–287.
- [38] Vennell, R., 2010. Resonance and trapping of topographic transient ocean waves generated by a moving atmospheric disturbance. *J. Fluid Mech.*, **650**, 427–442.
- [39] Yi–Yuan Yu., 1952. Breaking of waves by an opposing current. *Trans. Amer. Geophys. Union*, **33**, 39–41.
- [40] Russell, R.C.H., Macmillan, D.H., 1970. Waves and Tides. Greenwood Press, Westport, Connecticut.
- [41] Zhang, S., Yue, D.K.P., Tanizawa, K., 1996. Simulation of plunging wave impact on a vertical wall. *J. Fluid Mech.*, **327**, 221–254.
- [42] Peregrine, D.H., 2003. Water–wave impact on walls. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **35**, 23–43.
- [43] Grimshaw, R., Pelinovsky, E., Talipova, T., 2008. Large–amplitude long wave interaction with a vertical wall. *European J. of Mechanics, B*, **27**, 409–418.
- [44] Голицын, Г. С., 2010. Энергетический цикл ветровых волн на поверхности океана. *Известия РАН, Физика атмосферы и океана*, **46** (1), 10–18.
- [45] Chester, W., 1964. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, **18**, 44–64.
- [46] Chester, W., Bones, J.A., 1968. Resonant oscillations of water waves. *II. Experiment. Proc. Roy. Soc., A*, **306**, 23–39.
- [47] Svendsen, I.A., 2006. Introduction to Nearshore Hydrodynamics. World Scientific.
- [48] Chester, W., 1968. Resonant oscillations of water waves. *I. Theory. Proc. Roy. Soc. A*, **306**, 5–22.
- [49] Галиев, Ш. У., Ильгамов, М. А., Садыков, А. В., 1970. О периодических ударных волнах в газе. *Изв. АН СССР, МЖГ*, **N2**, 57–66.
- [50] Ilgamov, M.A., Zaripov, R.G., Galiullin, R.G., Repin, V.B., 1996. Nonlinear oscillations of a gas in a tube. *Appl. Mech. Rev.*, **49**, 138–154.
- [51] Galiev, Sh.U., 1999. Topographic effect in a Faraday experiment, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 6963–7000.
- [52] Jimenez, J., 1973. Nonlinear gas oscillations in pipes. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.*, **59**, 23–46.

[53] Kobine, J.J., 2008. Nonlinear resonant characteristics of shallow fluid layers. *Phil. Trans. R. Soc., A*, **366**, 1331–1346.

[54] Galiev, Sh.U., Galiyev, T.Sh., 2001. Nonlinear trans-resonant waves, vortices and patterns: From microresonators to the early Universe. *Chaos*, **11**, 686–704.

[55] Galiev, Sh.U., 2003. The theory of non-linear transresonant wave phenomena and an examination of Charles Darwin's earthquake reports. *Geophys. J. Inter.*, **154**, 300–354.

[56] Galiev, Sh.U., Galiev, T.Sh., 1998. Resonant traveling surface waves. *Phys. Lett., A*, **311**, 192–199.

[57] Galiev, Sh.U., 2008. Strongly-nonlinear wave phenomena in restricted liquids and their mathematical description. In *New Nonlinear Phenomena Research*, Ed. T.Perlidze, 109–300, Nova Science Publishers, NY.

[58] Монин, А. С., Корчагин, Н. Н., 2008. Десять открытий в физике океана. Научный мир, Москва.

[59] Bredmose, H., Brocchini, M., Peregrine, D.H., Thais, L., 2003. Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves. *J. Fluid Mech.*, **490**, 217–249.

[60] Kimmoun, O., Branger, H., 2007. A particle image velocimetry investigation on laboratory surf-zone breaking waves over a sloping beach. *J.Fluid Mech.*, **588**, 353–397.

[61] Denchfield, S.S., Murphy, A.J., Temarel, P., 2009. A deep-water beach laboratory generation of abnormal waves. In *Rogue Waves 2008*. Ed. M. Olagnon, P. Prevosto, Ifremer, 219–229.

[62] Kinsman, B., 1965. Wind Waves. Prentice Hall Inc., New York .

[63] Galiev Sh.U., 2009. Modelling of Charles Darwin's earthquake reports as catastrophic wave phenomena. researchspace. auckland. ac. nz/handle/2292/4474.

[64] Павлов, А. А., Ильгамов, М. А., 1974. Исследование ударной волны в жидкости. В *Труды семинара по теории оболочек*, **4**, Казанский физико-технический институт, Казань, 181–195.

[65] Галиев, Ш. У., 1977. Динамика взаимодействия элементов конструкций с волной давления в жидкости. Наукова думка: Киев. Перевод на английский: Dep. Navy, Off. Naval Res., Arlington, USA, 1980.

[66] Галиев, Ш. У., 1981. Динамика гидроупругопластических систем. Наукова думка: Киев.

[67] Галиев, Ш. У., 1988. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. Наукова думка: Киев.

[68] Galiev, Sh.U., 1994. Influence of cavitation on transient deformation plates and shells by the liquid. In: *Proc. IUTAM Symp. on Impact Dyn.*; Zheng Zhemin, Tan Qingming; Eds.; Peking University Press: Beijing, 199–210.

[69] Felippa, C.A., DeRuntz, J.A., 1984. Finite element analysis of shock-induced hull cavitation. *Comput. Methods in Appl. Mech. Engng.*, **44**, 297–337.

[70] Galiev, Sh.U., Romashchenko, V.A., 1999. A method of solving nonstationary three-dimensional problems of hydroelasticity with allowance for fluid failure. *Int. J. Impact Eng.*, **22**, 469–483.

[71] Newton, R.E., 1978. Effect of cavitation on underwater shock loading. Rept. NPS 69–78–013; Naval Postgraduate School: Monterey, CA.

[72] Kadyrov, S.G., Pertsev, A.K., 1983. Influence of cavitation in liquid on the deformation of elastoplastic plate. *Strength Mat.*, **15** (9), 73–77.

[73] Перцев, А. К., Платонов, Э. Г., 1987. Динамика пластин и оболочек. Судостроение, Ленинград.

[74] Galiev, Sh.U., 1980. Models of a cavitating liquid in nonsteady hydroelastic plasticity. *Strength Mat.*, **12** (10), 1206–1214.

[75] Галиев, Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В., Нечитайло Н. В., Ромашченко В. А., 1989. Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. Наукова думка, Киев.

[76] Galiev, Sh.U., 1997. Influence of cavitation upon anomalous behavior of a plate/liquid/underwater explosion system. *Int. J. Impact Engng.*, **19** (4), 345–359 (see, also, Johnson, W. Comments on ‘Influence of cavitation upon anomalous behavior of a plate/underwater explosion systems’. *Int. J. Impact Engng.*, 1998, **21** (1–2), 113–115).

[77] Sandberg, G., 1995. A new finite-element formulation of shock-induced hull cavitation. *Com. Methods in Applied Mech. Eng.*, **120** (1–2), 33–44.

[78] Cole, R.H., 1948. Underwater Explosions. Princeton University Press, Princeton.

Часть IV.

Моделирование свойств осадочных пород, жидкостей и магмы в сейсмических волнах

...Пузырьковое закипание воды, ...обычно сопровождающее сильные землетрясения...

Дарвин

...В нескольких местах я заметил вулканические бомбы — ...центробежная сила, понижая давление в частях бомбы, расположенных ближе к центру, позволила горячим парам расширить ячейки, отчего в центре образовалась крупно-ячеистая масса...

Дарвин

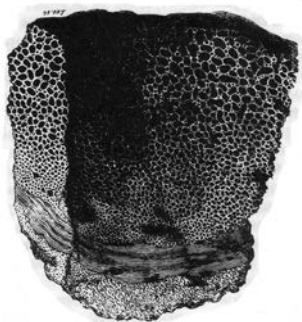


Рис.189. Фрагмент представленной Дарвином сферической вулканической бомбы.

Наше внимание привлекли следующие строки Дарвина: ...два взрыва, один, подобный столбу дыма, и другой, как от выдоха гигантского кита, были замечены в заливе Консепсьона. Вода как бы закипела; она «стала черной и начала издавать самый неприятный серный запах»... Два больших взрыва в первом случае должны быть без сомнения связаны с изменениями, произошедшими в глубине моря; но пузырьковое закипание воды, ее черный цвет и зловонный запах, обычно сопровождающие сильные землетрясения, я думаю, могут быть объяснены возмущениями придонной грязи, содержащей гниющие органические частицы... [1]. Взрывы, сопровождаемые струями жидкости и выбросами газа, связаны, видимо, с выходом на поверхность больших объемов газа. Последние могут образоваться в результате интенсивных колебаний дна. Возникающие при этом процессы могут напоминать показанные на рис. 187. Дарвин также сообщает: ...В нескольких местах я заметил вулканические бомбы — массы лавы, вылетевшие в воздух в жидком состоянии и потому принявшие шарообразную или грушевидную форму. Не только их наружная форма, но в некоторых случаях и внутреннее строение весьма любопытным образом указывают на то, что они вращались во время полета в воздухе. Внутреннее строение одной такой бомбы весьма точно показано в разрезе, изображенном на прилагаемом рисунке. Центральная часть состоит из крупных ячеек, которые уменьшаются в размере по мере приближения к краю, где находится как бы оболочка снаряда, около 1/3 дюйма в толщину, из плотного камня. Она в свою очередь покрыта наружной коркой из мелкоячеистой лавы. Почти не приходится, я думаю, сомневаться, во-первых, в том, что наружная корка, быстро охладившись, приняла то состояние, в котором мы ее сейчас видим; во-вторых, что все еще жидкая внутри лава уплотнялась возле внешней застывшей корки под действием центробежной силы, создаваемой вращением бомбы, и так образовалась плотная каменная оболочка; наконец, в том, что центробежная сила, понижая давление в частях бомбы, расположенных ближе к центру, позволила горячим парам расширить ячейки, отчего в центре образовалась крупноячеистая масса... [2]. Таким образом, Дарвин описал два процесса развития нестационарной кавитации в конденсированных средах. Они вызваны не повышением температуры среды, что было бы не любопытно, а резким падением давления в среде. По сути это тот же процесс, который наблюдается при открывании бутылки шампанского. В частности, Дарвин заслуженно испытал чувство удовлетворения, объяснив удивительное строение вулканической бомбы быстрым падением давления (декомпрессией).

18. Моделирование осадочных пород, содержащих газовые включения

...Увидеть мир в зерне песка ...

Вильям Блэйк

18.1. Вибрационное разрыхление осадочных пород

В этой книге мы уже неоднократно описывали явления, возникающие в волнах разрежения, используя данные экспериментов и простые математические модели. Эти явления сейчас хорошо изучены. Опубликовано ряд фундаментальных книг, в которых дается математический анализ процессов, происходящих при нестационарной кавитации, в волнах разрежения и кипении. Возможно, наиболее тщательно они изучены Нигматулиным [3]. Вместе с тем, наличие фундаментальных результатов, уравнений и публикаций не исключает развитие упрощенных подходов, основанных на аналогиях, одномерном рассмотрении и единстве законов механики сплошных сред. Они позволяют даже не специалисту понимать и даже анализировать разнообразные процессы наподобие тех, что описаны Дарвином или рассмотрены в частях I и III этой книги.

В частности, слабосвязные осадочные породы с газовыми включениями и придонную грязь, о которой пишет Дарвин, можно рассмотреть как некоторый аналог пузырьковых жидкостей, хотя в покое эти породы напоминают твердые среды, так как способны сопротивляться действию напряжений (рис. 190).

Но если вы энергично встряхиваете этот материал, заставляя частицы



Рис. 190. Песок может ваяться в твердые формы [3].

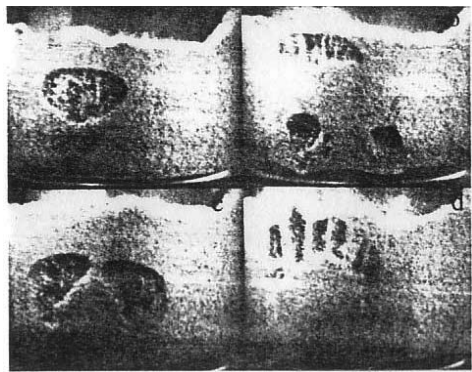


Рис. 191. В материале, состоящем из маленьких гранул, которые сильно встряхиваются, могут появляться достаточно крупные газовые включения [4].

перестраиваться и двигаться относительно друг друга, то свойства материала сдвигаются в сторону «жидкого» или «газового» состояния. В частности, стандартные эксперименты с гранулированными материалами демонстрируют появление в них пузырей газа под действием вибрации.

Колебания могут преобразовывать материал поверхностного слоя земли в смесь твердых частиц, жидкости и газа (рис. 1, 2, 191). Можно говорить о плавящемся поверхностном слое (рис. 191, 192), и уровень колебания (или ускорения) может характеризовать «эффективную температуру» гранулированного материала. В этом состоянии слабосвязные материалы не находятся в равновесии. Материал нуждается в постоянном притоке вибрационной энергии с тем, чтобы сохранять его новое состояние. Если уменьшать амплитуду колебаний, то осадочная порода (гранулированная жидкость) достигает точки, в которой она «замораживается» в твердое тело [5].

Таким образом, поведение слабосвязных осадочных пород зависит от их истории. В частности, свойства таких материалов до и после землетрясения могут быть весьма отличными. Из-за сильных вызванных землетрясением колебаний возникают смещения частиц относительно друг друга. Возникают трещины, значительные напряжения между колеблющимися материальными блоками, а также между поверхностным слоем и твердым основанием. Материал ослабляется и переходит в оживенное состояние, так как прочность материала и ее жесткость уменьшаются до нуля [6].

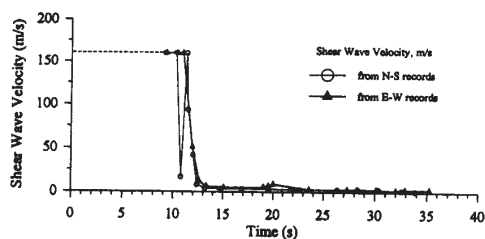


Рис. 192. Скачкообразное изменение скорости сдвиговой волны в оживающем осадочном материале острова «Остров Сокровищ» [6].

летрясением и зафиксированного в интервале между 6 и 30 секундами после начала сильных колебаний.

Можно видеть последовательное уменьшение модуля сдвига во время землетрясения. Зафиксированный отклик материала острова «Остров Сокровищ» может быть рассмотрен как обоснованный аналог для различных типов и амплитуд сильных движений осадочных пород. Например, подобный же от-

Статья [6] подробно описывает эти явления на примере изменения характеристик материала «Остров Сокровищ» в течение Лома Приета (*Loma Prieta*) землетрясения 1989 года. Начальная скорость волны сдвига, равная приблизительно 160 м/сек, сделалась меньше, чем 10 м/сек (рис. 192). Рис. 193 показывает схему изменения напряженно-деформированного состояния осадочных пород острова «Остров Сокровищ», вызванного зем-

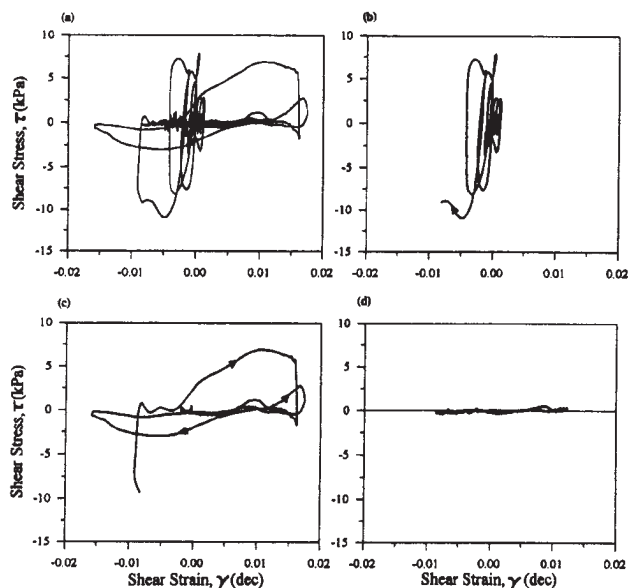


Рис. 193. Изменение напряженно-деформированного состояния оживающего материала острова «Остров Сокровищ» в направлении восток-запад: (а) полная запись изменения; (б) изменение за первые 8–14 секунд; (с) за 14–22 секунд; (d) за 22–32 секунд [6].

клик был зафиксирован для почвы местечка «Дикая Природа» [6], хотя плотность почвы этого местечка выше, чем песка острова «Остров Сокровищ». Эта разница в плотности отражена в таблице 1, которую можно найти в [6]. Пиковые значения модулей сдвига показывают уменьшение их в 15–35 раз, в то время как для наименьших деформаций этот модуль уменьшается в 75–500 раз по сравнению с модулями сдвига в начале землетрясения.

Представленные данные типичны для многих осадочных пород. Поверхностный слой может начать терять упругие свойства, если вертикальное ускорение является большим, чем гравитационное ускорение. Если наклон поверхности является достаточно большим, то частицы слоя начинают перемещаться вниз и формировать подобные волне лавины. В случае кратера вулкана подобная лавина может сфокусироваться в самой низкой точке кратера и сформировать колонну (вертикальную струю) смеси воздух-частицы слоя (см. часть I).

Донные отложения, материковые осадочные породы и почвы в районах вечной мерзлоты часто содержат пузыри газа. Появление их связано с биотермическими и другими процессами. Присутствие этих газовых включений может иметь существенный эффект на поведение морского дна, прибрежных оса-

дочных материалов и маленьких океанских островов во время землетрясений, т.е. когда растет их «вибрационная» температура. Реальный рост температуры дает не меньший эффект. Четверть поверхности Земли северного полушария содержит вечную мерзлоту и приблизительно 100 миллиардов тонн углерода. Углерод верхнего слоя в течение весенне-летнего периода времени выходит в атмосферу как углекислый газ или метан. В течение этого процесса метан образует газовые пузыри, которые преобразуют тающий верхний слой земли в «газированную» почву (см. рис. 31 и 194).

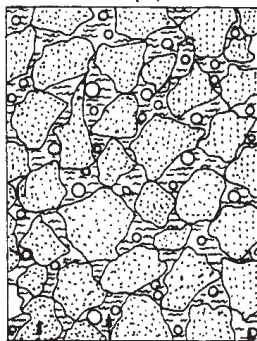


Рис. 194. Схематическое представление «газированной» почвы и осадочных пород, содержащих газовый гидрат и пузыри метана, «вмороженные» в почву.

Жесткие частицы почвы, содержащей газ, образуют как бы скелет среды, и их можно рассматривать как континуум (плотная фаза). Таким образом, мы можем приблизительно изучать «газированную» почву как континуум, содержащий пузыри. Важно, что из-за высокой сжимаемости механические свойства подобных почв напоминают больше свойства пузырьковых жидкостей (или газа), чем твердого тела, т.е. при рассмотрении механических свойств подобных сложных сред мы должны в первую очередь учитывать их сжимаемость. Таким образом, основной источник нелинейности поведения материалов, находящихся в оживленном состоянии, определяется уравнением состояния, связывающим давление p и плотность ρ (или p , ρ и температуру). Этот источник очень важен для высоко-сжимаемых жидкостей (например, газа, пузырьковых жидкостей и гранулированных «газированных» материалов). В этой части книги мы фиксируем внимание на уравнениях состояния

для смеси гранулы-вода-газ и на выводе уравнений для соответствующих нелинейных волн.

Известно, что движение сред, содержащих гранулы, воду и газ, описываются уравнениями механики многофазных сред [3]. Эти уравнения содержат члены, которые определяют переход одной фазы в другую и обмен импульсом и энергией между ними. Точные выражения для этих членов обычно неизвестны, и поэтому поведение многофазных материалов часто описывается в пределах известных классических моделей. В настоящем рассмотрении, чтобы упростить анализ движения слабосвязных многофазных материалов, мы вводим пространственно-усредненные величины для напряжений, усилий, смещений, давления и плотности. Осреднение проводится по элементу объема смеси, который может содержать много газа, но имеет небольшой размер относительно характерной длины бегущей волны. Предполагается, что число газовых вклю-

чений в единице объема материала не меняется. Газ не перемещается относительно гранул материала. При этих предположениях материал (смесь) можно приближенно рассматривать как континуум, и его движение может быть описано уравнениями механики континуума. Модель континуума должна принять во внимание самую важную особенность слабосвязного «газированного» материала. А именно, в пределах волны растяжения ее свойства должны напоминать свойства газа, а в пределах зон сжатия эти свойства должны больше напоминать свойства слабосжимаемых сред.

18.2. Уравнение состояния для газированных сред

В нашей модели осадочная порода рассматривается как однородная смесь конденсированной фазы (твердые частицы, частицы мягкой фракции типа глины, вода) и газа.

Модуль сжимаемости конденсированной фазы находится согласно следующему выражению:

$$\lambda^{-1} = K_s^{-1} \varphi_s + K_m^{-1} \varphi_m + K_l^{-1} \varphi_l, \quad (18.1)$$

где K_s , φ_s , K_m , φ_m и K_l , φ_l — модули и удельные объемы твердой компоненты, мягкой фракции и жидкости, соответственно. Уравнение (18.1) известно как уравнение Вуда [8, 9]. Плотность конденсированной фазы ρ_c определена так:

$$\rho_c = \rho_s \varphi_s + \rho_m \varphi_m + \rho_l \varphi_l, \quad (18.2)$$

где ρ_s , ρ_m и ρ_l — плотности твердых частиц, мягкой фракции и жидкости, соответственно. Затем мы записываем уравнение состояния для конденсированной фазы:

$$\rho_c = \rho_{0c} [1 + \lambda(p_c - p_{0c})], \quad (18.3)$$

где ρ_{0c} — невозмущенная плотность; p_c , p_{0c} — давление и ее невозмущенная величина, соответственно. Уравнение состояния для газа имеет вид:

$$p_g = p_{0g} \left(\frac{\rho_g}{\rho_{0g}} \right)^\gamma = p_{0g} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^\gamma, \quad (18.4)$$

где ρ_g — плотность газа, ρ_{0g} — соответствующая невозмущенная величина и γ — постоянная адиабаты для газа. В случае изотермического поведения газа $\gamma = 1$, φ — объем газа (пористость материала), φ_0 — невозмущенный объем газа (невозмущенная пористость материала).

Невозмущенная плотность ρ_0 смеси определяется выражением

$$\rho_0 = mU^{-1} = \rho_{0c}(1 - \varphi_0) + \rho_{0g}\varphi_0, \quad (18.5)$$

где m — масса элемента смеси и U — его объем. Этот объем является суммой газового объема и объема конденсированной фазы. Следовательно [10, 11],

$$U = m\rho^{-1} = (U - \varphi_0 U)[1 - \lambda(p_c - p_{0c})] + \varphi_0 U, \quad (18.6)$$

где ρ — осредненная плотность, λ характеризует сжимаемость материала. Используя (18.5), находим уравнение состояния в виде:

$$\rho = \rho_0 \left\{ (1 - \varphi_0)[1 - \lambda(p_c - p_{0c})] + \varphi_0 \left(\frac{p_{0g}}{p_g} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-1}. \quad (18.7)$$

Это уравнение может быть переписано приближенно так:

$$\rho = \rho_0 \left[(1 - \varphi_0) \left(\frac{p_{0c} + B}{p_c + B} \right)^{1/k} + \varphi_0 \left(\frac{p_{0g}}{p_g} \right)^{1/\gamma} \right]^{-1}, \quad (18.8)$$

где $k = 1/\lambda(p_{0c} + B)$ и B — константа. Например, для нормального состояния воды $k = 7.15$ и $B = 304.5$ МПа, $\lambda = 1/2100$ МПа [12].

Рассмотрим слабосвязные материалы в пределах волны разрежения (см. рис. 4, 41 и 52). Пусть давление в газе равняется давлению в конденсированной фазе $p_c = p_g = p$, тогда (18.8) дает

$$\rho = \rho_0 \left[(1 - \varphi_0) \left(\frac{p_0 + B}{p + B} \right)^{1/k} + \varphi_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} \right]^{-1}. \quad (18.9)$$

Дифференцируя (18.9) относительно p , мы находим скорость звука в смеси

$$\begin{aligned} c = c(p) &= \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \rho_0^{-0.5} \left[(1 - \varphi_0) \left(\frac{p_0 + B}{p + B} \right)^{1/k} + \varphi_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} \right] \times \\ &\times \left[\frac{1 - \varphi_0}{k(p + B)} \left(\frac{p_0 + B}{p + B} \right)^{1/k} + \frac{\varphi_0}{\gamma p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} \right]^{-0.5}. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Для смеси в покое имеем

$$c_0 = [(1 - \varphi_0)^2 c_{0c}^{-2} + \varphi_0^2 c_{0g}^{-2} + \varphi_0(1 - \varphi_0) \rho_{0g}^{-1} \rho_{0c}^{-1} (\rho_{0c}^2 c_{0g}^{-2} + \rho_{0g}^2 c_{0c}^{-2})]^{-0.5}, \quad (18.11)$$

где

$$c_{0c}^2 = k \rho_{0c}^{-1} (p_0 + B) \text{ и } c_{0g}^2 = \gamma \rho_{0g}^{-1} p_0. \quad (18.12)$$

Здесь c_{0c} , c_{0g} — скорости звука для конденсированной фазы и газа, соответственно.

Замечание. Если объемы твердой и мягкой компонент равны нулю, то (18.11) и (18.12) определяют скорость звука в пузырьковых жидкостях. В этом

случае уравнение (18.12) совпадает с уравнением (2.3) из [13], если мы идентифицируем φ_0 с α в [13]. При соответствующем предельном переходе уравнение (18.12) приводится также к уравнению (2.4) из [14]. Мы отмечаем, что, когда φ_0 далеко от нуля или единицы, уравнение (18.11) может быть приближенно записано так:

$$c_0^2 = \gamma p_0 [\rho_{0c} \varphi_0 (1 - \varphi_0)]^{-1}, \quad (18.13)$$

если $\gamma = 1$. Мы также отмечаем, что если φ_0 не очень близко к нулю или единице, то c_0 — много меньше, чем c_{0l} или c_{0g} (18.12).

18.3. Сильно-нелинейная модель уравнения состояния для газированных материалов

Так как $p_c = p_g = p$, то мы можем переписать уравнение (18.7) в виде:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = (1 - \varphi_0) [1 - \lambda(p - p_0)] + \varphi_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma}. \quad (18.14)$$

Согласно (18.14), появление значительных отрицательных давлений, вообще говоря, невозможно в слабосвязных материалах. Это можно показать аналитически, если процесс газовых колебаний в смеси рассмотреть как изотермический ($\gamma = 1$). В этом случае из (18.14) следует, что

$$p = 0.5\lambda^{-1} (1 - \varphi_0)^{-1} \times \\ \times \{b - b[1 + 4\varphi_0\lambda(1 - \varphi_0)b^{-2}p_0]^{0.5}\}, \quad (18.15)$$

где

$$b = (1 - \varphi_0)(1 + \lambda p_0) - \rho_0 \rho^{-1}. \quad (18.16)$$

Из двух последних уравнений следует, что давление в смеси всегда положительно, даже когда $\rho \rightarrow 0$. Например, пусть $\rho_0 \rho^{-1} \gg (1 - \varphi_0)(1 + \lambda p_0)$, тогда $p \approx -\varphi_0 b^{-1} p_0 \approx \varphi_0 \rho \rho_0^{-1} p_0$. Если $\rho_0 \rho^{-1} \approx \infty$, то $p \approx 0$.

Уравнение (18.15) приближенно описывает реальные свойства слабосвязных материалов. Видно, что прочность газированного материала определяется начальным (гидростатическим) давлением. Если давление падает в пределах волны разрежения ниже p_0 , то там материал фрагментируется.

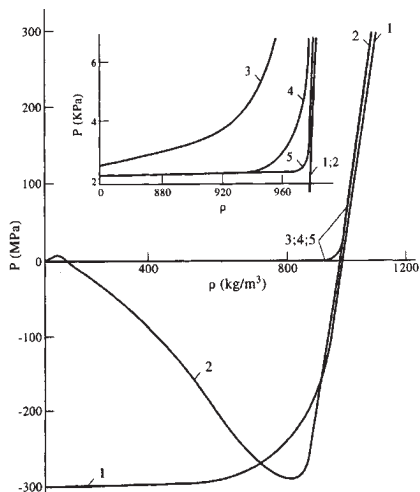


Рис. 195. Кривые, которые иллюстрируют различные модели уравнения состояния для воды [15].

Как пример несвязного материала, мы рассматриваем смесь вода-газ. Рис. 195 представляет схему изменений в кривых, соответствующих уравнениям состояния для обсужденной модели смеси. Нелинейность смеси зависит от концентрации газа. На рис. 195 кривые 3, 4 и 5 вычислены согласно уравнению состояния (18.15) для $\phi_0 = 10^{-3}$, 10^{-4} и 10^{-5} , соответственно.

Кривая 1 соответствует $\rho = \rho_0 [(p_c + B) / (p_{0c} + B)]^{-1/k}$, $k=7.15$ и $B=304.5$ МПа. Кривая 2 соответствует широкодиапазонному уравнению состояния для воды [15].

Видно, что уравнение (18.15) правдоподобно описывает поведение воды в зонах разрежения. Нелинейность среды возрастает, когда концентрация газа уменьшается. При стремлении концентрации к нулю свойства пузырьковой среды можно описать двумя отрезками (так называемая двухлинейная модель). Один отрезок почти перпендикулярен оси плотности, другой отрезок почти параллелен этой оси. Свойства смеси начинают напоминать свойства газа, когда давление падает почти до нуля.

18.4. Модельное уравнение состояния для газированных пород

В разделе 18.2 было показано, что влияние газа на распространение акустической волны может быть очень сильным. Это согласуется с известными результатами многих исследований. На рис. 196 представлены кривые, которые иллюстрируют это влияние для грязей, содержащих газ и расположенных на глубинах до 5 км [9].

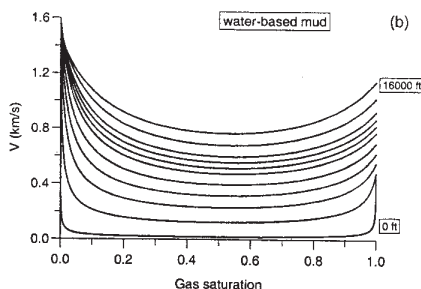


Рис. 196. Зависимость скорости звука V в газированной грязи от объема газа и глубины. Глубина меняется от 0 до приблизительно 5 км. Измерения выполнены для частоты 25 гц [9].

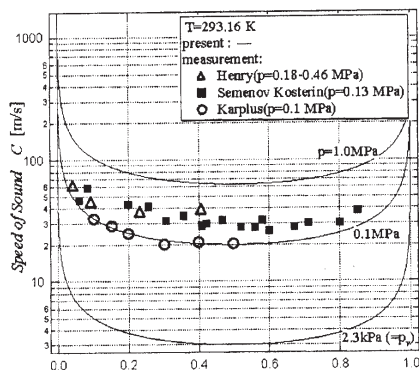


Рис. 197. Зависимость скорости звука в пузырьковой жидкости от объема газа [16].

Видно, что скорость звука в поверхностной грязи фактически падает до нуля, если удельный газовый объем фазы немного больше, чем 0 или немного меньше, чем 1. Подчеркнем, что кривые рис. 196 качественно описывают также зависимость скорости звука пузырьковой жидкости от газовой компоненты.

Аналогия кривых рис. 196 и 197 позволяет предполагать, что многие результаты и модели теории пузырьковой жидкости справедливы и для слабо-связных газированных осадочных пород.

Чтобы упростить анализ этого положения, представим уравнение состояния (18.9) в форме уравнения Тэта. Следуя [17] и пренебрегая малыми (кубически-нелинейными) членами, мы можем записать уравнение (18.9) в виде:

$$\frac{p+y}{p_0+y} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^X, \quad (18.17)$$

где

$$y = \frac{\lambda(1-\phi_0)\gamma^2 p_0^2 + \phi_0 \gamma p_0}{(k+1)(1-\phi_0)\lambda^2 \gamma^2 p_0^2 + \phi_0(\gamma+1) - [\lambda \gamma p_0(1-\phi_0) + \phi_0]^2} - p_0,$$

$$X = [\lambda(1-\phi_0) + \phi_0 / \gamma p_0]^{-1} (y + p_0)^{-1}.$$

Теперь, используя (18.17), найдем скорость звука

$$c^2 = X(p+y)p^{-1}. \quad (18.18)$$

Вычисления показали, что уравнение (18.17) — хорошее приближение для (18.9), если $(p-p_0) \leq 0.4p_0$. Вместе с этим, (18.18) — хорошее приближение для (18.10). Некоторые результаты сравнения показаны на рис. 198 и 199.

Из рис. 198 видно, что сравниваемые кривые давления вполне подобны друг другу, особенно, если $\phi_0 \ll 1$ и $\phi_0 \approx 1$.

Рис. 199 показывает изменение скорости звука, вычисленной согласно уравнениям (18.10) и (18.18) в интервале $0 \leq \phi_0 \leq 1$. В целом, кривые подобны друг другу. Мы подчеркиваем, что $c = 1450$ м/сек при $\phi_0 = nV_0 = 0$ для всех кривых рис. 199. В то же самое время кривые на рис. 199 достигают различных значений c при $\phi_0 = nV_0 = 1$, потому что там эти значения c определяются соответствующими значениями p и p_0 .

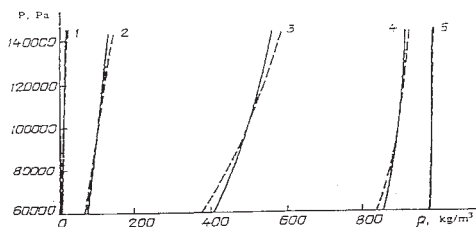


Рис. 198. Кривые $p = p(\rho)$, вычисленные, используя уравнение (18.9) (прерывистые линии) и (18.17) (сплошные линии), для различных значений ϕ_0 и для $p_0 = 0.1$ МПа. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют $\phi_0 = 0.99, 0.9, 0.5, 0.1$ и 0.01 , соответственно [17].

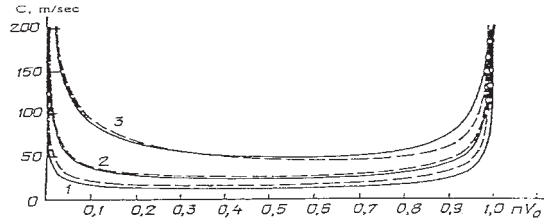


Рис. 199. Кривые, показывающие изменение скорости звука с увеличением газовой компоненты, вычисленные по уравнениям (18.10) (штриховые линии) и (18.18) (сплошные линии) для различных значений p и p_0 : $p = 0.06$ МПа, $p_0 = 0.1$ МПа (кривая 1); $p = 0.16$ МПа, $p_0 = 0.2$ МПа (2); $p = 0.3$ МПа, $p_0 = 0.5$ МПа (3). Здесь $nV_0 = \varphi_0$ [17].

18.5. Волновые уравнения для газированных осадочных пород

Здесь мы предполагаем, что следующие классические уравнения движения и непрерывности гидродинамики справедливы для осредненных параметров слабосвязных осадочных пород:

$$\frac{d\bar{V}_*}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (18.19)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \bar{V}_*, \quad (18.20)$$

где $\bar{V}_*$ — вектор скорости среды. Уравнения (18.19), (18.20) представлены в координатах Эйлера. Уравнение состояния запишем в виде уравнения Тэта (18.17). Затем вводится потенциал скорости

$$\bar{V}_* = \nabla \varphi. \quad (18.21)$$

Подставляя (18.21) в уравнение (18.19) и исключая оператор ∇ , получаем

$$\left(\frac{\varphi}{t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \int_{p_0}^p \rho^{-1} dp \right) \rho = f(t). \quad (18.22)$$

Здесь $f(t)$ — произвольная функция. После этого полагаем, что среда на бесконечности неподвижна. Используя это, мы находим, что $f(t) = 0$. Интеграл в левой части уравнения (18.22) вычисляем, используя (18.17). В результате мы находим, что

$$p = -y + (p_0 + y) \times \left\{ 1 - (X - 1) p_0 X^{-1} (p_0 + X)^{-1} \left[\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] \right\}^{X/(X-1)}. \quad (18.23)$$

Плотность определяется так:

$$\rho = \rho_0 \left\{ 1 - (X - 1)p_0 X^{-1} (p_0 + y)^{-1} \left[\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] \right\}^{1/(X-1)}. \quad (18.24)$$

Таким образом, предположение о безвихревом движении позволило определить скорости, давление и плотность среды через одну произвольную функцию φ . Мы можем получить сильно-нелинейное уравнение для φ , удовлетворяющее уравнению неразрывности (18.20). Подставляя (18.24) в (18.20) и используя (13.21) и уравнение для скорости звука $c^2 = dp / d\rho$, мы находим следующее уравнение для φ :

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \nabla^2 \varphi + [(\nabla \varphi)^2]_t + (X - 1) \varphi_t \nabla^2 \varphi + \frac{1}{2} (X + 1) (\nabla \varphi)^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (18.25)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа и

$$c_0^2 = X(y + p_0) \rho_0^{-1}. \quad (18.26)$$

Легко видеть, что в соответствующих предельных случаях уравнение (18.25) описывает распространение кубически-нелинейных волн в газе и жидкостях. Как простейшую иллюстрацию к теории рассмотрим два частных случая уравнений (18.25) и (18.26).

Сферические волны. В случае радиально-сферических квадратично-нелинейных волн уравнение (18.25) дает

$$[c_0^2 - (X - 1)\varphi_t](\varphi_{rr} + 2r^{-1}\varphi_r) = \varphi_{tt} + 2\varphi_r \varphi_{rt}, \quad (18.27)$$

где r — радиальная координата.

Продольные волны. В случае чисто продольных квадратично-нелинейных волн уравнение (18.25) приводится к следующему виду:

$$[c_0^2 - (X - 1)\varphi_t]\varphi_{xx} = \varphi_{tt} + 2\varphi_x \varphi_{xt}, \quad (18.28)$$

где x — координата Эйлера.

19. Волновые уравнения для осадочных пород, содержащих пузырьковую жидкость

Истина возникает из ошибки гораздо охотнее, чем из беспорядка.

Френсис Бэкон

Здесь мы рассматриваем слабосвязные материалы как смесь твердых и мягких частиц с пузырьковой жидкостью. Получено уравнение состояния для таких материалов. Затем для них записано нелинейное волновое уравнение. Оно в низкочастотном пределе и для слабо-нелинейных волн сводится к уравнению Буссинеска. В случае высокочастотных колебаний пузырьков получено квадратично-нелинейное уравнение Клейна-Гордона. Обсуждаются вопросы моделирования поднятия почв и извержения магмы во время землетрясений.

19.1. Эффект колебаний пузырьков на уравнение состояния слабосвязных материалов

Нелинейные колебания пузырька. Изменим уравнение (18.9) так, чтобы учесть колебания газовых включений. Пусть они имеют форму сфер радиуса R . Изменение радиуса может быть описано уравнением Релея-Плессета [3, 14, 18] с поверхностным натяжением σ :

$$\rho_{0c} \left(R R_{tt} + \frac{3}{2} R_t^2 \right) + 4\mu_g R_t / R + 2\sigma / R = p_g - p_c, \quad (19.1)$$

где μ_g — коэффициент вязкости газа. Для пузырька в состоянии покоя уравнение (19.1) дает

$$p_{0g} = p_0 + 2\sigma R_0^{-1}. \quad (19.2)$$

Теперь, используя (19.1) и (19.2), мы можем переписать уравнение состояния (18.9) так:

$$\rho_0 p^{-1} = (1 - \varphi_0) \left(\frac{p_0 + B}{p + B} \right)^{1/k} + \varphi_0 \left[\frac{p_{0c} + 2\sigma R_0^{-1}}{\rho_{0c} \left(R R_{tt} + \frac{3}{2} R_t^2 \right) + 4\mu_g R_t R^{-1} + 2\sigma R^{-1} + p} \right]^{1/\gamma}. \quad (19.3)$$

Здесь $p_c = p$, $p_{0c} = p_0$, но p_{0g} , p_0 . Из (19.3) следует, что из-за присутствия пузырей уменьшение плотности может продолжиться, хотя давление начинает увеличиваться. Другими словами, имеется запаздывание изменения объема пузырька относительно изменения давления из-за инерции и нелинейности колебаний пузырька. Следовательно, механические свойства рассматриваемых сред, например вязкость, также могут изменяться с запаздыванием по сравнению с изменением давления.

Линейные колебания пузырька. Примем, что нелинейность смеси определяется в основном ее высокой сжимаемостью и что влияние колебаний пузырьков на нелинейность незначительно. Для простоты мы также принимаем, что $\tau_g = 0$ и $\sigma = 0$. Пусть радиус пузыря — сумма R_0 и возмущения R_* :

$$R = R_0 + R_*. \quad (19.4)$$

Рассматриваются линейные колебания пузырька. В этом случае мы можем переписать (19.3) в упрощенном виде:

$$\rho_0 p^{-1} = (1 - \varphi_0) \left(\frac{p_0 + B}{p + B} \right)^{1/k} + \varphi_0 \left(\frac{p_0}{\rho_{0c} R_0 R_{II} + p} \right)^{1/\gamma}. \quad (19.5)$$

Далее учитываем сферичность колебаний пузырька, тогда уравнение состояния для газа (18.4) дает

$$R_{II} \approx -\frac{1}{3} \gamma^{-1} R_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-1/3\gamma-1} \frac{p_{II}}{p_0}. \quad (19.6)$$

Теперь мы можем переписать уравнение состояния (19.5) в виде:

$$\rho_0 p^{-1} = (1 - \varphi_0) \left(\frac{p_0 + B}{p + B} \right)^{1/k} + \varphi_0 \frac{\left(\frac{p_0}{p - \frac{1}{3} \gamma^{-1} \rho_{0c} p_0^{-1} R_0^2 p_{II}} \right)^{1/\gamma}}{\left(\frac{p - \frac{1}{3} \gamma^{-1} \rho_{0c} p_0^{-1} R_0^2 p_{II}}{p} \right)}. \quad (19.7)$$

Из последнего выражения можно видеть, что элементарный объем смеси может продолжать расширение вследствие инерции пузырьков, хотя увеличение давления уже началось. С другой стороны, согласно (19.7), значительные отрицательные давления могут появиться в среде вследствие инерции пузырьков, если отрицательное давление там существует весьма короткое время. Например, в жидкости могут существовать высокие отрицательные давления, не нарушающие ее сплошность, если отрицательные давления существуют очень короткое время, а начальный объем пузырьков чрезвычайно мал. Конечно, возникновение таких ситуаций в повседневной практике почти невозможно,

поэтому такая возможность полностью игнорируется моделями «корпусной» кавитации, рассмотренными в главе 17.

Запишем теперь выражение (19.7) для случая колебаний пузырьков малой амплитуды, задаваемых выражением $\exp i(\omega t - Ka)$. Собственная частота ω_b пузырька находится из (19.1):

$$\omega_b^2 = \rho_{0c}^{-1} R_0^{-2} [3\gamma p_0 + 2(3\gamma - 1)\sigma R_0^{-1}]. \quad (19.8)$$

Для изотермического случая в (19.8) $\gamma = 1$. Если $\sigma = 0$, то (19.8) и (19.7) дает

$$\rho_0 \rho^{-1} = (1 - \Phi_0) \left(\frac{p_0 + B}{p + B} \right)^{1/k} + \Phi_0 \left(\frac{p_0}{p - \omega_b^{-2} p_{II}} \right)^{1/\gamma}. \quad (19.9)$$

Это уравнение состояния может быть переписано также в виде следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$p - \omega_b^{-2} p_{II} = (\rho \Phi_0)^\gamma p_0 [\rho_0 - \rho(1 - \Phi_0)(p_0 + B)^{1/k} (p + B)^{-1/k}]^{-\gamma}. \quad (19.10)$$

Можно видеть из (19.9) и (19.10), что если пузырьки возбуждаются с резонансной частотой (19.8), то мы должны использовать полное уравнение состояния (19.3).

19.2. Сильно-нелинейное волновое уравнение

Здесь следуя [14], мы выведем волновое уравнение, используя усредненные параметры смеси. Для этих параметров справедливы уравнения движения и непрерывности, не отличающиеся от хорошо известных уравнений для одномерной вязкой сплошной среды:

$$\rho u_{II} (1 + u_a) = -p_a + \left(\eta_* + \frac{4}{3} +_* \right) u_{aII} \quad (19.11)$$

и

$$\rho(1 + u_a) = \rho_0. \quad (19.12)$$

Здесь u — перемещение смеси, η_* — объемная (или вторая) вязкость, $+_*$ — вязкость. Далее мы будем использовать величину $+_1$, учитывающую обе указанные вязкости: $+_1 = \eta_* + \frac{4}{3} +_*$. Назовем эту величину как эффективный

коэффициент вязкости смеси. Физические свойства смеси описываются уравнением состояния (18.9). Оно переписывается в виде:

$$\rho = \rho_0 \left[(1 - \Phi_0) \left(\frac{p_0 + B}{p + B} \right)^{1/k} + \Phi_0 \right]^{-1}. \quad (19.13)$$

Будем также использовать уравнение (19.1). Для упрощения системы уравнений (19.11)–(19.13), (19.1) введем потенциал смещения $0(a, t)$:

$$u = \Phi_a. \quad (19.14)$$

В этом случае (19.11) дает

$$p = p_0 - \rho_0 0_{aa} + \mu_1 0_{aaa}. \quad (19.15)$$

Используя (19.12) и (19.13), получим

$$\varphi = 1 + 0_{aa} - (1 - \varphi_0) \left(\frac{p + B}{p_0 + B} \right)^{-1/k}. \quad (19.16)$$

Подставляя (19.15) в (19.16), найдем, что

$$\varphi = 1 + 0_{aa} - (1 - \varphi_0) [1 - (B + p_0)^{-1} (\rho_0 0_{aa} - \mu_1 0_{aaa})]^{-1/k}. \quad (19.17)$$

Другое выражение для φ следует из уравнения (19.1). Принимая во внимание (18.4), мы переписываем это уравнение в виде:

$$\varphi = \varphi_0 p_{0g}^{1/\gamma} \left[\rho_{0c} \left(RR_{aa} + \frac{3}{2} R_t^2 \right) + p + 4 + {}_g R_t R^{-1} + 2\sigma R^{-1} \right]^{-1/\gamma}. \quad (19.18)$$

Приравнявая (19.17) и (19.18) при учете (14.14), мы получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \varphi_0 p_{0g}^{1/\gamma} \left[\rho_{0c} \left(RR_{aa} + \frac{3}{2} R_t^2 \right) + p + 4 + {}_g R_t R^{-1} + 2\sigma R^{-1} \right]^{-1/\gamma} = \\ & = 1 + 0_{aa} - (1 - \varphi_0) [1 - (B + p_0)^{-1} (\rho_0 0_{aa} - \mu_1 0_{aaa})]^{-1/k}. \end{aligned} \quad (19.19)$$

Затем мы обозначим объем, занятый газом в единице объема смеси в состоянии покоя, как nV_0 ($\varphi_0 = nV_0$). Здесь n — число пузырей в единице объема смеси. В этом случае, если V — объем сферического пузыря радиуса R , мы имеем $\varphi = nV$ и

$$\begin{aligned} R = & \left(\frac{3}{4} n^{-1} \pi^{-1} \right)^{1/3} \left\{ 1 + 0_{aa} - (1 - \varphi_0) \times \right. \\ & \left. \times [1 - (B + p_0)^{-1} (\rho_0 0_{aa} - \mu_1 0_{aaa})]^{-1/k} \right\}^{1/3}. \end{aligned} \quad (19.20)$$

Подставляя (19.20) в (19.19), мы получаем сильно-нелинейное волновое уравнение

$$p_{0g} \varphi_0^{-\gamma} \left\{ 1 + 0_{aa} - (1 - \varphi_0) [1 - (B + p_0)^{-1} (\rho_0 0_{aa} - \mu_1 0_{aaa})]^{-1/k} \right\}^{-\gamma} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{3}{4} n\pi \right)^{2/3} \rho_{0c} \mathcal{Z}^{1+0_{aa} - (1-\varphi_0)[1-(B+p_0)^{-1}(\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa})]^{-1/k}}^{1/3} \mathcal{Z} \\
&\quad \times \mathcal{Z}^{1+0_{aa} - (1-\varphi_0)[1-(B+p_0)^{-1}(\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa})]^{-1/k}}^{1/3} \mathcal{Z}_t + \\
&+ \frac{3}{2} \left(\frac{3}{4} n\pi \right)^{2/3} \rho_{0c} \mathcal{Z}^{1+0_{aa} - (1-\varphi_0)[1-(B+p_0)^{-1}(\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa})]^{-1/k}}^{1/3} \mathcal{Z}_t + \\
&\quad + 4\mu_g \mathcal{Z}^{1+0_{aa} - (1-\varphi_0)[1-(B+p_0)^{-1}(\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa})]^{-1/k}}^{1/3} \mathcal{Z}_t \times \\
&\quad \times \mathcal{Z}^{1+0_{aa} - (1-\varphi_0)[1-(B+p_0)^{-1}(\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa})]^{-1/k}}^{1/3} \mathcal{Z}_t + \\
&+ 2\sigma \left(\frac{3}{4} n\pi \right)^{-1/3} \mathcal{Z}^{1+0_{aa} - (1-\varphi_0)[1-(B+p_0)^{-1}(\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa})]^{-1/k}}^{1/3} \mathcal{Z}_t + \\
&\quad + p_0 - \rho_0 \partial_{tt} + \mu_1 \partial_{taa}. \tag{19.21}
\end{aligned}$$

По сравнению с моделями секции 18.5, уравнение (19.21) намного более сложное. Оно может быть немного упрощено в случае $\gamma = 1$. Уравнение (19.21) — наше основное уравнение. Это уравнение точно соответствует системе уравнений (19.11)–(19.13) и (19.1).

19.3. Трехскоростное волновое уравнение и линейная акустика слабосвязных осадочных пород

Для простоты примем $\sigma = 0$ и $\varphi_0 \ll 1$, тогда линейные члены в (19.19) дают

$$\begin{aligned}
&0_{aa} - k^{-1}(1-\varphi_0)(B+p_0)^{-1}(\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa}) = \\
&= \gamma^{-1} p_0^{-1} \varphi_0 [\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa} - \rho_{0c}(R_0 R_{tt} + 4\mu_g \rho_{0c}^{-1} R_0^{-1} R_t)]. \tag{19.22}
\end{aligned}$$

Находим выражение для $R(t)$ из (19.20) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
R &\approx \left(\frac{3}{4} n\pi \right)^{1/3} \varphi_0^{1/3} \left[1 + \frac{1}{3} \varphi_0^{-1} 0_{aa} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} k^{-1} (\varphi_0^{-1} - 1)(B+p_0)^{-1}(\rho_0 \partial_{tt} + {}_1 0_{taa}) \right]. \tag{19.23}
\end{aligned}$$

Подставляя (19.23) в (19.22) и используя

$$R_0 = \left(\frac{3}{4} n\pi \right)^{1/3} (\varphi_0)^{1/3}, \tag{19.24}$$

получим

$$\begin{aligned}
0_{aa} - c_0^{-2} 0_{\pi} + \mu_1 \rho_0^{-1} c_0^{-2} 0_{\pi aa} = & -\gamma^{-1} p_0^{-1} \rho_{0c} R_0 \left(\frac{3}{4} n_1 \right)^{1/3} \Phi_0^{1/3} \times \\
& \times \left[\frac{1}{3} 0_{aatt} - \frac{1}{3} k^{-1} (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} (\rho_0 0_{\pi\pi} - +_1 0_{\pi aa}) \right] - \\
& - \gamma^{-1} p_0^{-1} \rho_{0c} (4 + {}_g \rho_{0c}^{-1} R_0^{-1}) \left(\frac{3}{4} n_1 \right)^{1/3} \Phi_0^{1/3} \times \\
& \times \left[\frac{1}{3} 0_{aat} - \frac{1}{3} k^{-1} (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} (\rho_0 0_{\pi\pi} - +_1 0_{\pi aa}) \right]. \quad (19.25)
\end{aligned}$$

Здесь

$$c_0^{-2} = \rho_0 [k^{-1} (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} + \gamma^{-1} p_0^{-1} \Phi_0]. \quad (19.26)$$

Далее (19.25) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
0_{aa} - c_0^{-2} 0_{\pi} + (\mu_1 \rho_0^{-1} c_0^{-2} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g) 0_{aat} - \\
- \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} \mu_g k^{-1} (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} \rho_0 0_{\pi\pi} = \\
= -\gamma^{-1} p_0^{-1} \rho_{0c} R_0^2 \left[\frac{1}{3} 0_{aatt} - \frac{1}{3} k^{-1} (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} \rho_0 0_{\pi\pi} \right] - \\
- \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} \mu_g k^{-1} (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} +_1 0_{\pi aa} - \\
- \gamma^{-1} p_0^{-1} \rho_{0c} R_0^2 \frac{1}{3} k^{-1} (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} +_1 0_{\pi aa}. \quad (19.27)
\end{aligned}$$

Уравнение (19.27) описывает волны, имеющие разные скорости. Чтобы сделать это явным, перепишем его так:

$$\begin{aligned}
0_{\pi} - c_0^2 0_{aa} = & \left(\mu_1 \rho_0^{-1} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g c_0^2 \right) (0_{aa} - c_v^{-2} 0_{\pi})_a + \\
+ c_0^2 \left[\omega_b^{-2} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g k^{-1} (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} +_1 \right] & (0_{aa} - c_d^{-2} 0_{\pi})_{\pi} + \\
+ k^{-1} \omega_b^{-2} c_0^2 (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} +_1 0_{\pi aa}, \quad (19.28)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_v^{-2} = & \frac{4}{3} \rho_0 \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g k^{-1} c_0^2 (1 - \Phi_0) (B + p_0)^{-1} \times \\
& \times \left(\mu_1 \rho_0^{-1} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g c_0^2 \right)^{-1}, \quad (19.29)
\end{aligned}$$

$$c_d^{-2} = \frac{1}{3} \rho_0 \gamma^{-1} p_0^{-1} \rho_{0c} R_0^2 k^{-1} (1 - \varphi_0) (B + p_0)^{-1} \times \\ \times \left[\omega_b^{-2} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g k^{-1} (1 - \varphi_0) (B + p_0)^{-1} + {}_1 \right]^{-1}. \quad (19.30)$$

Здесь ω_b^{-2} следует из (19.8), если там $\sigma = 0$.

Мы получили волновое уравнение (19.28) с тремя волновыми скоростями: «низкочастотная» скорость звука в смеси c_0 определяется выражением (19.26), «высокочастотная» скорость звука c_d описывается как (19.30), скорость c_v (19.29) зависит существенно от вязких свойств газа и сжатой фазы. Мы подчеркиваем, что скорости c_d и c_v слабо зависят от концентрации газа по сравнению с c_0 . При соответствующих упрощениях из уравнения (19.28) следует уравнение (4.11), полученное в [14].

19.4. Влияние вязкостных свойств пузырьковой среды на скорость звука

Уменьшение скорости длинных волн из-за присутствия пузырьков рассматривается обычно как фундаментальное свойство пузырьковых сред. Однако недавно было найдено [19], что скорость звука в средах с большой вязкостью (например, магма [20, 21]) зависит от вязкости и не уменьшается присутствием пузырей. Зададимся вопросом — возможно ли это согласно уравнению (19.28)?

Пусть вязкость $+_1$ очень велика. Рассматривая этот случай, запишем (19.28), сохраняя только члены, учитывающие вязкостные эффекты,

$$\left(\mu_1 \rho_0^{-1} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g c_0^2 \right) 0_{aa} - \\ - \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} \mu_g k^{-1} c_0^2 (1 - \varphi_0) (B + p_0)^{-1} \rho_0 0_{\pi} = \bar{C}. \quad (19.31)$$

Здесь $\bar{C}$ — постоянная интегрирования. Полагаем ее равной нулю. В результате получим удивительное волновое уравнение. Согласно ему, скорость звука во введенной среде зависит в первую очередь от ее вязкостных свойств. Так как вязкость газа мала, то, учитывая (19.26), переписываем (19.31) в следующем виде:

$$\mu_1 \rho_0^{-1} 0_{aa} - \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g [1 + k \gamma^{-1} p_0^{-1} \varphi_0 (1 - \varphi_0)^{-1} (B + p_0)^{-1}] 0_{\pi} = 0. \quad (19.32)$$

Отсюда видно, что, если

$$1 \ll k\gamma^{-1} p_0^{-1} \phi_0 (1 - \phi_0)^{-1} (B + p_0), \quad (19.33)$$

то полученное уравнение практически не зависит от газосодержания и его можно записать в виде:

$$\left(\cdot_* + \frac{4}{3} +_* \right) \rho_0^{-1} 0_{aa} - \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} +_g 0_{\pi} = 0. \quad (19.34)$$

Теперь введем явно выражение для скорости звука. В результате (19.34) примет вид:

$$0_{\pi} - a_c^2 0_{aa} = 0, \quad (19.35)$$

где

$$a_c^2 = \frac{3}{4} \rho_0^{-1} \gamma p_0 +_g^{-1} \left(\cdot_* + \frac{4}{3} +_* \right). \quad (19.36)$$

Конечно, мы не ожидаем, что полученное выражение для скорости волн a_c (19.36) хорошо описывает реальность. Но, возможно, оно схватывает некоторые тенденции. В частности, согласно (19.36), скорость звука с одинаковыми $\cdot_*$, но разными $+_*$ может быть различна. Возможно, что вязкость газа в пузырьках может неожиданно сильно влиять на волновые свойства некоторых вулканических магм. Наконец, (19.36) не зависит от газосодержания, что согласуется с данными экспериментов для некоторых сред [19].

19.5. Усиление волн в пузырьковых средах за счет вязких эффектов

Известно, что объемная вязкость пузырьковых сред определяется в значительной степени радиусом пузырьков и давлением. В случае волн, длинных сравнительно с размерами пузырька, его радиус и давление меняются синхронно и, по-видимому, коэффициент объемной вязкости не меняет свой положительный знак. Однако в случае коротких волн начинает сказываться инерционность пузырька, и это может привести к появлению отрицательной объемной вязкости. Такая возможность обсуждалась в [19] применительно к вулканической магме. Здесь мы прямым исследованием объемной вязкости заниматься не будем, однако, зададимся вопросом — возможно ли появление отрицательной эффективной вязкости в рассматриваемых средах согласно уравнению (19.28)? Или вопрос можно переформулировать по-другому — возможны ли такие условия, при которых волна разрежения при распространении будет не затухать, а усиливаться, благодаря вязкости?

Будем рассматривать однонаправленные волны. Пусть

$$0 = 0(r), \quad r = \omega t - Ka. \quad (19.37)$$

В этом случае (19.28) дает

$$(\omega^2 K^{-2} - c_0^2)0_{aa} = \left(\mu_1 \rho_0^{-1} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g c_0^2 \right) (1 - c_v^{-2} \omega^2 K^{-2}) 0_{aaa} + \\ + c_0^2 \omega^2 K^{-2} \left[\omega_b^{-2} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g k^{-1} (1 - \varphi_0) (B + p_0)^{-1} + {}_1 \right] \times \\ \times (1 - c_d^{-2} \omega^2 K^{-2}) \Phi_{aaaa}. \quad (19.38)$$

Мы отбросили член $k^{-1} \omega_b^{-2} c_0^2 (1 - \varphi_0) (B + p_0)^{-1} + {}_1 0_{aaaa}$. Введем обозначения:

$$G = \Phi_{aa}, \\ \lambda = 0.5 \left(\mu_1 \rho_0^{-1} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g c_0^2 \right) (1 - c_v^{-2} \omega^2 K^{-2}) \times \\ \times \left\{ c_0^2 \omega^2 K^{-2} \left[\omega_b^{-2} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g k^{-1} (1 - \varphi_0) (B + p_0)^{-1} + {}_1 \right] (1 - c_d^{-2} \omega^2 K^{-2}) \right\}^{-1}, \\ \omega_0^2 = (c_0^2 - \omega^2 K^{-2}) \left\{ c_0^2 \omega^2 K^{-2} \left[\omega_b^{-2} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g k^{-1} (1 - \varphi_0) (B + p_0)^{-1} + {}_1 \right] \times \right. \\ \left. \times (1 - c_d^{-2} \omega^2 K^{-2}) \right\}^{-1}. \quad (19.39)$$

В результате (19.38) преобразуется в уравнение (12.39):

$$G_{aa} + 2\lambda G_a + \omega_0^2 G = 0. \quad (19.40)$$

В результате описанных простых математических операций мы свели исследование уравнения (19.38) к анализу модельного уравнения (19.40), которое рассмотрено достаточно полно в разделе 12.4. Согласно приведенным там результатам, если $\lambda > 0$, то волна, описываемая уравнением (19.38), ослабляется (затухает) при распространении (*затухающие волны*). Если $\lambda < 0$, то можно говорить, что волна *усиливается*. Следовательно, если параметры волны и среды таковы, что выполняется условие

$$0.5 \left(\mu_1 \rho_0^{-1} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g c_0^2 \right) (1 - c_v^{-2} \omega^2 K^{-2}) \times \\ \times \left\{ c_0^2 \omega^2 K^{-2} \left[\omega_b^{-2} + \frac{4}{3} \gamma^{-1} p_0^{-1} + {}_g k^{-1} (1 - \varphi_0) (B + p_0)^{-1} + {}_1 \right] \times \right. \\ \left. \times (1 - c_d^{-2} \omega^2 K^{-2}) \right\}^{-1} \neq 0, \quad (19.41)$$

то волна может усиливаться. Исследование возможности выполнения условия (19.41) требует отдельного рассмотрения. Мы не будем здесь на этом останавливаться. Отметим только, что согласно [19] такая возможность имеется.

19.6. Квадратично-нелинейная акустика газированных сред: уравнения Буссинеска и Клейна-Гордона

Вернемся к основному уравнению (19.21) и получим нелинейные уравнения, сохраняя только линейные и квадратично-нелинейные члены. Принимаем, что $\sigma = 0$.

Низкочастотные волны. Переписываем уравнение (19.21), пренебрегая вязкостными эффектами и учитывая, что для рассматриваемого случая c_d^{-2} (19.30) очень мало. В этом случае мы получим

$$\begin{aligned} 0_{tt} - c_0^2 0_{aa} &= c_0^2 \omega_b^{-2} 0_{aat} - \frac{1}{2} \rho_0^2 c_0^2 \times \\ &\times [\rho_{0c}^{-2} c_{0c}^{-4} (1+k)(1-\varphi_0) + \rho_{0g}^{-2} c_{0g}^{-4} (1+\gamma)\varphi_0] 0_{tt}^2. \end{aligned} \quad (19.42)$$

Для невязкой смеси уравнение (19.11) дает

$$p_0 - p = \bar{P} = \rho_0 0_{tt}. \quad (19.43)$$

Используя (19.43), мы переписываем уравнение (19.42) в виде:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{tt} - c_0^2 \bar{P}_{aa} &= \omega_b^{-2} c_0^2 \bar{P}_{aat} + \\ &+ 0.5 \rho_0 c_0^2 [\rho_{0c}^{-2} c_{0c}^{-4} (1+\lambda)(1-\varphi_0) + \rho_{0g}^{-2} c_{0g}^{-4} (1+\gamma)\varphi_0] (\bar{P}^2)_{tt}. \end{aligned} \quad (19.44)$$

Уравнение (19.44) — уравнение Буссинеска. Для однонаправленных волн уравнение Кортевега-де Вриза следует из (19.44).

Высокочастотные волны. При высоких частотах колебания являются изотермическими ($\gamma = 1$). Далее среду идеализируем как невязкую, тогда из (19.20) и (19.38) мы имеем, что

$$\begin{aligned} R \approx R_0 \left[1 + \frac{1}{3} \varphi_0^{-1} 0_{aa} - \frac{1}{3} \varphi_0^{-1} (1-\varphi_0) k^{-1} (B + p_0)^{-1} (p_0 - p) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \varphi_0^{-1} (1-\varphi_0) k^{-1} (k^{-1} + 1) (B + p_0)^{-2} (p_0 - p)^2 \right]. \end{aligned} \quad (19.45)$$

Затем, используя (19.19) и (19.45), мы получим нелинейное уравнение Клейна-Гордона:

$$\begin{aligned} c_f^{-2} \bar{P}_{tt} - \bar{P}_{aa} + \omega_b^2 [(1-\varphi_0) c_{0c}^{-2} + \rho_0 p_0^{-1} \varphi_0] \bar{P} - \\ - \frac{1}{2} (1-\varphi_0) (k+1) \rho_0^{-1} c_{0c}^{-2} (\bar{P}^2)_{tt} = 0. \end{aligned} \quad (19.46)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и нелинейное уравнение Клейна-Гордона, которое было получено в [13].

19.7. Сильно-нелинейные волновые уравнения

Здесь мы рассмотрим сильно-нелинейные модели, которые следуют из теории, если длина волны намного больше, чем радиус пузыря. В этом случае мы можем использовать линейное приближение для уравнения Релея-Плессета (19.1). Если мы примем дополнительно, что $+_g = +_1 = \sigma = 0$, то (19.19) дает

$$\varphi_0 p_0^{1/\gamma} (\rho_{0c} R_0 R_{II} + p)^{-1/\gamma} = 1 + 0_{aa} - (1 - \varphi_0) [1 - (B + p_0)^{-1} \rho_0 \theta_{II}]^{-1/k}. \quad (19.47)$$

Затем, используя далее (19.15) и (19.20), мы получаем следующее сильно-нелинейное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + 0_{aa} - (1 - \varphi_0) [1 - (B + p_0)^{-1} \rho_0 \theta_{II}]^{-1/k} \right\}^{-\gamma} = \\ & = \varphi_0^{-\gamma} (1 - \rho_0 p_0^{-1} 0_{II}) + \varphi_0^{-\gamma-1} \gamma \omega_b^{-2} (0_{aa} - c_f^{-2} 0_{II})_{II}. \end{aligned} \quad (19.48)$$

Уравнения для конденсированной фазы и газа следуют из (19.48) как частные случаи.

1. При отсутствии газа ($\varphi_0 = 0$) правая сторона (19.48) равна нулю. Дифференцируем левую сторону и вспомнив, что $u = \Phi_a$, находим

$$u_{II} - c_{0c}^2 (1 + u_a)^{-k-1} u_{aa} = 0. \quad (19.49)$$

Мы получим уравнение Эйри (4.1).

2. В случае $\varphi_0 = 1$ уравнение (19.48) дает

$$1 + 0_{aa} = p_{0g}^{1/\gamma} (p_{0g} - \rho_{0g} \theta_{II})^{-1/\gamma}. \quad (19.50)$$

Отсюда находим уравнение Эйри, записанное для газа,

$$u_{II} - c_{0g}^2 (1 + u_a)^{-1-\gamma} u_{aa} = 0. \quad (19.51)$$

19.8. Заключение

Мы рассмотрели слабосвязные газированные материалы. В зонах сжатия механические свойства этих материалов могут быть очень сложными. Однако в пределах сильных волн разрежения их свойства становятся намного проще. Там поведение этих материалов может соответствовать свойствам смеси жидкость-газ.

Используя эту идею, мы построили в настоящей части книги несколько механических моделей и записали ряд волновых уравнений для газированных осадочных пород. Согласно теории, процесс разрыхления и расширения этих материалов в сейсмически-вызванных волнах разрежения может быть подобным расширению шампанского после открытия бутылки (рис. 200, 201). Разрыхление может возникнуть и внутри верхних слоев земли в результате колебаний жесткого подстилающего основания. Возникающие при этом процессы могут напоминать показанные на рис. 187. Эти аналогии в какой-то мере

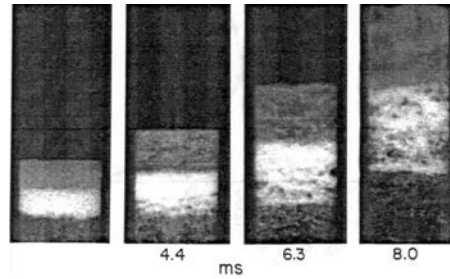


Рис. 200. Процесс расширения трехслойного цилиндрического объема гранулированного материала. Слои образованы частицами размерами 0.25 мм, 0.5 мм и 0.75 мм. Наименьшие частицы наверху; наибольшие частицы у основания [22].

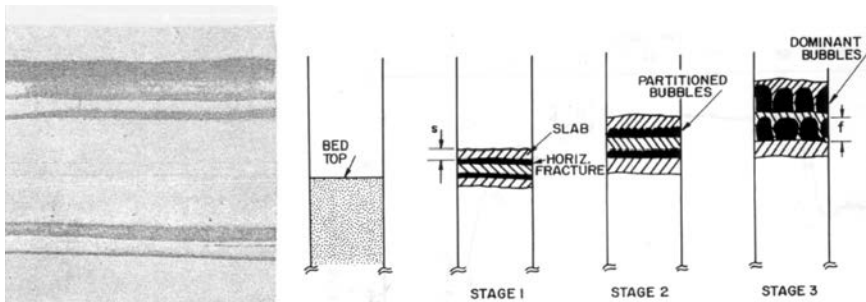


Рис. 201. Кавитационно-слоистый разрыв воды в волне разрежения (слева, [23]) и схема кавитационно-слоистого разрушения газированного материала (справа, [22]).

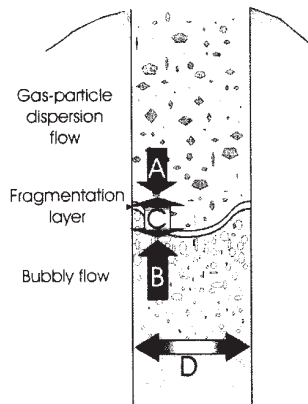


Рис. 202. Эскиз фрагментации магмы в волне разрежения [25]. См. также рис. 34, 38 и 51.

объясняют быстрое поднятие рыхлых слоев земной поверхности в процессе землетрясения.

Эта аналогия справедлива, конечно, не только для слабосвязных пород. Как мы отмечали в первой части книги, она объясняет закипание магмы в волне разрежения, возникающей при открытии магматического канала вулкана в результате землетрясения (рис. 202). Таким образом, в какой-то мере она объясняет явно существующую в некоторых случаях последовательность — сначала землетрясение, затем извержение вулкана. Конечно, это только схема. Свойства магмы много сложнее свойств жидкости, однако, известно, что фрагментация магмы напоминает фрагментацию чрезвычайно вязкой жидкости [24, 25].

Указанная аналогия с жидкостью позволяет наметить метод расчета поднятия земной поверхности в результате отражения от нее вертикально распространяющейся сейсмической волны сжатия.

Рассмотрим верхний слой земли, толщина которого много меньше длины падающей волны. Такой слой можно рассматривать как некоторую массу, распределенную по полупространству. Сдвиговой прочностью материала полупространства пренебрегаем. Для иллюстрации подобной схемы мы приводим на рис. 203 результаты расчетов перемещения слоя массой M , помещенного на

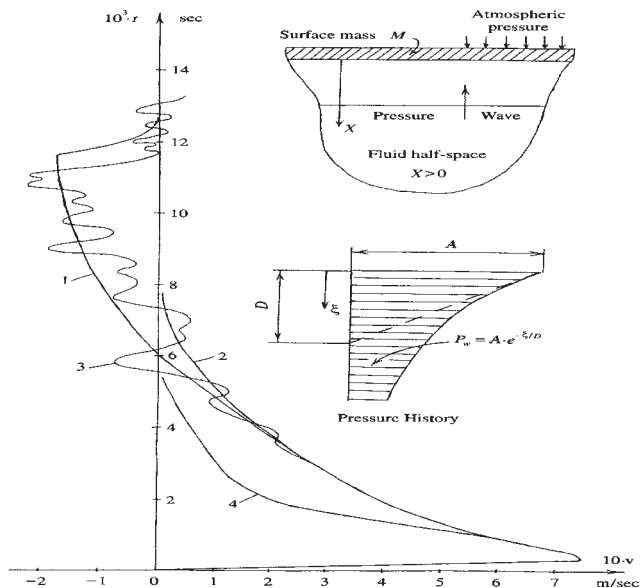


Рис. 203. Эффект кавитации на скорость поверхностного слоя массы M [26, 27].

жидком полупространстве, возникающего при отражении волны давления от слоя. Волна, имеющая профиль с участком очень быстрого роста и участок относительно плавного спада, достигает нижней поверхности слоя при $t=0$.

Волна отражается как волна разрежения, в которой возникает кавитация. Мы интересуемся воздействием кавитации на движение слоя. На рис. 203 показано изменение его скорости. Кривые 1–3 вычислены согласно кавитационным моделям воды, кривая 4 соответствует случаю идеально упругой модели воды. Как видно из рис. 203, возникновение приповерхностной нестационарной кавитации может сильно изменить движение слоя.

Таким образом, в пределах волны разрежения объем материала может сильно увеличиться [28, 12, 29]. В результате свободная поверхность разрушенного волной материала поднимается. Как уже подчеркивалось, мы думаем, что этот эффект частично объясняет вызванное землетрясением поднятие земли, описанное Чарльзом Дарвином.

Мы получили одномерные волновые уравнения для слабосвязных геоматериалов. В целом, эти уравнения согласуются с уравнениями, приведенными в хорошо известных публикациях (см., например, [30–32]).

Литература

- [1] Darwin, C., 1839. Journal of Researches into the Geology and Natural History of the Various Countries Visited by H.M.S. *Beagle*, under the Command of Captain FitzRoy, R.N. from 1832 to 1836. Henry Colburn, London.
- [2] Darwin, C., 1845. Journal of Researches into the Natural History and Geology of the Countries Visited during the Voyage of H.M.S. *Beagle* Around the World, under the Command of Captain FitzRoy, R.N. T. Nelson and Sons, London.
- [3] Нигматулин Р.И., 1987. Динамика многофазных сред. Части I и II. Наука, Москва.
(in English translation: Nigmatulin, R.I., 1987. Dynamics of Multiphase Media; Parts I and II. Taylor & Francis: London, 1991.)
- [4] Pak, H.K., Behringer, R.P., 1994. Bubbling in vertically vibrated granular material. *Nature*, **371**, 231.
- [5] Jaeger, H.M., Nagel, S.R., Behringer, R.P., 1996. Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, **68**, 1259–1273.
- [6] Pease, J.W., O'Rourke, T.D., 1997. Seismic response of liquefaction sites. *J. Geotech. Engrg., ASCE*, **123**, 37–45.
- [7] Buchanan, M., 2003. Think outside the sandbox. *Nature*, **425**, 558–559.
- [8] Wood, A.B., 1955. A Textbook of Sound. Macmillan.
- [9] Carcione, J.M., Poletto, F., 2000. Sound velocity of drilling mud saturated with reservoir gas. *Geophysics*, **65** (2), 647–651.
- [10] Zabolotskaya, E.A., Soluyan, S.I., 1974. Nonlinear-wave propagation in a liquid containing uniformly distributed air bubbles. *Soviet Physics Acoustics*, **19** (5), 442–444.
- [11] Руденко, О.В., Солуян, С.И., 1975. Теоретические Основы Нелинейной Акустики. Наука. Москва (in English translation: Rudenko, O.V. Soluyan, S. I., 1977. Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. Consultants Bureau: Plenum).
- [12] Галиев Ш.У., 1988. Нелинейные волны в ограниченных средах. Наукова думка, Киев.
- [13] Crighton, D.G., 1990. Nonlinear acoustics of bubbly liquids. (unpublished).
- [14] Wijngaarden, L. van, 1972. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **4**, 369–396.
- [15] Galiev, Sh.U., 1997. The influence of cavitation upon anomalous behavior of a plate/liquid/underwater explosion system. *Int. J. Impact Engng.*, **19**, 345–359.

- [16] Iga, Y., Nohml, M., Goto, A., Ikohagi, T., 2004. Numerical analysis of cavitation instabilities arising in the three-blade cascade. *J. Fluids Engineering*, **126**, 419–429.
- [17] Галиев, Ш. У., Панова, О. П., 1995. Периодические ударные волны в сферических резонаторах. *Проблемы прочности*, **27 (10)**, 49–73.
- [18] Prosperetti, A., 1991. The thermal behaviour of oscillating gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, **222**, 587–616.
- [19] Ichihara, M., Ohkunitani, H., Ida, Y., Kameda, M., 2004. Dynamics of bubble oscillation and wave propagation in viscoelastic liquids. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, **129**, 37–60.
- [20] Alidibirov, M., Dingwell, D.B., 1996. Magma fragmentation by rapid decompression. *Nature*, **380**, 146–148.
- [21] Gonnermann, H.M., Manga, M., 2007. The fluid mechanics inside a volcano. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **39**, 321–356.
- [22] Замышляев, Б. В., Яковлев, Ю. С., 1967. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Судостроение, Ленинград.
- [23] Anilkumar, A.V., 1989. Experimental Studies of High-Speed Dense Dusty Gases. Thesis of Doctor of Philosophy, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- [24] Kameda, M., Kuribara, H., Ichihara, M., 2008. Dominant time scale for brittle fragmentation of vesicular magma by decompression. *Geophys. Res. Lett.*, **35**, L14302.
- [25] Spieler, O., Dingwell, D.B., Alidibirov, M., 2004. Magma fragmentation speed: an experimental determination. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, **129**, 109–123.
- [26] Galiev, Sh.U., 2008. Strongly-nonlinear wave phenomena in restricted liquids and their mathematical description. In *New Nonlinear Phenomena Research*, Ed. T.Perlidze, 109–300, Nova Science Publishers, NY.
- [27] Galiev, Sh.U., Romashchenko, V.A., 1999. A method of solving nonstationary three-dimensional problems of hydroelasticity with allowance for fluid failure. *Int. J. Impact Eng.*, **22**, 469–483.
- [28] Фомин, В. М., Хакимов, Э. М., 1981. Откольное разрушение среды в плоских волнах разрежения. Препринт СО АН СССР. Ин-т теоретич. и прикл. механики, Новосибирск.
- [29] Ichihara, M., 2008. Dynamics of a spherical viscoelastic shell: Implications to a criterion for fragmentation/expansion of bubbly magma. *Earth Planetary Sci. Lett.*, **265**, 18–32.

[30] Richardson, M.D., Griffin, S.R., Briggs, K.B., Anderson, A.L., Lyons, A.P., 1994. The effects of free-methane bubbles on the propagation and scattering of compressional and shear wave energy in muddy sediments. *JASA*, **96**, **5** (2), 3218.

[31] Nakoryakov, V.E., Kuznetsov, V.V., Dontsov, V.E., 1989. Pressure waves in saturated porous media. *Int. J. Multiphase Flow*, **15**, 857–875.

[32] Nakoryakov, V.E., Dontsov, V.E., Pokusaev, B.G., 1996. Pressure waves in a liquid suspension with solid particles and gas bubbles. *Int. J. Multiphase Flow*, **22** (3), 417–429.

Часть V.

Катастрофические резонансные волны: от моретрясений до атомизации и ранней Вселенной

...мнение широкой публики не очень-то заботило меня. ...я уверен, что ради славы я никогда ни на дюйм не отступил бы от принятого мною пути.

Дарвин

Не дорого ценю я громкие права,
От коих не одна кружится голова...,
По прихоти своей скитаться здесь и там,
Дивясь божественным природы красотам...
Вот счастье! Вот права...

Пушкин

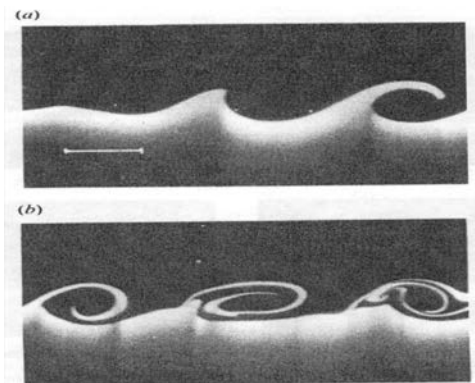


Рис. 204. Развитие гармонической волны в катастрофическую волну и вихрь в двухслойной системе [1].

Кавитационные процессы, возможные при моретрясениях, и причины поднятия поверхности слабосвязанных сред при землетрясениях рассмотрены в предыдущей части, однако и для этой части книги свидетельства Дарвина служат важной отправной точкой. В результате сильных вертикальных колебаний дна море непосредственно над эпицентром землетрясения начинает сотрясаться наподобие слоя в экспериментах Фарадеевского типа (рис. 2, 23). На его поверхности возникают струи, каверны и пузыри. Вода расслаивается и разрушается (рис. 201). Все это в случае океана весьма неожиданно, и явление не сразу понятно. Чтобы ситуацию несколько прояснить, отметим, что колебаниям дна во время землетрясений можно поставить в соответствие колебания поршня в экспериментах Натансона (см. рис. 3, 21, 22), который изучал неожиданное кавитационное поведение столба жидкости, имеющего подвижную нижнюю границу и свободную поверхность. Таким образом, просматривается аналогия экспериментов Натансона и простейших схем моретрясения. Имеется и другая напрашивающаяся аналогия. Задачу изучения вызванных колебаниями дна поверхностных волн можно рассматривать как простейшую задачу нелинейной гидроупругости, так как положение возникающих кавитационных зон в каждый момент времени неизвестно. Таким образом, рассматриваемые данные Дарвина, в определенной мере, лежат в области интересов и знаний специалистов в области нелинейной гидроупругости, к которым принадлежит автор, который много лет исследовал влияние кавитационных процессов на прочность подводных судов при действии сильных подводных волн (см. главу 17). Определенное представление о динамике возникающих при моретрясениях пузырей дают рис. 172 и 187. Последний взят из одной из книг автора. Таким образом, принципиальное понимание одной стороны описанного Дарвином явления, связанного с возникновением пузырей, содержащих запах донных отложений, нам понятно, однако другая сторона, связанная с возникновением поверхностных волн не вполне ясна, хотя, очевидно, что она определяется эффектом Фарадея. Поэтому в этой части книги значительное место уделяется высоко-нелинейным волнам Фарадея. Согласно теории, их возникновение может сопровождаться появлением струй, капель и схлапывающихся кратеров. Указанные явления отмечались многими наблюдавшими закипание моря при вибрациях, вызванных вулканами и землетрясениями. Вместе с тем мы истолковываем полученные для указанных высоко-нелинейных волн результаты много шире, чем только моретрясения.

Волновая нелинейность — важный элемент Природы. В частности, она часто использует многозначные складчатые формы волн (например, опрокидывающиеся волны и волны, зарождающиеся при возникновении турбулентности (рис. 204)). Математически это соответствует тому, что нелинейные вол-

новые уравнения определяют несколько динамических состояний равновесия при одних и тех же значениях параметров. Некоторые состояния могут быть хаотическими, в то время как другие являются периодическими (см. рис. 91). Возникновение катастрофических волн связано с этими часто неустойчивыми состояниями. Математические трудности, связанные с изучением подобных сложных нелинейных волновых состояний, отпугивали многих ученых от поисков соответствующих им простых математических моделей.

Мы продолжаем здесь развивать теорию катастрофических волн. Здесь понятие — катастрофические волны — расширяется и выходит за рамки океанских волн. Теперь под катастрофическими будут подразумеваться, в первую очередь, волны, имеющие складки (многозначности) на их профиле [2]. Показано, что подобные волны могут существовать в различных средах и полях. Пример гармонической волны, эволюционирующей в катастрофическую волну, а затем в спиральный вихрь, представлен на рис. 204. Предполагается, что такая эволюция возможна во многих ситуациях, например, в моменты появления турбулентности или зарождения Вселенной. В последнем случае, согласно теории Большого взрыва, вещество и энергия были первоначально равномерно распределены по пространству. Однако во время инфляционного расширения возникли крошечные флуктуации — пики плотности и зоны разрежения. Скорости волн плотности и света были в те времена почти равными. Следовательно, между ними могло выполняться условие резонанса. Возможно, резонансная эволюция флуктуаций плотности в катастрофические волны образовала зародыши галактик и структуру нашей Вселенной. Изучая указанные волны, мы еще раз убеждаемся в единстве Природы.

20. Катастрофические волны со складчатым фронтом

Мои дорогие аналогии — мои самые надежные учителя.

Кеплер

20.1. Примеры высоко-нелинейных волновых уравнений

Двадцатый век..., где дышит интеграл.

(из «Возмездие» и «Скифы») А. Блок

Природа бесконечно разнообразна в своих проявлениях и, вместе с тем, если внимательно приглядеться, она не любит «пышного великолепия излишних причин» (Коперник). Эта старая и глубокая мысль все более и более подтверждается развитием науки.

Законы механики, известные как законы Ньютона, а в действительности, в основном, сформулированные Галилеем, Декартом и другими предшественниками Ньютона, показали общность огромного разнообразия механических явлений — общность, которую было трудно даже предполагать. Еще более глубинные и общие основы Природы открыли теория эволюции Дарвина, атомная модель вещества и представление о генах. Возможно, в ближайшие годы будет сформулирована теория Всего, — объединяющая и объясняющая все основные физические процессы. Эта глобальная идея, которая утвердилась в XX веке, в последние десятилетия вобрала в себя результаты развития теории струн. Последняя основана на предположении, что все элементарные частицы представляют собой струноподобные системы, которые колеблются с присущей конкретной частице резонансной частотой. Конечно, это самое грубое определение основ теории. Оставаясь на том же уровне строгости, можно сказать, что теория струн призвана объединить гравитационные теории (в частности, теории, описывающие распространение гравитационных волн в космосе, т.е. в областях огромной протяженности) и квантовую механику. Имеется надежда, что эта теория не будет содержать «шокирующие» сингулярности (или «малые» делители), которые часто сопутствуют развитию современных теорий.

Все это вполне соответствует основной задаче науки — создать общую картину окружающего нас мира, нарисованную с некоторых единых позиций. Природа едина, поэтому все разделения в науке в той или иной степени — условность, и в принципе, многие результаты, полученные в одной области знаний, могут оказаться полезными и в других областях науки. Будущее развитие

человечества связано не только с изучением элементарных частиц или эволюции общественных отношений, а, в первую очередь, с обменом информацией, накопленной в различных областях науки.

Огромную роль в процессе познания играют также научные понятия. Величайшее искусство науки в том, что она часто сжимает проблему в слово. Сформировавшись в той или иной области знаний, слова выходят за прежние рамки и в буквальном смысле меняют общество. Кто сейчас не знает таких слов, как эволюция, Большой взрыв или относительность. Эти слова имеют огромную революционную силу, меняя мышление сотен миллионов людей. К таким меняющим общество словам можно отнести и слова: волны, резонанс и нелинейность. Эти слова аккумулировали многие достижения научной и технической мысли, эти понятия определили развитие информационных технологий, они позволят по-новому взглянуть на развитие общества и природных процессов.

В науке понятие резонанса связывается, в основном, с колебаниями точечных масс. Только недавно оно начало ассоциироваться и с волновыми движениями. В меньшей степени резонанс связывается с прохождением волн через резонансную область. Возникающие при подобном прохождении волны названы трансрезонансными [3–5]. Суть полученных в частях II и III этой книги результатов сводится к тому, что катастрофические океанские волны являются частным случаем нелинейных трансрезонансных волн.

Это достаточно новый взгляд на волны, а так как волновые процессы описываются подобными уравнениями, то можно ожидать, что этот взгляд может быть плодотворным и при исследовании других волновых процессов, т.е. развитые методы и полученные результаты могут быть распространены на высоко-нелинейные волновые процессы, имеющие место в других физических ситуациях. В этих ожиданиях мы следуем публикациям [3, 84, 85], а также Островскому и Потапову, которые в своей очень полезной книге [6] подчеркивают «существование математической аналогии при описании волновых процессов в системах различной физической природы».

Таким образом, выполненное моделирование катастрофических океанских волн — как трансрезонансных — поворачивает нашу мысль к углубленному исследованию трансрезонансных нелинейных волновых процессов применительно к другим физическим средам. Развивая эту мысль, начнем с напоминания того, что отправной точкой нашего исследования катастрофических волн послужили сильно-нелинейные уравнения Эйри (4.1) и (6.88):

$$(1 + u_a)u_{tt} - gh(1 + u_a)^{-2}u_{aa} - \frac{1}{3}h^2(1 + u_a)^{-3}u_{aat} - X(1 + u_a) + \rho^{-1}p_{0,a} +$$

$$+\rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=0)-\rho^{-1}h^{-1}p_{31}(a,t,c=h). \quad (20.1)$$

Многие волновые уравнения в той или иной степени напоминают уравнение (20.1). В частности, хотя оно было выведено для поверхностных волн, (20.1) описывает также волны в газе. Аналогичное уравнение справедливо для колебаний струны или гибкого стержня. Уравнение сильного изгиба стержня было получено Эйлером и приведено в приложении к его книге *De Curvis Elasticis*. Дополняя это уравнение инерционным членом, запишем

$$\eta_{tt} = a_0^2 \eta_{aa} (1 + \eta_a^2)^{-1.5}. \quad (20.2)$$

Здесь a_0^2 — скорость распространения волн в стержне, η — отклонение от невозмущенной прямой формы стержня. Если отклонения стержня не слишком велики, то мы можем переписать (20.2) в виде:

$$\eta_{tt} = a_0^2 \eta_{aa} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_a^2 + \frac{15}{8} \eta_a^4 \right) \quad (20.3)$$

Мы сохранили члены вплоть до пятого порядка. Замечательно, что уравнение (20.2) содержит нелинейные члены только в нечетной степени. Такая особенность характерна для многих волновых уравнений. Например, уравнение для электромагнитных волн часто записывается в виде [6]:

$$E_{tt} - c_0^2 \epsilon_0^{-1} E_{xx} + \alpha_1 (E^3)_{tt} = 0. \quad (20.4)$$

Здесь c_0 — скорость света в вакууме, ϵ_0 — линейная диэлектрическая проницаемость. Такую же особенность имеет один из широко распространенных вариантов уравнения Клейна-Гордона. Его можно представить в виде:

$$\Phi_{tt} - c_*^2 \Phi_{xx} + c_*^2 \beta_c^2 \partial V / \partial \Phi = 0, \quad (20.5)$$

где β_c — комптоновская постоянная распространения, V — потенциал [3, 6, 7]:

$$V = -\frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \Phi^4 + \frac{1}{6} \lambda_6 \Phi^6. \quad (20.6)$$

Подставляем (20.6) в уравнение (20.5). В результате оно дает

$$\Phi_{tt} - c_*^2 \Phi_{xx} = c_*^2 \beta_c^2 (m^2 \Phi - \lambda \Phi^3 - \lambda_6 \Phi^5). \quad (20.7)$$

Мы привели выше одномерные уравнения. Однако развитые к книге подходы применимы и к исследованию двумерных и трехмерных волновых процессов. Например, в [4] рассмотрены двумерные длинные волны, распространяющиеся по упругой или жидкой поверхности. Уравнение для последних волн записано в следующем виде:

$$\eta_{tt} - gh \nabla^2 \eta = \frac{1}{3} h^2 \nabla^2 \eta_{tt} + 1.5 g \nabla^2 \eta^2. \quad (20.8)$$

Здесь η — поднятие над невозмущенной поверхностью. Уравнение Клейна-Гордона в случае трехмерного пространства можно представить так:

$$\Phi_{\eta\eta} - c_*^2 \nabla^2 \Phi = c_*^2 \beta_c^2 (m^2 \Phi - \lambda \Phi^3 - \lambda_6 \Phi^5). \quad (20.9)$$

Наконец, используя (18.25), записываем следующее волновое уравнение для газонасыщенных сред

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta\eta} - c_0^2 \nabla^2 \Phi + [(\nabla \Phi)^2]_{\eta} + (X - 1) \Phi_{\eta} \nabla^2 \Phi + \\ + \frac{1}{2} (X + 1) (\nabla \Phi)^2 \nabla^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (20.10)$$

Список волновых уравнений, содержащих в явном виде оператор Даламбера $\Phi_{\eta\eta} - c_0^2 \nabla^2 \Phi$, можно продолжить. Особенность этих уравнений состоит в том, что оператор Даламбера при некоторых параметрах изучаемого процесса или областях исследования может обратиться в нуль или дать малую величину («малый» делитель). Эти параметры и области названы резонансными [4]. Возникновение катастрофических волн в частях II и III этой книги связывается с проявлением резонансов. В общем случае решение всех приведенных выше высоко-нелинейных уравнений связано с огромными трудностями. Однако, как подчеркивается в [4], в области резонансов они могут быть существенно упрощены вплоть до сведения к алгебраическим уравнениям.

Объем книги не позволяет провести сколь-нибудь внимательное исследование катастрофических волн, описываемых приведенными выше уравнениями. Однако он позволяет сжато продемонстрировать существование этого класса высоко-нелинейных волн на примерах некоторых из приведенных выше уравнений.

20.2. Примеры волн со складчатым фронтом

Истинные законы Природы не могут быть линейными.

Эйнштейн

Мы привели выше достаточно широкий набор уравнений. Основываясь на любом из них, мы можем развивать далее теорию катастрофических волн. В частности, развитие заключается в том, что ниже под катастрофическими будут подразумеваться, в первую очередь, волны, имеющие складки (многозначности) на их профиле. Таким образом, мы приводим наше определение в соответствие с теорией катастроф. Хорошо известным примером подобных волн являются опрокидывающиеся волны. Однако они неустойчивы. Более устойчивыми являются катастрофические волны на поверхности раздела сред. Например, внутренние океанические волны. Их устойчивость объясняется влия-

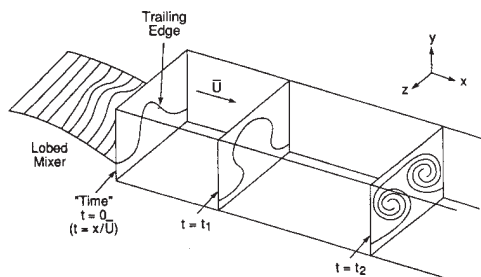


Рис. 205. Развитие внутренних волн в жидкости, протекающей по каналу [8].

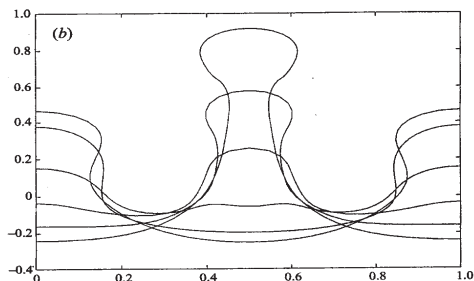


Рис. 206. Образование и развитие грибовидной стоячей волны на поверхности раздела двух жидкостей [9].

нием окружающей волну среды. Пример развития подобных волн в жидкости, протекающей по каналу, дан на рис. 205. Видно, как первоначально плавный профиль преобразуется в грибовидный, который затем обрамляется вихрями. В дальнейшем, что на рис. 205 не показано, течение теряет устойчивость и турбулизируется.

Грибовидные волны на поверхности раздела двух жидкостей [9] возникают и в экспериментах, развивающих исследование Фарадея (рис. 206). Фарадей [10] летом 1831 года изучал вертикально-вибрировавшие слои жидкостей и слабосвязных материалов. Он нашел, что первоначально плоская поверхность преобразовывалась в волнистую поверхность. Недавние исследования показывают огромное разнообразие волновых явлений, возникающих во время аналогичных экспериментов.

Конечно, многозначные волны, подобные представленным на рис. 205 и 206, возможны в самых разнообразных средах и полях, везде, где есть достаточно сильное взаимодействие сред и полей, наряду с проявлением высоко-нелинейных эффектов. В некоторых случаях поверхностное натяжение ответственно за появление таких волн. А именно, поведение систем, состоящих из двух или более соприкасающихся сред (фаз), может определяться тонким слоем контакта между этими средами. В случае очень коротких поверхностных волн механические свойства такой поверхности характеризуются, в первую очередь, поверхностным натяжением. Оно определяет свойства поверхности, аналогичные свойствам нити (струны), и открывает возможность использования уравнения (20.2).

Формы волн и капель, показанные на рис. 207, определяются поверхностным натяжением. Исходя из нашего опыта исследования высоко-нелинейных волновых явлений (рис. 139–141, 162), можно ожидать, что эти формы волн и капель могут быть описаны аналитически, хотя, в принципе, существуют

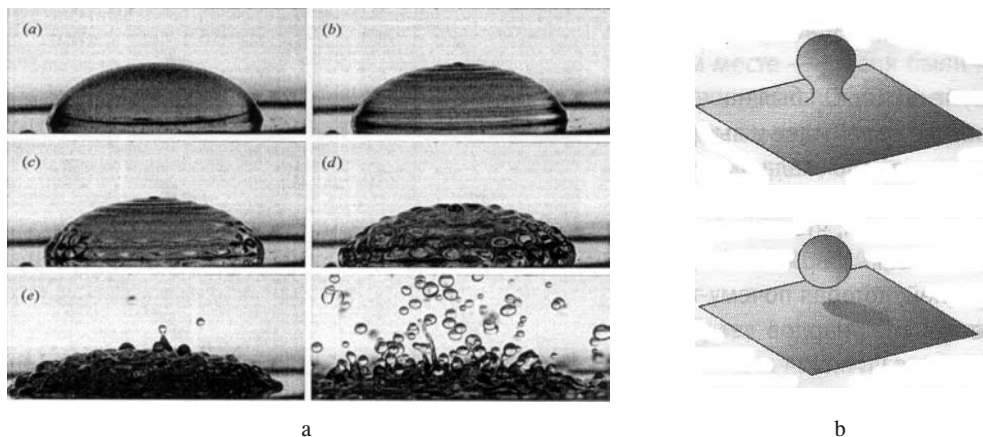


Рис. 207. Примеры атомизации и флуктуализации поверхности. (а) Вертикально-возбуждаемые волны и капли на поверхности 100 миллиметрового объема воды [11]. (б) Качественная картина возникновения виртуальной частицы в вакууме или отделения замкнутой вселенной от большой области пространства (Виленкин, А., 2010. Мир многих миров. Астрель, Москва).

и другие методы исследования высоко-нелинейных волн. Очевидно, они должны учитывать, как минимум, кубическую нелинейность (см. разделы 14.3 и 15.6).

Процесс атомизации, показанный на рис. 207а, соответствует частоте, которая близка резонансной частоте волн на поверхности капли. Он может служить моделью для многих природных волновых явлений. Чтобы проиллюстрировать эту мысль, продолжим атомную аналогию дальше и глубже. Как известно, вакуум вовсе не статичная среда. В субатомных масштабах вакуум постоянно флуктуирует из-за непредсказуемых квантовых импульсов. Возникают виртуальные частицы, которые спонтанно появляются и немедленно исчезают (рис. 207б). Имеется также концепция, что зарождение вселенных может напоминать появление виртуальных частиц. Можем ли мы, используя приведенные аналогии, поставить в соответствие умозрительным теориям зримый резонансный процесс атомизации поверхности капли воды!?

После формулировки приведенной смелой аналогии, вернемся к более привычным земным масштабам. По-видимому, имеется также определенная аналогия процесса атомизации и явлений, возникающих при моретрясениях, когда на воде образуются системы стоячих волн большой крутизны и возможны появления брызговых султанов. Высота волн и выбросов достигает 10 м при длине волн около 20 м. Область моретрясения может захватывать значительную площадь, соответствующую области вибрации дна. Примеры таких

волн мы уже приводили (см., например, рис. 145) и будем приводить далее. В условиях моря, как отмечал Дарвин (см. начало части IV книги), моретрясение сопровождается также нестационарной кавитацией. Она может возникать как у водной поверхности, так и у дна моря. В целом, развитие нестационарной кавитации, о котором мы уже не мало говорили выше, полностью аналогично разрыхлению верхнерасположенных осадочных пород в результате вызванных землетрясением колебаний жестких подстилающих пород (см. части I и IV книги).

Замечание. По-видимому, первым вертикально-возбуждаемые волны начал исследовать Хладни (Chladni). Исследуя формы колебаний пластин с помощью мелкого песка, рассыпанного по их поверхности, он получил так называемые фигуры Хладни. Они зримо представили результаты акустических колебаний и поразили современников. В 1809 году Хладни демонстрировал свой эксперимент Наполеону. Фарадей начал с того, что повторил некоторые исследования Хладни. Все многочисленные современные исследования динамических патенов (*pattern*) [12], собственно говоря, проистекают из исследований Хладни.

20.3. Эксперименты сэра Тэйлора и волновые формы «эластика»

В предметах нашего исследования надлежит отыскивать не то, что о них думают другие или что мы предполагаем о них сами, но то, что мы ясно и очевидно можем усмотреть или надежно дедуцировать...

Декарт

Эксперименты сэра Тэйлора [13] и «эластика». Рассмотрим результаты интересных экспериментов, выполненных Тэйлором [13]. Он написал в 1969 году: «Аналогия между уравнениями движения вязкой жидкости и несжимаемого упругого тела хорошо известна. Брук Бенджамин (Brooke Benjamin) подсказал мне, что в процессе сжатия тонкий прут может образовывать формы «эластика» и что книга Теория Упругости Лава (Love) содержит картину набора этих форм. Затем я нашел очень вязкую жидкость, известную как SAIB (Sucrose Acetate Isobutirate), и вытянул из нее нить. Я положил эту нить на поверхность ртути, положил две спички на нить и фотографировал нить» (см. рис. 208). Тэйлор наблюдал также очень вязкую струю жидкости (типа патоки или вязкого жидкого меда), падающую на пластину [13]. На малом расстоянии выше пластины струя начинала колебаться (сгибаться) или скручи-

ваться в форму спирали. Более сложное сворачивание наблюдалось, когда струя падала в жидкость меньшей плотности, чем сама. В последнем случае струя может свертываться и образовывать узлы.

Сворачивание, скручивание узлом и связанные с ними спиральные формы являются хорошо известными результатами развития неустойчивости многих длинных гибких систем. В частности, это может иметь место

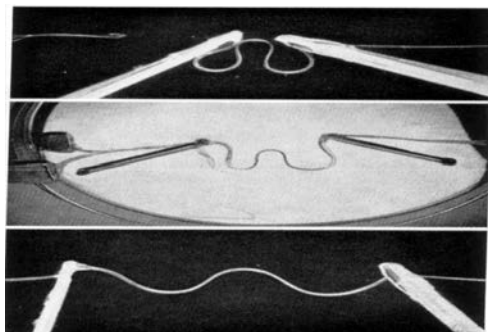


Рис. 208. Волны, возникающие на нити из SAIB, плавающей на поверхности ртути [13].

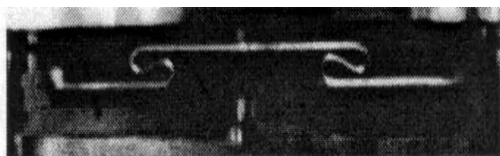
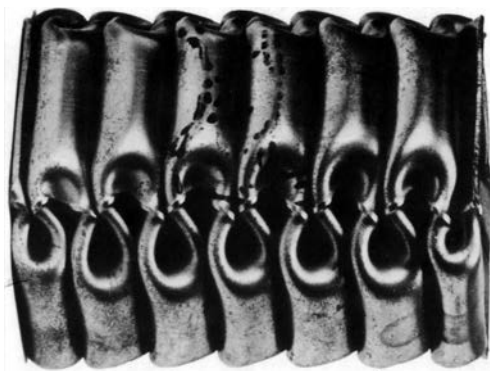


Рис. 209. Столообразные (слева) и грибовидные (справа) формы сжимаемого тонкого стержня, ограниченного сверху [14].



a



b

Рис. 210. Складчатые формы, возникающие при осевом динамическом схлопывании квадратной тонкостенной трубы [15]. Грибовидные складки (a, b) и вихревидные складки (b).

при осевом воздействии. Эти явления связаны со статической или динамической неустойчивостью структур.

Отметим, что некоторые волновые формы, различимые для случая жидкости (рис. 205–207), подобны формам, показанным на рис. 208–210. В целом, они напоминают формы, которые теоретически могут возникнуть при сжатии

тонкого стержня. Это так называемые формы «эластика», о которых пишет Тэйлор. Они описаны достаточно полно более века назад в [16]. Из рис. 205–207 следует, что формы «эластика» могут возникать также в жидкости и на ее поверхности. Это нас не удивляет в силу определенной аналогии, существующей между волновыми уравнениями. По-видимому, формы «эластика» могут существовать во всех высоко-нелинейных волновых системах (20.1)–(20.10). В последующем мы рассмотрим это предположение, а пока обратимся к уравнению (20.2).

Аналитическое описание стоячих волн типа «эластика». Полагаем, что

$$\eta = \bar{\eta}(a) \cos \omega t. \quad (20.11)$$

Подставляем (20.11) в (20.2). Затем отбрасываем члены, содержащие высокие гармоники, и записываем следующее приближенное уравнение:

$$\left[\omega^2 \rho \bar{\eta} - \sigma \bar{\eta}_{aa} \left(1 - \frac{9}{8} \bar{\eta}_a^2 \right) \right] \cos \omega t = 0. \quad (20.12)$$

Пренебрегая малыми величинами, переписываем уравнение (20.12) так:

$$\bar{\eta} = -k^{-2} \bar{\eta}_{aa} (1 + \bar{\eta}_a^2)^{-3/2}. \quad (20.13)$$

Здесь $k^{-2} = \omega^{-2} \rho^{-1} \sigma$. Таким образом, мы записали уравнение, которое описывает формы тонкого стержня [17]. Интегрируем (20.13) и получаем

$$\bar{\eta}^2 = 2k^{-2} (1 + \bar{\eta}_a^2)^{-0.5} + \bar{C}. \quad (20.14)$$

Здесь $\bar{C}$ — постоянная интегрирования. Затем, следуя [17], уравнение (20.14) приводим к виду:

$$F^2 = \bar{h}^2 - 4k^{-2} \sin^2(\theta / 2). \quad (20.15)$$

Здесь $\cos \theta = (1 + \bar{\eta}_a^2)^{-0.5}$ и $\bar{h}$ определяется через $\bar{C}$. Поскольку $\bar{\eta}^2$ положительно, решение уравнения (20.15) будет зависеть от относительных значений $\bar{h}$ и $k = \omega \rho^{0.5} \sigma^{-1}$. Это решение приведено во многих книгах. Формы, описываемые решением, зависят от параметров задачи. В рассматриваемом случае собственных высоко-нелинейных колебаний, формы волн зависят от частоты ω , так как $k = \omega \rho^{0.5} \sigma^{-0.5}$.

В [17] представлены три решения для стержня. Ниже мы не приводим эти решения, а только показываем волновые формы, которые соответствуют двум решениям из [17].

1. Во-первых, принимаем $\bar{h}^2 \propto 4k^{-2}$. Соответствующие формы «эластика» показаны на рис. 211–213.

Формы рис. 211 качественно описывают развитие гармонической волны (а) в волну с очень крутыми фронтами (б) и далее в грибовидные конфигурации (с и д). Представленные формы напоминают как показанные для жидкости

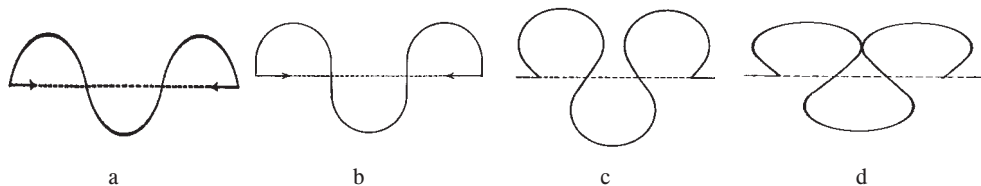


Рис. 211. Развитие «эластика» подобных профилей как функций параметра сжатия [16].

(рис. 205 и 206), так и формы, представленные на рис. 208–210. Интересно, что динамика форм на рис. 211 очень напоминает резонансную эволюцию поверхностных волн, проходящих над подводной топографией (рис. 141).

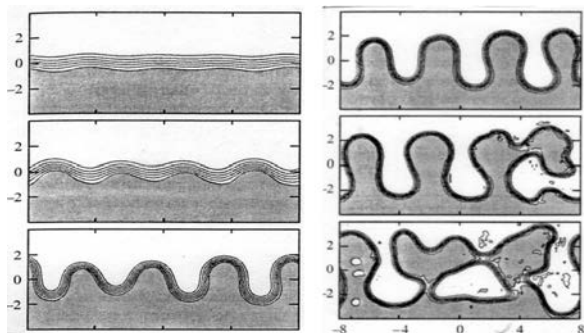


Рис. 212. Результаты численного моделирования эволюции тонкого верхнего слоя [18].

Мы привели также рис. 212, где показана волновая эволюция поверхностного слоя, лежащего на жидкости. Эта эволюция полностью соответствует развитию «эластика» на рис. 211 и рис. 141.



Рис. 213. Формы «эластика» [16].

Рис. 213 показывает формы «эластика», отличные от представленных на рис. 211. Они качественно описывают возможности катастрофического усиления волн и разрушения поверхности океана при прохождении огромных океанских волн над подводной возвышенностью (рис. 162).

2. Пусть $\bar{h}^2 = 4k^{-2}$. Соответствующие этому значению $\bar{h}$ формы «эластика» показаны на рис. 214.



Рис. 214. Формы «эластика» [16].

Левая форма на рис. 214 хорошо соответствует складкам, возникающим при осевом сжатию оболочки (рис. 210). Напомним, что представленные на рис. 211, 213 и 214 формы, получены для статического сжатия бесконечно-гибких стержней. Решение $\eta = \bar{\eta}(a) \cos \omega t$ (20.11) обобщает эти формы на случай стоячих волн. Таким образом, приведенные выше формы «эластика» соответствуют стоячим волнам, профили которых зафиксированы для некоторого момента времени.

Мы полагаем, что формы «эластика» на рис. 211, 213 и 214 могут качественно описывать периодическое появление брызг, капель и пузырей на жидкой поверхности в результате высоко-нелинейных поверхностных эффектов. Это позволяет предположить, что формы, которые предназначались для описания форм струн и стержней, возможно, с большим основанием можно использовать для анализа динамики высоко-нелинейных поверхностных капиллярных стоячих волн. Конечно, сказанное не исключает использование «эластика» форм при моделировании волн, возникающих в других средах.

20.4. Упрощенные уравнения для высоко-нелинейных поверхностных волн

Пирожки, которые продавались недавно за 3 пфенинга, теперь продаются за два. Все зависит от массы.

Генрих Гейне

Из рассмотрения уравнения (20.13) явно следует, что возникновение «эластика» форм связано с влиянием кубической нелинейности. Это согласуется с результатами частей II и III. Там на примере однонаправленных волн было показано, что влияние кубической нелинейности определяет прибрежную эволюцию цунами, развитие волн над подводными топографиями и катастрофических волн на поверхности глубокого океана. Аналогичный результат справедлив и для конечных резонаторов, где существуют бегущие в разные стороны (разнонаправленные) волны.

Высоко-нелинейные поверхностные волны. Примем, что разнонаправленные волны не взаимодействуют друг с другом, а возникающая в резонаторе

волновая картина определяется суммой указанных волн. В этом случае суммарную волну можно представить в следующем виде:

$$u = J(r) + j(s) + \bar{J}(r) + \bar{j}(s). \quad (20.16)$$

Здесь $r = t - aC^{-1}$, $s = t + aC^{-1}$ и $C = \sqrt{gh}$. Глубину считаем постоянной, а влияние вязкости и дисперсии не будем учитывать. Далее следуем подразделу 8.4.1. Полагаем, что функции $J(r)$ и $j(s)$ удовлетворяют линейным уравнениям вида (8.62) и известны, а уравнения для $\bar{J}(r)$ и $\bar{j}(s)$ имеют вид (8.63). Для волны $\bar{J}(r)$ оно сводится к (8.78). В рассматриваемом случае оно дает

$$\begin{aligned} -3C^{-1}(1 + 2C^{-1}\bar{J}_r)\bar{J}_r\bar{J}_{rr} - 3C^{-1}(J_r\bar{J}_r)_r - 6C^{-2}(J_r^2\bar{J}_r + J_r\bar{J}_r^2)_r = \\ = 3C^{-1}(1 + 2C^{-1}J_r)J_rJ_{rr}. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Интегрируем уравнение и сводим задачу к решению следующего кубического алгебраического уравнения:

$$\bar{J}_r^3 + (0.75C + 3J_r)\bar{J}_r^2 + (1.5CJ_r + 3J_r^2)\bar{J}_r = -0.75CJ_r^2 - J_r^3 + \bar{C}. \quad (20.18)$$

Здесь $\bar{C}$ — постоянная интегрирования. Аналогичное уравнение можно записать и для волны $\bar{j}(s)$. Таким образом, мы показали, что в некотором грубом приближении исследование поверхностных волн в резонаторе можно свести к решению кубического алгебраического уравнения.

Модель мембраны. Мы рассматриваем поверхность раздела сред как нелинейную мембрану. Мембрана аппроксимируется рядом бесконечных длинных полос, которые отделены малым расстоянием Δa . Каждая полоса связана с ее двумя соседями пружинами. Пусть $\Delta\eta$ представляет различие в вертикальном смещении двух соседних полос. Тогда мы можем выразить расстояние Δd между этими полосами как $[(\Delta a)^2 + (\Delta\eta)^2]^{0.5}$. Величина силы, действующей вдоль мембраны, рассматривается как некоторая функция G от Δd . Тогда величина вертикальной компоненты силы имеет вид:

$$\hat{F} = G(\Delta d / \Delta a)(\Delta\eta / \Delta d). \quad (20.19)$$

Если $\Delta\eta / \Delta a$ мало, мы можем выразить (20.19) как степенной ряд по $\Delta\eta / \Delta a$. В результате имеем:

$$\hat{F} = a_1(\Delta\eta / \Delta a) + a_2(\Delta\eta / \Delta a)^2 + a_3(\Delta\eta / \Delta a)^3 + \dots \quad (20.20)$$

Здесь a_1 , a_2 и a_3 — некоторые постоянные. Затем, используя закон Ньютона и (20.20), мы получаем нелинейное волновое уравнение для мембраны:

$$\rho\eta_{tt} = a_1\eta_{aa} + 2a_2\eta_a\eta_{aa} + 3a_3\eta_a^2\eta_{aa}. \quad (20.21)$$

Уравнение (20.21) учитывает упругие свойства поверхности раздела сред [19–21]. Теперь мы вводим в уравнение (20.21) капиллярные силы, эффекты

силы тяжести и внешние поверхностные силы. В результате имеем следующее обобщение уравнений (20.18) и (20.21):

$$\rho\eta_{tt} - \sigma\eta_{aa}(1 + \eta_a^2)^{-1.5} = \rho g - 0.5p_0(t, a, -h/2) - 0.5p(t, a, h/2) + \\ + a_1\eta_{aa} + 2a_2\eta_a\eta_{aa} + 3a_3\eta_a^2\eta_{aa}. \quad (20.22)$$

Замечание. Уравнение (20.22) может быть приближенно представлено в виде:

$$\rho\eta_{tt} - (\sigma + a_1)\eta_{aa} - 2a_2\eta_a\eta_{aa} + (1.5\sigma - 3a_3)\eta_a^2\eta_{aa} = \\ = \rho g - 0.5p_0(t, a, -h/2) - 0.5p(t, a, h/2). \quad (20.23)$$

Решению различных вариантов этого уравнения, записанного относительно горизонтального смещения u , посвящен значительный объем второй и третьей частей книги. Там исследовалось влияние квадратичной и кубической нелинейностей на различные длинные катастрофические волны. В частности, сложная трансрезонансная эволюция цунами и некоторых катастрофических волн связывалась с кубической нелинейностью. Однако, в целом, исследование многозначных решений соответствующих уравнений не занимало там много места. В этой части книги исследование многозначных решений ставится как важнейшая проблема.

20.5. Теория трансрезонансного развития высоко-нелинейных волн

Что значит знать? Вот, друг мой, в чем вопрос.

Гете

Водные струи, пузыри и грибовидные волны часто возникают вследствие нелинейной динамики поверхности раздела сред [21–25]. Рассмотрим случай вертикального возбуждения этой поверхности. Пусть

$$g = p_0 = p(t, a, -h/2) = 0 \text{ и } 0.5p(t, a, -h/2) = 2 \cos\omega t \cos Ka.$$

Затем предполагаем, что $1 \ll \eta_a^2$. Для этого случая уравнение (20.22) дает:

$$\rho\eta_{tt} - (\sigma + a_1)\eta_{aa} = 2a_2\eta_a\eta_{aa} - 1.5\sigma\eta_{aa}\eta_a^2 + \\ + 3a_3\eta_a^2\eta_{aa} + 1.875\sigma\eta_{aa}\eta_a^4 - 2 \cos\omega t \cos Ka. \quad (20.24)$$

Далее мы представим возбуждающую силу как сумму двух бегущих волн:

$$\cos\omega t \cos Ka = 0.5[\cos(\omega t - Ka) + \cos(\omega t + Ka)]. \quad (20.25)$$

Соответственно, выражение для волны η также будем искать в виде суммы бегущих в разные направления волн:

$$\eta = \bar{\eta}(\omega t - Ka) + \hat{\eta}(\omega t + Ka). \quad (20.26)$$

Выражения (20.25) и (20.26) подставляются в (20.24). Затем для максимального упрощения анализа примем, что волны, распространяющиеся в разные стороны, не взаимодействуют. В этом случае для правобегущей волны имеем следующее уравнение:

$$(\rho\omega^2 K^{-2} - \sigma - a_1) \bar{\eta}_{aa} = 2a_2 \bar{\eta}_a \bar{\eta}_{aa} - 1.5\sigma \bar{\eta}_{aa} \bar{\eta}_a^2 + 3a_3 \bar{\eta}_a^2 \bar{\eta}_{aa} + 1.875\sigma \bar{\eta}_{aa} \bar{\eta}_a^4 - \cos(\omega t - Ka). \quad (20.27)$$

Далее рассматриваются резонансные волны. При резонансе нелинейные эффекты сильно увеличиваются, а линейные эффекты падают до нуля. В частности, в рассматриваемом случае при точном резонансе

$$\rho\omega^2 K^{-2} - \sigma - a_1 = 0. \quad (20.28)$$

Рассмотрение начнем с того, что перепишем (20.27) в виде:

$$-1.875\varepsilon^{-1} \sigma K \bar{\eta}_a^5 / 5 + \varepsilon^{-1} (0.5\sigma - a_3) K \bar{\eta}_a^3 - a_2 \varepsilon^{-1} K \bar{\eta}_a^2 + (\rho\omega^2 K^{-2} - \sigma - a_1) K^{-1} \bar{\eta}_a - \sin(\omega t - Ka) = K^{-1} \bar{C}. \quad (20.29)$$

Здесь $\bar{C}$ — константа интегрирования. Пусть $\bar{C} = 0$,

$$\bar{\eta}_a = K^{-1/3} \varepsilon^{1/3} (0.5\sigma - a_3)^{-1/3} F_*, \quad (20.30)$$

и

$$r_* = -a_2 K^{1/3} \varepsilon^{-1/3} (0.5\sigma - a_3)^{-2/3}, \quad r^* = -1.875\sigma K^{-2/3} \varepsilon^{2/3} (0.1\sigma - a_3 / 5)^{-5/3}, \\ R = 2^{2/3} (\rho\omega^2 K^{-2} - \sigma - a_1) \varepsilon^{-1} K^{2/3} \varepsilon^{1/3} (0.5\sigma - a_3)^{-1/3} / 3. \quad (20.31)$$

Как везде в этой книге R — трансрезонансный параметр. Мы имеем точный линейный резонанс, если $R = 0$. Теперь, учитывая (20.30) и (20.31), переписываем уравнение (20.29) в виде:

$$r^* (F_*)^5 + F_*^3 + r_* (F_*)^2 + 3R / 2^{2/3} F_* + \cos(\omega t - Ka) = 0. \quad (20.32)$$

Мы получили алгебраическое уравнение, которое может быть решено численно. Если член $r^* (F_*)^5$ незначителен, то это уравнение имеет аналитические решения.

Горизонтально-возбуждаемые волны. Рассматривая эти волны, будем использовать уравнение Эйри (4.1), дополненное массовой силой X (см. также (20.1) и (6.89)):

$$u_{tt} = gh\eta_{aa} (1 + u_a)^{-3} - X. \quad (20.32a)$$

Это уравнение можно приближенно переписать в виде:

$$u_{tt} = gh\eta_{aa} (1 - 3u_a + 6u_a^2 - 10u_a^3) - 2\varepsilon \cos\omega t \cos Ka. \quad (20.32b)$$

Здесь мы приняли, что $X = 2\varepsilon \cos\omega t \cos Ka$. Легко видеть, что, повторяя действия, которые были проведены с уравнением (20.24) и вводя соответствующие обозначения, мы можем привести (20.32b) к виду (20.32).

Таким образом, исследование как вертикально-возбуждаемых, так и горизонтально-возбуждаемых волн, мы свели к решению нелинейного алгебраического уравнения пятой степени.

Решение кубического алгебраического уравнения. Пусть член $r^*(F_*)^5$ пренебрежимо мал, тогда

$$(F_*)^3 + r_*(F_*)^2 + 3R / 2^{2/3} F_* - \sin(\omega t - Ka) = 0. \quad (20.33)$$

Введем обозначения:

$$F_* = F + r_* / 3 \quad (20.34)$$

и

$$p_* = 3R / 2^{2/3} - r_* / 3, \quad q_* = 2r_*^3 / 27 - 2^{-2/3} r_* R - \sin(\omega t - Ka). \quad (20.35)$$

В результате, уравнение (20.33) дает

$$F^3 + p_* F + q_* = 0. \quad (20.36)$$

Необходимо различать четыре случая, когда (20.36) имеет вещественные решения:

1. Пусть $p_* = 0$, тогда уравнение (20.36) удовлетворяется, если

$$F = (-q_*)^{1/3}. \quad (20.37)$$

2. Пусть $p_* \neq 0$, тогда

$$F = -2D \sinh \left[\frac{1}{3} \operatorname{arcsinh}(0.5q_* D^{-3}) \right], \quad (20.38)$$

где $D = [\operatorname{sign}(q_*)] (|p_*| / 3)^{0.5}$.

3. Пусть $p_* \neq 0$ и $q_*^2 / 4 + p_*^2 / 27 \leq 0$. В этом случае имеется три решения:

$$F_i = -2D \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(0.5q_* D^{-3}) + 2N\pi / 3 \right], \quad (20.39)$$

где $N=0; 1; 2$. С их помощью можно построить неоднозначные решения.

4. Если $R < 0$ и $q_*^2 / 4 + p_*^2 / 27 > 0$, мы имеем

$$F = -2D \cosh \left[\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}(0.5q_* D^{-3}) \right]. \quad (20.40)$$

Замечание 1. Обратим внимание на то, что в случае вертикально-возбуждаемых волн решения (20.37)–(20.40) определяют не волну $\bar{\eta}$ (20.26), а ее производную (20.30). Т.е. $\bar{\eta}$ можно найти только после интегрирования соответствующего выражения для решения. Например, если принять к рассмотрению решение (20.39), то, используя (20.30), находим, что

$$\bar{\eta} = K^{-1/3} \varepsilon^{1/3} (0.5\sigma - a_3)^{-1/3} \oint \mathcal{F}_* da + \bar{C}. \quad (20.41)$$

Замечание 2. Приведенные решения определяют волну, бегущую в одну сторону. Волна, бегущая в другую сторону, определяется аналогичным образом.

Замечание 3. Решения (20.37)–(20.40) определяют также продольные волны $\bar{J}(r)$ и $\bar{j}(s)$ в (20.16). В этом случае они описываются уравнением (20.18). Поднятие поверхности можно приближенно определить согласно выражению $\eta = -hu_a$ (6.75). Это же справедливо для уравнения (20.32а).

Полученные выражения можно использовать при качественном моделировании влияния кубической нелинейности на формирование высоко-нелинейных волн.

20.6. Трансрезонансное развитие волн в грибовидные структуры, султаны (струи) и пузыри

Боги открыли людям не все.

В поиск пустившись, люди сами открыли не мало.

Ксенофан

Этот раздел посвящен расчету катастрофических многозначных резонансных волн и качественному описанию сильно-нелинейных недавно наблюдаемых поверхностных волн. При этом мы исходим из решений предшествующего раздела.

Расчеты кривых рис. 215–217 выполнены для $r_* = 0$ в (20.33). На рис. 215 (а, b) и 216 (а, b) кривые, разделенные интервалами, вычислены согласно решениям (20.38) и (20.39). Эти кривые позволяют построить непрерывные многозначные периодические волны, показанные на рис. 215с и 216с. Методика построения аналогична используемой нами при конструировании кубически-нелинейных волн, представленных на рис. 139–141 и 161, 162. Заметим, что нечто подобное мы делали также при построении разрывных фронтов волн цунами. Гармонические кривые (b) на рис. 215 и 216 определены линеаризованным уравнением (20.33).

Подчеркнем, что непрерывные кривые, имеющие форму складки на картинках (а) рис. 215 и 216, образованы тремя решениями (20.39). Вертикальные линии определяют точки на которых возможен скачкообразный перескок с одного решения на другое. В целом, указанные кривые и линии образуют замкнутые контуры. Если принять, что по рассматриваемым линиям движутся частицы, например жидкости, то можно принять, что некоторые из них совершают скачок, в то время как другие продолжают движение по непрерыв-

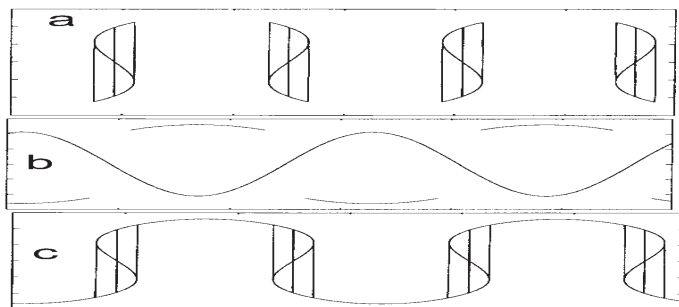


Рис. 215. Непрерывные многозначные волны (с), определенные решениями уравнения (20.33) и найденные для $R = -0.5$. Профили волн составлены из многозначного решения (20.39) (а) и прерывистого решения (20.38) (б). Гармоническая волна (б) определена линейризованным уравнением (20.33) и $R = -0.5$ [4].

ной кривой, образующей складку. Если учесть, что скачки могут быть как вверх, так и вниз, то можно рассматривать замкнутые контуры а на рис. 215 и 216 как некоторые грубые модели вихрей (см. также рис. 264).

Таким образом, в некотором приближении можно рассматривать кривые (с) на рис. 215 и 216 как модели волн, обрамленных вихрями [3–5]. Очень гру-

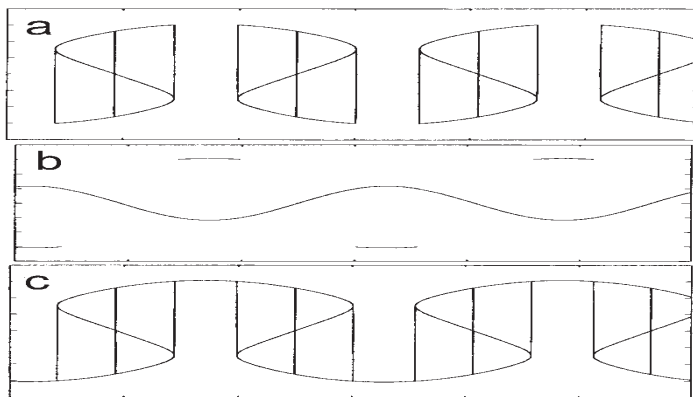


Рис. 216. Волны и кривые, подобные представленным на рис. 215, но рассчитанные при $R = -0.9$ [4].

бо эти модели описывают волны, показанные на рис. 205, 253, 255 и 257. Для нас важно, что согласно развиваемой теории, возникновение таких волн может быть связано с трансрезонансным процессом. Мы продолжим изучение этого процесса в главе 22. Отметим также, что кривые на рис. 215с и 216с напомина-

ют форму «эластика», показанную на рис. 211с. Таким образом, представленные грибовидные волны могут также сформироваться при импульсном сжатии высоко-деформируемых удлиненных тел (см. рис. 210). С еще большей вероятностью такие волны возникают на поверхности воды или на поверхности раздела двух сред (см. рис. 205–207, 208, 212). Из сравнения рис. 215с и 216с следует, что грибовидность волн зависит от близости к точному резонансу, если принять, что точный резонанс соответствует $R = 0$.

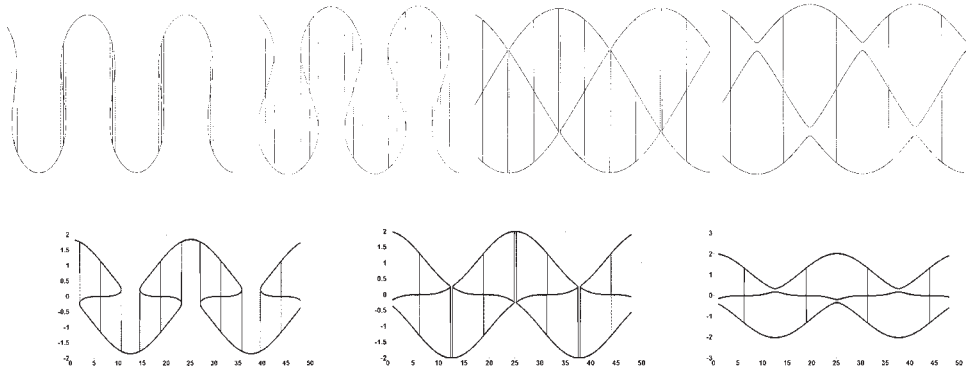


Рис. 217. Составные кривые, вычисленные согласно аналитическим решениям уравнения (20.33). Верхний ряд демонстрирует образование ($R = -0.2$, кривые слева), трансрезонансное развитие ($R = -0.7$; -0.999) и разрушение (расслоение) ($R = -1.01$, кривые справа) катастрофических волн [4]. Нижний ряд рассчитан при несколько других параметрах волны и $R = -0.7$, -0.89 и -0.92 .

Трансрезонансная эволюция грибовидных волн показана на рис. 217. Грибовидность волн существует внутри интервала $0^\circ < R < -1$. Кноидальные и пирамидальные волны возникают непосредственно за резонансом ($R = -1.01$). Расчеты также показали, что при $R \approx -1$, в момент формирования пирамидальных волн [4], возникает возможность выброса струи поверхностью жидкости. Эти струи и пирамидальные волны наблюдались в [22]. Кривые, представленные на рис. 217, хорошо соответствуют расчетам [23] (см. рис. 218 а), которые также демонстрируют трансрезонансную эволюцию гармонических волн в грибовидные структуры, возникновение пирамидальных и кноидальных волн при $R = -1$.

Можно видеть ясный аналог между формами «эластика» (рис. 211) и волнами на рис. 217 ($R = -0.2$, -0.7 , -0.999) и 218 а ($R = 0$, -0.5). Теперь примем во внимание упругие свойства поверхности. В этом случае $r_* \neq 0$ и квадратный член сохраняется в (20.33). Некоторые результаты вычислений для этого слу-

чая представлены на рис. 218b и 219. Эти данные показывают зависимость формы волны от r_* и R .

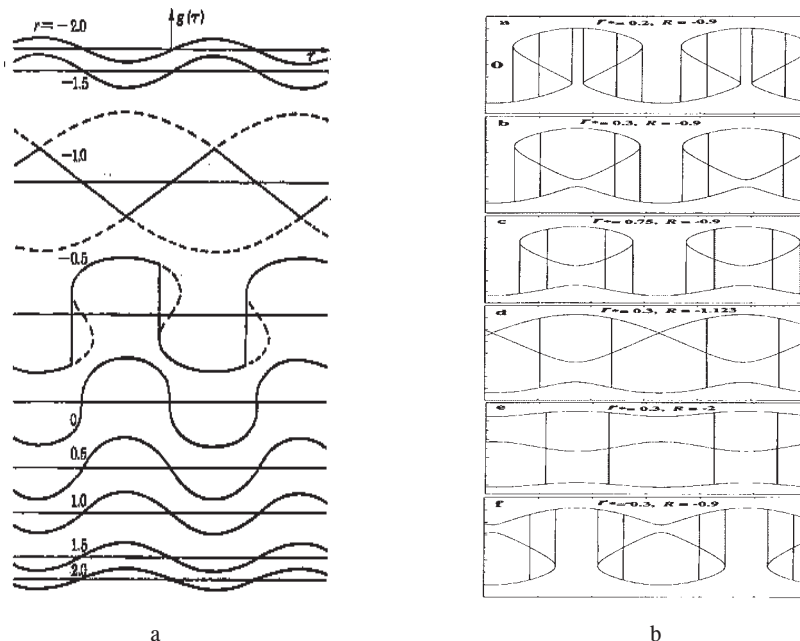


Рис. 218. Возникновение грибовидных волн (а) [23] и атомизация поверхности в результате трансрезонансного процесса (b). Возникновение частиц (капель) над гребнями волн (b, c) и пузырей ниже ложбины волны (f) [4].

При расчетах величина r_* изменяется от -0.3 (рис. 218f) до $r_*=0.75$ (рис. 218c). Это изменение преобразовывает грибовидную волну (рис. 218a) в частицы и подобные пузырю структуры (рис. 218 (b, c, f)), кноидальные (рис. 218d) и гармонические волны (рис. 218e). Формы частиц зависят также от R .

Трансрезонансное развитие грибовидных волн в частицы, капли, пузыри и разнообразные по форме волны показано на рис. 219. Параметр R изменяется от -0.3 до -1.2 . Трансрезонансное развитие зависит от квадратной нелинейности. В частности, для $r^*=0.1$ имеем одну подобную капле структуру, но для $r^*=0.4$ три подобных капле структуры образуются во время трансрезонансного развития грибовидных волн. При $R = -1.2$ пирамидальная волна преобразуется в гармоническую волну.

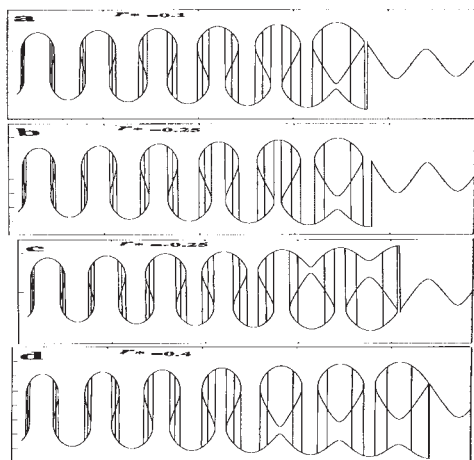


Рис. 219. Трансрезонансное развитие катастрофических многозначных волн. Если $R > -1$, то могут возникнуть частицы (капли) (a, b, d), подобные пузырью структуры (c), кноидальные и гармонические волны. Если $R < -1$, то возникает пирамидальная волна [4].

Грибовидные волны и их динамика дают представление о процессах, которые наблюдались во многих экспериментах. В частности, эта динамика может преобразовать волны в вихри. Действительно, мы дали самую простую интерпретацию решений уравнения (20.33). Более сложная включает в себя возмож-

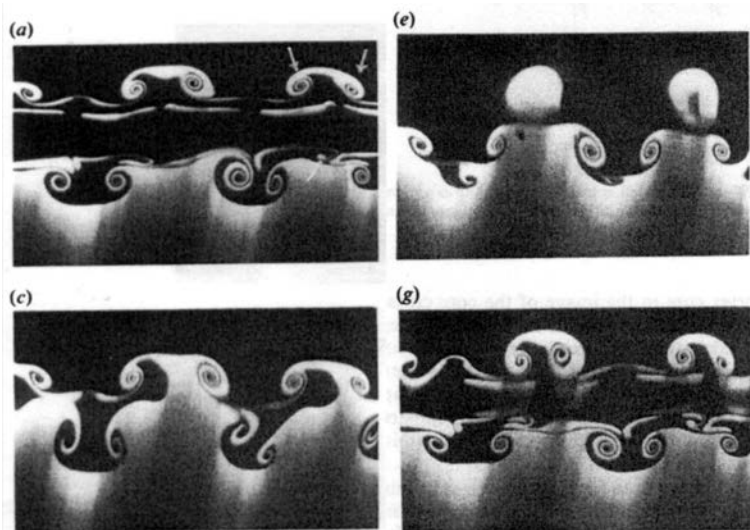


Рис. 220. Визуализация эволюции грибовидных вихревых структур [1].

ность учета скачков в зонах многозначности грибовидных волн, т.е. там возможны явления, характерные для кубической нелинейности и хорошо иллюстрируемые рис. 91. Подобные скачки сродни эффекту сухого трения. Наконец, катастрофичность этих волн проявляется и в том, что трансрезонансная эволюция этих волн в направлении от $R = -1$ к $R = 1$ отличается от эволюции в направлении от $R = 1$ к $R = -1$. Все это очень усложняет анализ катастрофических волн и вместе с тем внушает надежду, что «эластика» формы имеет намного большую область применимости, чем описание сильного изгиба стержней и струн.

В силу сказанного, динамика и распад грибовидных волн может, возможно, качественно описать эволюцию сложных вихревых структур (рис. 220). Этому вопросу будет посвящена глава 22. Таким образом, даже при простом вертикальном гармоническом возбуждении поверхность раздела фаз может проявить очень сложное поведение.

Мы рассмотрели бегущие волны, описываемые уравнением (20.33). В [4] рассмотрено также следующее уравнение:

$$(F_*)^3 + r_* (F_*)^2 + 3R / 2^{2/3} F_* + \cos^2(\omega t - Ka) = 0. \quad (20.42)$$

По сравнению с (20.33) в уравнении (20.42) изменен вынуждающий член. В частях II и III книги мы неоднократно исследовали влияние члена $\cos^2(\omega t - Ka)$ на возбуждение нелинейных волн, так как этот член естественным образом появляется в волновом уравнении при моделировании катастрофических океанских волн. Поэтому случай (20.42) имеет для нас особый интерес. Используя (20.42), мы моделировали процесс «атомизации» поверхности жидкости в результате резонансного возбуждения. Результаты расчетов для четырех значений R представлены на рис. 221.

Изменение вынуждающей силы привело к тому, что вместо грибовидных волн (рис. 217) уравнение начинает описывать волны кноидального типа. Важно отметить, что в последнем случае атомизация (возникновение капель над гребнем волны) не связана с квадратичной нелинейностью в (20.42), так как расчет кривых рис. 221 проводился при $r_* = 0$.

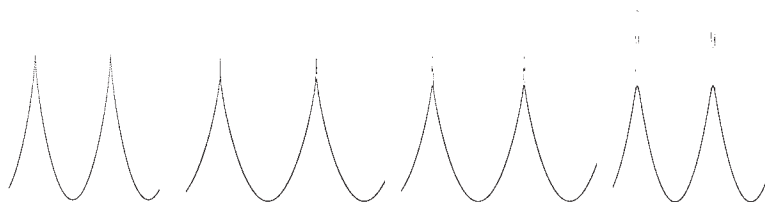


Рис. 221. Извержение частиц и струй из вершин бегущих волн во время их трансрезонансного развития. Расчеты кривых выполнены для $r_* = 0$ в (20.42) [4].

Закключение. Согласно кубически-нелинейному уравнению (20.33) частицы отрываются от водной поверхности, если $r^* > 0$. Пузыри появляются, если $r^* < 0$. Возможно возникновение струй над вершинами волн. Эти процессы определяются как капиллярным эффектом (кубическая нелинейность), так и упругими свойствами поверхности (квадратичная нелинейность). Изменение вынуждающей периодической силы может сильно повлиять на результат вычислений (рис. 221). Однако все проведенные расчеты согласуются с выводом, что атомизация поверхности связана с ее резонансным возбуждением [3–5].

Отметим, что в принципе размеры частиц могут быть весьма малыми. Чем короче волны, тем сильнее капиллярный эффект и меньше возникающие частицы. Появление частиц, капель, пузырей и струй на поверхности раздела фаз при свободных или вынужденных вибрациях — проблема большого практического, научного и технологического интереса. В этих процессах капиллярный эффект часто имеет решающее значение.

Методика построения составных решений, используемая здесь, аналогична используемой нами при конструировании кубически-нелинейных волн, представленных на рис. 139–141 и 161, 162. Заметим, что нечто подобное мы делали также при построении разрывных фронтов волн цунами.

20.7. Сильно-нелинейные волны в резонаторах и параметрически возбуждаемые локализованные резонансы

...последовательность вулканов, расположенных в Андах, ...мгновенно извергнула темный столб дыма...

Дарвин

В этом разделе моделируются поверхностные волны, возбужденные в резонаторах. Мы в какой-то мере возвращаемся к результатам главы 9, посвященным волнам в конечных резонаторах. Например, на рис. 92 и 93 мы демонстрировали крутые фронты волн и их очень локализованное усиление, возникающее при соударении волн или отражении их от границ. В целом, эти рисунки — результаты расчетов многолетней давности, — качественно хорошо описывают последние экспериментальные данные. Например, представленные на рис. 222. Однако резонансные волны на рис. 92–95 — результаты расчетов по квадратичной теории, которые не описывают сложной эволюции волновых фронтов и возникновение над волнами частиц или капель.

Частицы, капли и струи над резонансными волнами. Здесь особое внимание уделяется данным экспериментов [27–30]. При расчетах используется теория, развитая в [3–5, 24–26] и частично представленная в разделе 20.5. Цель

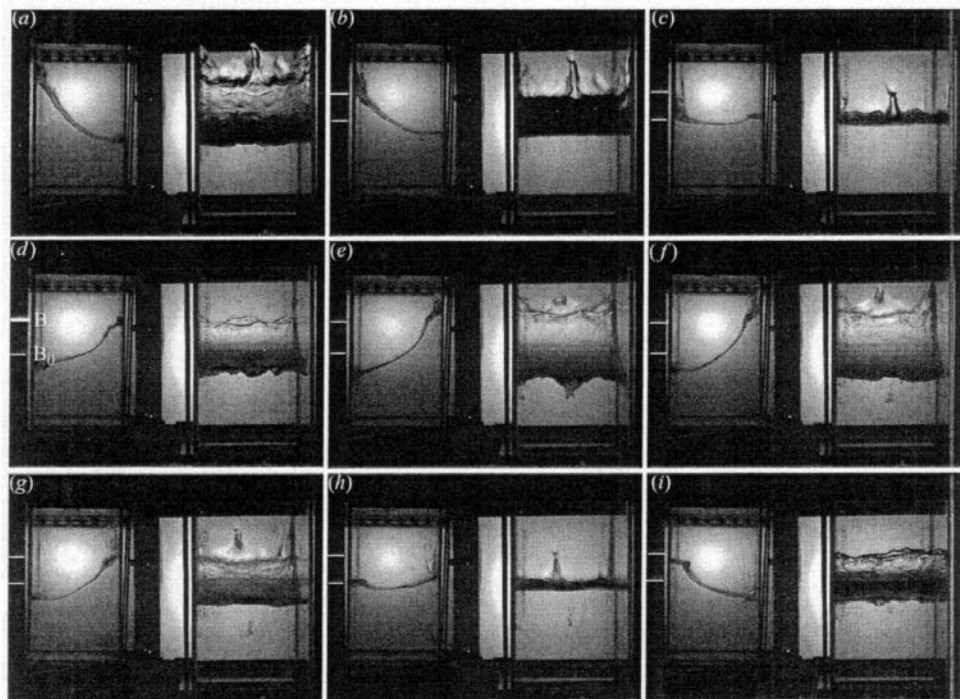


Рис. 222. Фотографии нелинейных поверхностных волн, показывающие как профили волн, так и их вид спереди, что дает представление о крутых фронтах и султанах, возбуждаемых в резонаторах [29].

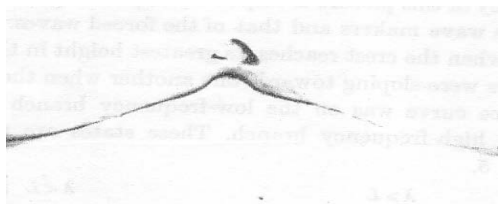


Рис. 223. Образование капель на вершине стоячей волны, возбужденной в резонаторе [27].

расчетов — описать возникновение струй, капель и кратеров при возбуждении резонаторов. Возникновение капель над волнами в резонаторах продемонстрировал сэр Тейлор еще в 1953 году [27] (рис. 223).

Тейлор возбуждал плоские стоячие волны в слое жидкости. Последующие исследования обнаружили возможность образования на водной поверхности пирамидальных волн. Как пример приведем результаты работы [22]. Там вертикально возбуждался цилиндрический столб жидкости высотой 18.5 см и диаметром 16.45 см.

Вершины возникающих при этом пирамидальных волн в некоторых случаях генерировали капли и султаны (струи) (рис. 224 (а)). Это можно объяс-

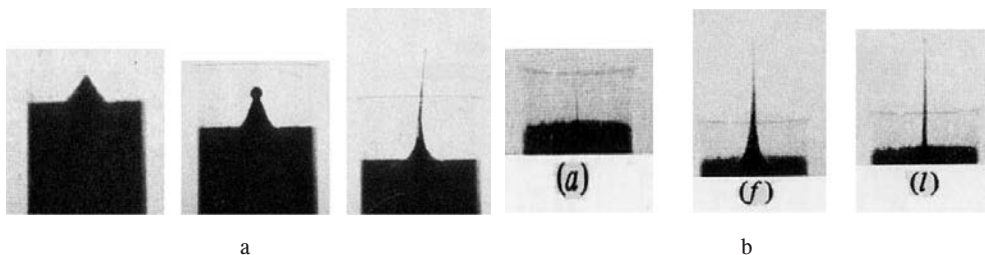


Рис. 224. Образование пирамидальных волн, капель и струй на поверхности цилиндрического столба вертикально возбуждаемой жидкости [22].

нить, используя параллель с результатами Тейлора и расчетами, представленными в [4] и на рис. 221, но труднее объяснить возникновение струй на поверхности воды, на которой отсутствуют видимые волны (рис. 224 (b)). По-видимому, эти струи возникают при схлапывании пузырей (рис. 218 (b)) или кратеров на поверхности воды.

Вертикально-возбуждаемые необычные волны фиксировались во время экспериментов, описанных в [30]. Вершины волн извергали струи воды, или они увенчивались разбегающимися опрокидывающимися волнами ряби. Из рис. 225 видно, что эти волны можно схематизировать острым пиком или грибовидной формой.

Волна А на рис. 225 определяется острым углом на вершине, появлением там струи и капель. Волна В характеризуется почти плоской или слегка вогнутой вершиной и наличием складок на краях вершины. Волна С имеет куполообразную вершину. Необычайные волны появлялись в центре контейнера.

Мы уже не раз подчеркивали, что в резонансной области возможно возбуждение волн разнообразной формы. Некоторые из них можно найти в [3, 4, 24–26, 39–41, 47, 48]. Мы просмотрели результаты представленных там резонансных расчетов и нашли несколько кривых, напоминающих моды А, В и С. Эти кривые помещены на рис. 225 под номерами 1, 2 и 3. Кривая 1 воспроизводит одну из кривых рис. 221. Кривые 2 и 3 взяты из английского варианта этой книги [47], где они помещены на рис. 179.

Зависящий от времени локализованный резонанс вертикально возбуждаемых волн. Рассмотрим внимательно рис. 225. Подчеркнем, что там профили 1, 2 и 3 рассчитаны на основе кубического алгебраического уравнения. Это позволяет надеяться на успешное использование этого уравнения, в частности, уравнения вида (20.42), для моделирования волн, показанных на рис. 225. Предварительный анализ экспериментов [30] показал, что подобное моделирование возможно, если принять несколько смелых предположений, основан-

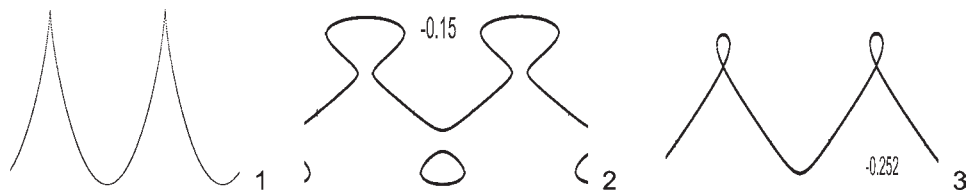
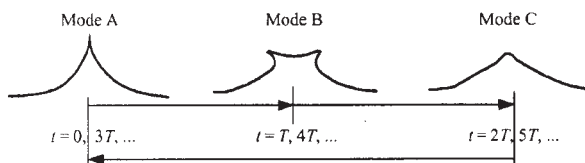
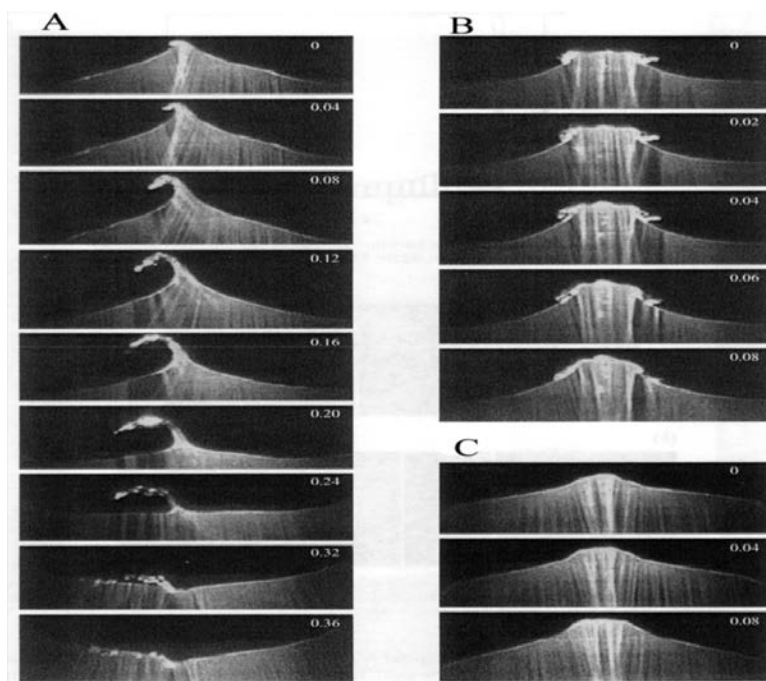


Рис. 225. Профили необычайных волн [30, 47].

ных на нашем опыте расчетов катастрофических волн в части III. Исходя из него, примем, что возникновение необычайных волн связано с наличием резонансной полосы, расположенной в центре контейнера. Усиление там волн оп-

ределяется трансрезонансным параметром, который зависит от координаты, а также, возможно, от времени. Помимо этого полагаем, что рассматриваемые волны являются суммой двух волн: F и F_* . Волна F является волной Фарадея, т.е. она возбуждается из-за вертикальных колебаний контейнера. Будем принимать, что это стоячая волна, которая описывается известной гармонической функцией. Волна F_* — вторичная, она инициируется волной F . Она образована двумя бегущими волнами $F_{*1}(r)$ и $F_{*2}(s)$. Здесь мы используем традиционные для этой книги обозначения для аргументов бегущих в разные стороны волн. В этом случае можно записать, что

$$\eta = F + F_{*1}(r) + F_{*2}(s). \quad (20.43)$$

Легко видеть, что это представление поверхностной волны соответствует аппроксимации, развитой в частях II и III при исследовании катастрофических волн и цунами (см., например, (8.59), (10.15) и (15.1)).

Таким образом, задача сводится к отысканию волн $F_{*1}(r)$ и $F_{*2}(s)$. Принимаем, что они описываются уравнением вида (20.42), в котором коэффициент линейного члена зависит от координаты и времени, а вынуждающим членом является гармоническая функция во второй или третьей степени. Опыт появления таких членов в определяющих уравнениях у нас уже большой. Их можно увидеть в важнейших уравнениях нашей теории катастрофических волн, например в (8.78) и (16.13), (16.32), а также в (20.18). Используя сказанное, представим уравнение (20.42) в следующем виде:

$$(F_{*1})^3 + 3R / 2^{2/3} F_{*1} + C \cos^n(\omega t - Ka) = 0. \quad (20.44)$$

Уравнение для $F_{*2}(s)$ записывается аналогично. В (20.44) трансрезонансный параметр R — константа или зависит от времени и координаты согласно следующему закону:

$$R = A(t) \sin^2(\pi a / L) + B(t). \quad (20.45)$$

Здесь A и B — гармонические функции времени. Для удобства последующих расчетов их явно задавать не будем, а при расчетах будем менять их значения удобным для нас образом. Постоянная C в (20.44) определяет амплитуду возбуждения, n — целое число. Меняя n , мы будем рассматривать различные случаи возбуждения. Если в (20.44) величина R постоянная, $C = 1$ и $n = 2$, то (20.44) сводится к (20.42). Далее будем принимать, что $C = 0.000023$.

Приведем результаты некоторых расчетов. Конечно, они не самоцель. С их помощью мы попытаемся качественно понять и описать волны, обнаруженные в экспериментах и показанные на рис. 206, 207, 222–225. Сначала мы проводим расчеты по моделированию данных рис. 206, 207 и 213. Результаты представлены в серии рис. 226, 226а и 226б. Там основное внимание уделено

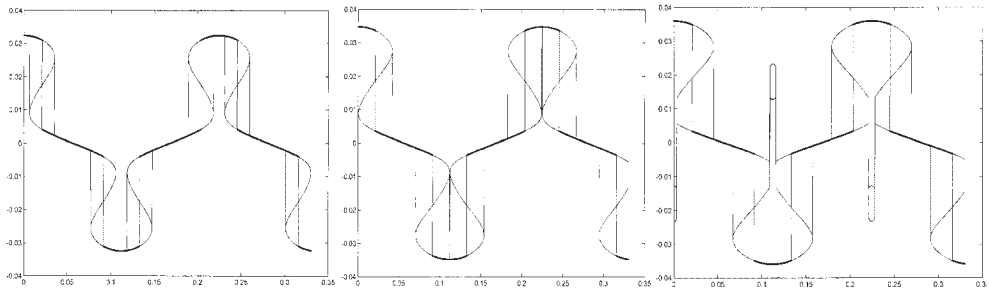


Рис. 226. Резонансные колебания волн в конечном резонаторе. Влияние близости к резонансу на схлапывание поверхностного кратера, возникновение струй и капель. Картинки (слева направо) рассчитаны для разных значений R : $R = -0.0075$, -0.008 и -0.011 . Кривые рисунка образованы наложением решений уравнения (20.44).

возникновению поверхностных кратеров, струй и капель. Затем изучается трансрезонансное развитие вертикально возбуждаемых волн, представленных на рис. 225. Результаты моделирования этих волн показаны на рис. 227.

Вначале исследуем возникновение капель и струй. Следовательно, будем моделировать некоторые данные рис. 207. Результаты расчетов представлены на рис. 226. В рассматриваемом случае стоячую волну в (20.43) учитывать не будем. При расчетах в (20.44) принимаем $n = 1$, а трансрезонансный параметр R считаем постоянным по длине резонатора и равным трем следующим величинам: -0.0075 , -0.008 и -0.011 . Согласно расчетам, отрыв капель может быть связан с резонансным процессом. Внутри области резонанса волны, подобные «эластика» формам, суммируясь, дают кратеры и волны сложной формы (при $R = -0.0075$). При дальнейшем развитии резонанса (уменьшении R) кратеры схлапываются, образуя струи, а капли отделяются от воды. Видно хорошо, что именно схлапывание кратеров ($R = -0.008$) порождает струи ($R = -0.011$). Эволюция формы кратера, в целом, соответствует наблюдаемой в [21] перед извержением струи с поверхности вертикально возбуждаемой жидкости.

Поверхностные явления, представленные на рис. 226, показаны в их динамике на рис. 226а. Расчеты охватывают полный период колебаний и проводились для фиксированного R : $R = -0.008$. Мы предполагаем, что расчеты описывают некоторые процессы, наблюдаемые при атомизации поверхности воды (рис. 207) и моретрясениях. С другой стороны, сопоставление рис. 226 и 226а с рис. 213 (слева) дает более полное представление о динамике «эластика» форм, чем формулы (20.11)–(20.15). Волны рис. 226а, вычисленные при $t = 0.108$ и 0.15 , напоминают возникающие при неустойчивости Рихтмайера-Мешкова (рис. 259) и некоторых течений жидкости (рис. 220 и 266).

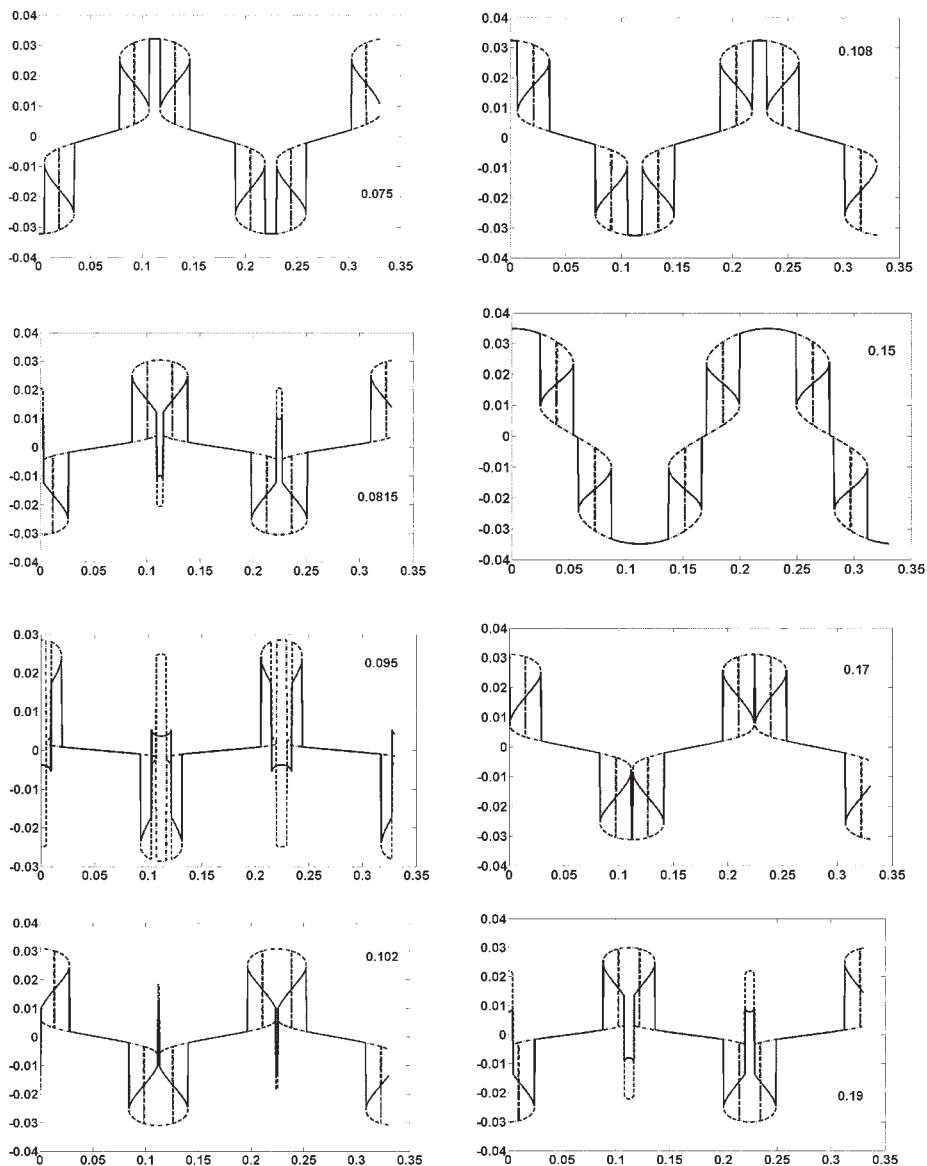


Рис. 226а. Резонансные колебания волн в конечном резонаторе. Показан период колебаний. Динамика волн сопровождается возникновением поверхностных кратеров и извержением воды при их схлопывании. Кривые рисунка образованы наложением решений уравнения (20.44). Они выделены сплошными, пунктирными и штрихпунктирными линиями.

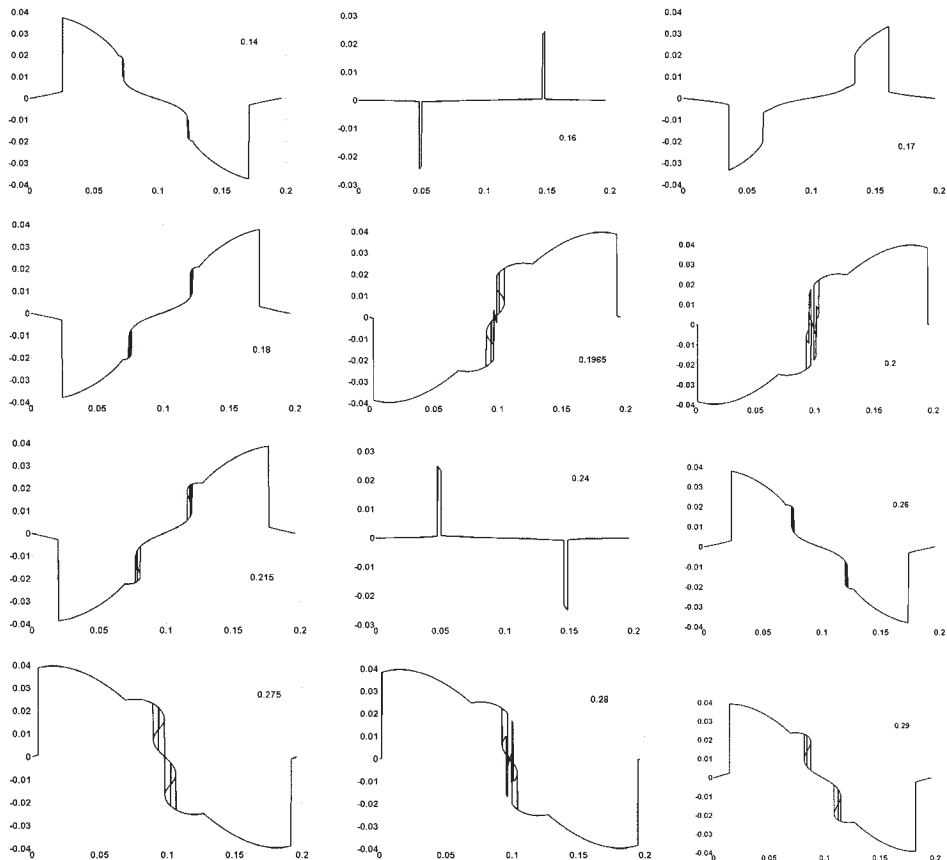


Рис. 226b. Качественная картина эволюции и взаимодействия резонансных бегущих волн. Динамику их взаимодействия определяют картины, вычисленные для $t = 0.18, 0.1965, 0.2$ и 0.215 , а также для $0.26, 0.275, 0.28$ и 0.29 . Хорошо видны места и моменты возникновения струй и провалов на поверхности жидкости. Кривые рисунка образованы наложением решений уравнения (20.44).

Мы рассмотрели стоящие волны, порождаемые при резонансных вертикальных колебаниях жидкости. Не менее сложные явления, как показано на рис. 226b, могут иметь место при взаимодействии бегущих волн.

На рис. 226b приведены результаты качественного моделирования распространения, соударения и отражения бегущих волн, имеющих складчатый фронт. Расчеты бегущих волн выполнялись согласно уравнению (20.44), где $n=1$ и

$$R = -0.02 \sin^2(\pi a / L) + 0.016. \quad (20.46)$$

Теперь сконцентрируемся на моделировании экспериментальных данных, представленных на рис. 225. Как выше отмечалось, основная идея моделирования заключается в том, что в центре контейнера располагается резонансная полоса, а отличие волн А, В и С связано только с тем, что в процессе эксперимента резонансная полоса возникает и пропадает согласно периодическому закону, а именно, волны $F_{*1}(r)$ и $F_{*2}(s)$ проходят резонансную полосу в разные моменты ее развития и этим определяется различие картин А, В и С. Чтобы проиллюстрировать плодотворность этой идеи, проведем расчеты по формуле (20.43) и уравнению (20.44), где $n=3$ и

$$R = 0.01 \sin^2(\pi a / L) + 0.008 \quad (20.47)$$

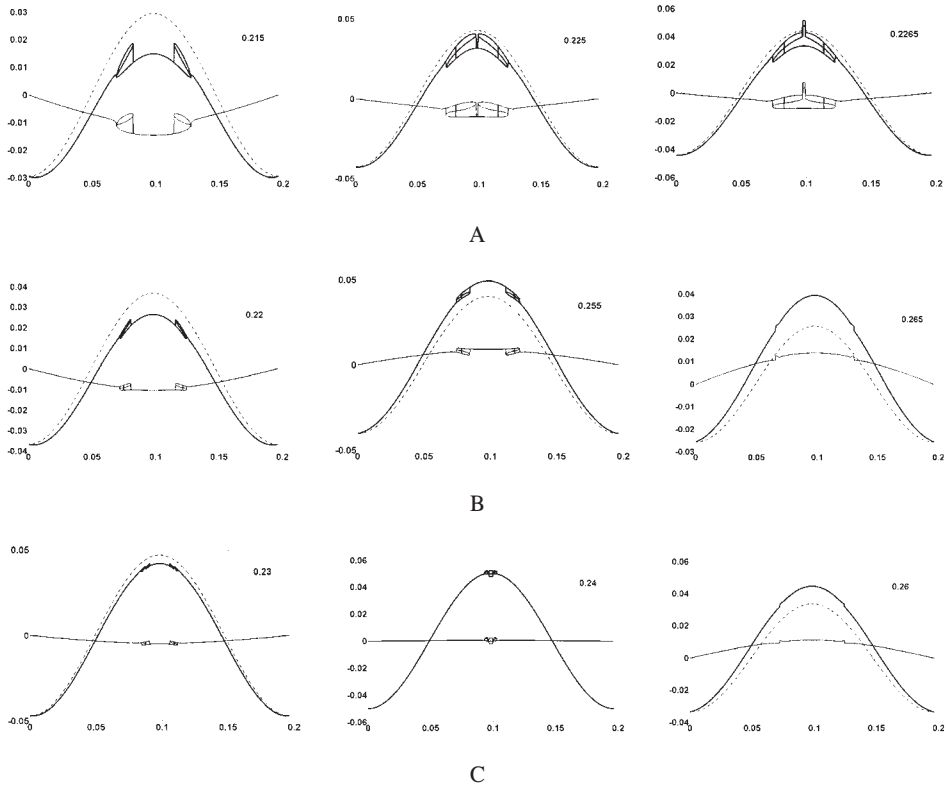


Рис. 227. Трансрезонансное развитие волн, моделирующих вертикально возбуждаемые волны, представленные на рис. 225. Нелинейные кривые рисунка образованы наложением решений уравнения (20.44). Штрихпунктирные кривые определяют исходную стоящую волну.

или

$$R = 0.001 \sin^2(\pi a / L) + 0.0008, \quad (20.48)$$

$$R = 0.0005 \sin^2(\pi a / L) + 0.00045. \quad (20.49)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 227. Причем кривые А соответствуют (20.47) и моментам времени 0.215, 0.225 и 0.2265, кривые В соответствуют (20.48) и моментам времени 0.22, 0.255 и 0.265, кривые С соответствуют (20.49) и моментам времени 0.23, 0.24 и 0.26.

Динамика кратера, возникающего на гребне волны, и формирование при схлапывании кратера струи извержения показаны на рис. 227А. Указанная динамика и струя качественно соответствуют наблюдаемым в экспериментах (рис. 14 из [117]). Струя из гребня волны наблюдалась также в ряде других экспериментов (см., например, рис. 224(а), 225 и 241). Отметим также, что рис. 227В моделирует процесс показанный на рис. 225В, а рис. 227С моделирует процесс, представленный на рис. 225С.

Сопоставление данных рис. 227 с необычайными волнами, показанными на рис. 225, приводит к выводу, что возникновение волн, описанных в [30], связано с прохождением бегущими волнами $F_{*1}(r)$ и $F_{*2}(s)$ резонансной полосы, расположенной в центре контейнера. Максимальное усиление в центре, где резонансный эффект наиболее значительный ($R \approx 0$). При разбегании волн трансрезонансный параметр увеличивается, и они исчезают, не доходя до стенок контейнера.

Резонансные частицы, капли, струи, поверхностные кратеры и пузыри. Мы рассмотрели возникновение струй, кратеров, катастрофических волн и отрыв капель от поверхности воды, наблюдаемые в экспериментах. Полученные

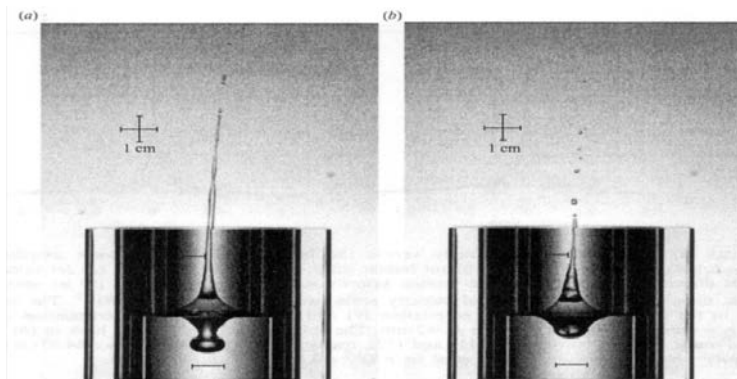


Рис. 228. Формирование султана (струи) жидкости при схлапывании поверхностного осесимметричного кратера [28]. См. также рис. 229.

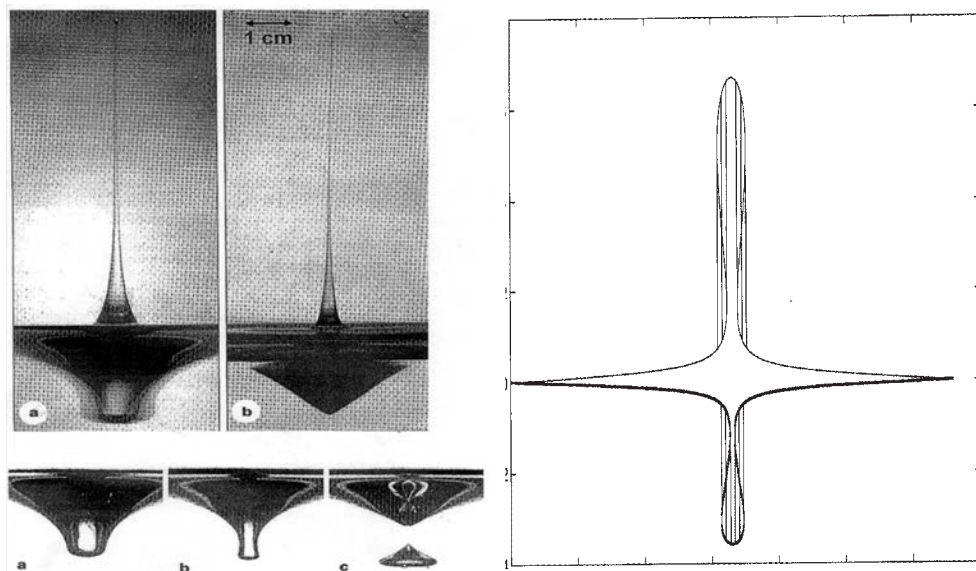


Рис. 229. Фотомонтаж, показывающий формирование поверхностного осесимметричного кратера и пузыря у поверхности жидкости, последующее схлопывание кратера и выброс султана. Картина справа — результат расчета.

результаты, в целом, согласуются с данными исследований необычайных волн, возбуждаемых в других условиях. Ряд этих волн представлен на рис. 228 и 229, а именно фотомонтажи, показывающие формирование султана (струи) жидкости при схлопывании поверхностного кратера.

Видно, что, в целом, рис. 228 и 229 качественно согласуются с данными некоторых наших расчетов. В частности, как эксперименты, так и расчеты позволяют зримо представить процесс «атомизации» и «султанизации» маленького участка поверхности гармонически возбуждаемой водяной капли (рис. 207), а также возбуждаемых поверхностей других конденсированных сред.

Процессы, показанные на рис. 229 (слева), наблюдались при вертикальном резонансном возбуждении круглой кюветы с жидкостью [21]. Нижний ряд слева показывает различные формы кратеров, возникающих на жидкой поверхности. Кривые справа образованы наложением кривых, рассчитанных для последовательности волновых форм. Видно определенное согласие экспериментов и расчетов. Читателю, возможно, будет интересно также сравнить кратеры на фотографиях с результатами расчетов, представленных на рис. 226, 226в, 207А и 244с (раздел 21.4).

Таким образом, мы рассмотрели очень сложные волновые процессы. Например, причины возбуждения пузырей, волн и струй, представленных на рис. 229 (слева), показались многим весьма загадочными [21]. Недаром большое исследование [21] было опубликовано в самом престижном научном журнале. Такая загадочность сопровождает эти волновые явления до последнего времени [116, 117]. Не менее удивительным считается появление пузырей, поверхностных кратеров, струй и волн при моретрясениях (см. раздел 3.5). На этом фоне нам удалось резко упростить анализ этих процессов. Была введена принципиально новая идея локального резонанса. В некоторых случаях ширина и интенсивность полосы резонанса зависят от времени. Эта идея открыла путь исследования и понимания необычайных результатов описанных выше экспериментов.

В заключение сформулируем несколько обобщающих замечаний по главе.

Замечание 1. Катастрофические волны на поверхности океана иногда имеют форму пирамид и названы пирамидальными [32, рис. 1.2 (а)]. Они напоминают как волны, наблюдаемые в экспериментах (рис. 224(а)), так и полученные в расчетах [4] (см. также рис. 217 и 219).

Замечание 2. Выброс жидкости из вершины волн (рис. 221, 224(а), 225, 226) удивительным образом напоминает извержение вулканов. Было бы интересно провести простейший эксперимент, основанный на указанной аналогии, а именно: вертикально возбуждать коническую колбу, заполненную водой. Можно ожидать периодическое извержение воды из вершины колбы. Таким образом, мы имели бы простейшую модель извержений, вызванных землетрясениями.

Замечание 3. Согласно известному определению, катастрофическими называются процессы, которым можно поставить в соответствие некоторую многозначную складчатую поверхность. Исходя из этого, в текущей главе мы используем новое определение катастрофических волн — это волны, имеющие складки на их профиле. Примеры складчатых фронтов волн даны на рис. 230.

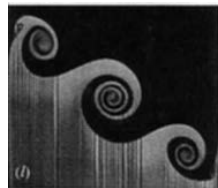
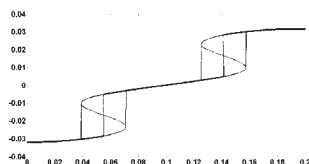
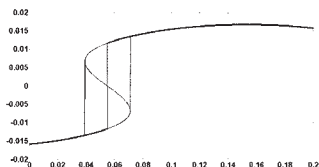


Рис. 230. Примеры катастрофических волновых фронтов. Слева — фронт бегущей волны, в середине — фронт стоячей волны, справа — вихревой фронт стоячей волны, возникающий в процессе развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова [31].

К катастрофическим относим также волны, извергающие капли или струи, или имеющие кратеры, или вихри на их поверхности.

Замечание 4. Мы исследовали волны, имеющие складчатые фронты, возбуждаемые вблизи резонансов. Они названы «эластика» формы. Передняя и задняя стороны этих волн образованы отрезками различных решений кубического уравнения. Предполагается, что эти отрезки (решения) должны непрерывно и гладко переходить друг в друга. В общем случае эти предположения могут не выполняться, и на профиле волны может быть скачок. Пример такого случая можно видеть на рис. 218а (случай -0.5). Таким образом, более детальное исследование «эластика» форм требует исследования устойчивости их фронтов и, следовательно, привлечения математических методов теории устойчивости и теории катастроф. На этом мы не останавливаемся, так как такое исследование лежит за пределами целей этой книги.

21. Вертикально-возбуждаемые волны, осцилоны и патены

...во время землетрясения в Чили ...маленькие тела подбрасывались на несколько дюймов от земли...

Дарвин

В последние годы интерес к исследованию поверхностных волн в слое жидкой или слабосвязной среды резко возрос. В какой-то мере это связано с тем, что в этих экспериментах мы можем управлять вертикальным ускорением, действующим на среду, а, следовательно, влиять на скорость поверхностных волн. Например, в случае достаточно длинных поверхностных волн их скорость приближенно определяется выражением $\sqrt{gh}$, где $g = g_0 + g_d$ (5.4). Здесь g_0 — гравитационное ускорение, а g_d — вынуждающее ускорение. Отсюда следует, что если в какой-то момент времени ускорение $g_d = -g_0$, то волна останавливается. В другие моменты времени скорость волны зависит от текущего значения g_d . Если скорость становится мнимой, то ее полагают равной нулю [24, 25].

Экспериментальное исследование параметрически-возбуждаемых сильно-нелинейных волн связано со значительными трудностями, а полученные результаты в существенной степени неожиданны. Поэтому при написании текущей главы автор сначала знакомит читателя с этими результатами с тем, чтобы ввести читателя в рассматриваемый круг проблем, а только затем приводит описывающую их теорию. В конце главы намечаются пути дальнейших исследований и проводятся некоторые аналогии.

21.1. Солитоны, осцилоны и патены

Природа показывает нам только хвост льва.

Эйнштейн

Формирование катастрофических волн и необычайных патенов в биологических, химических и физических системах часто понимается как результат взаимодействия плоских нелинейных бегущих волн. Альтернативный взгляд связывает их появление с возникновением локализованных волн, подобных стоячим солитонам на поверхности жидкости. В некоторых случаях они образуют систему удивительных горизонтально-вибрирующих (рис. 231a-d) или вертикально-пульсирующих (рис. 231e) стоячих объектов.

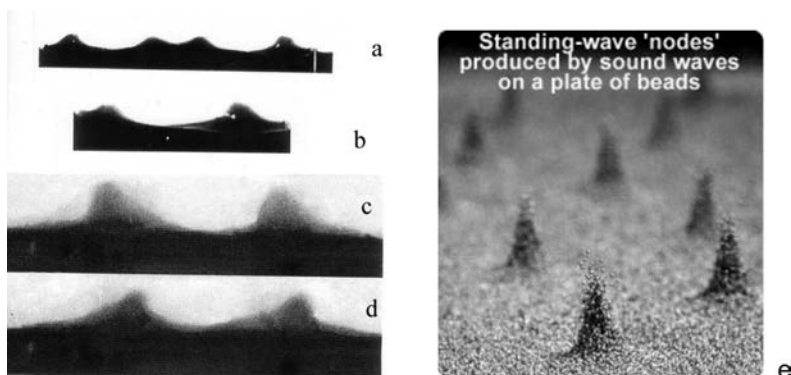


Рис. 231. Вибрирующие с малой амплитудой солитоны на поверхности воды, заключенной в вертикально-возбуждаемом резонаторе (контейнере) (a–d) [33, 34], и осцилоны (e) на поверхности слоя вертикально-колеблющейся гранулированной среды [35].

В 1999 и 2000 годах Галиев опубликовал статьи [24, 25], в которых, в частности, он исследовал причины появления слабо-осцилирующих уединенных волн ряби (солитонов) на поверхности воды.

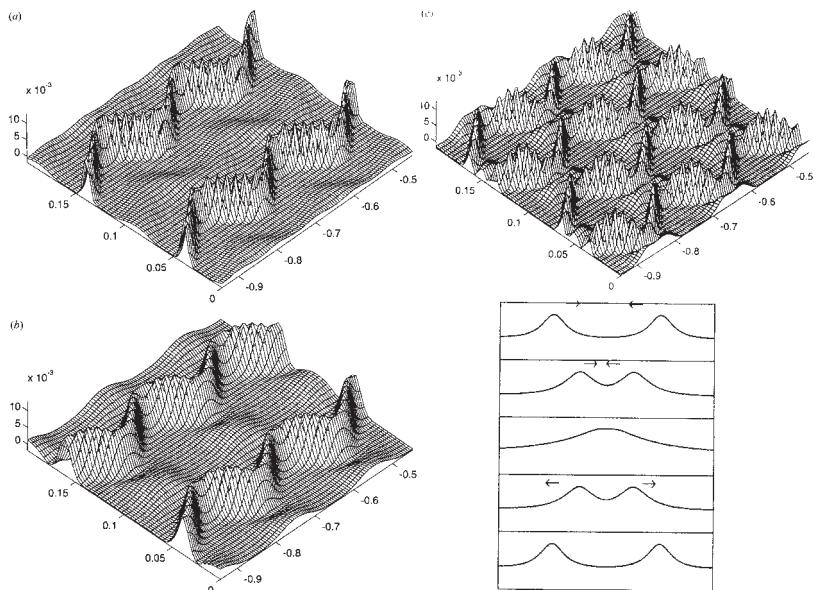
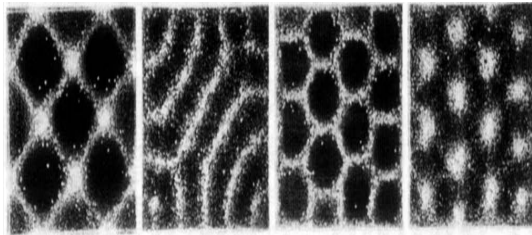


Рис. 232. Эволюция слабо-вибрирующих волн во время уменьшения вынуждающей частоты: 15 гр (a), 7 гр (b) и 5 гр (c) [25]. Картина внизу справа показывает движение относительно центра контейнера двух слабо-взаимодействующих солитонов в течение периода колебаний.

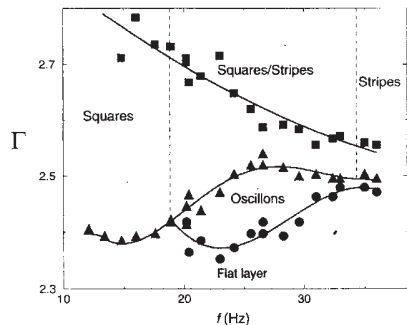
Результаты аналитического моделирования представлены на рис. 232. Волны (а) и (б) моделируют поведение двух слабо-взаимодействующих осциллирующих солитонов (см. рис. 231б), волны (с) моделируют поведение четырех слабо-взаимодействующих осциллирующих солитонов (см. рис. 231а). Эти колебания являются одномерным аналогом радиальных колебаний, формирующих осциллоны [33]. Показанная внизу справа картина полностью соответствует волнам (б), если амплитуда последних колебаний увеличивается настолько, что они начинают соприкасаться. Волны на рис. 232 моделируют слабо-взаимодействующие осциллирующие волны ряби, обнаруженные в экспериментах [33, 34]. Оказалось, что при вертикальном возбуждении с достаточно высокой частотой поверхностные волны осциллируют с такой малой амплитудой, что, находясь рядом, почти не взаимодействуют. Когда частота уменьшается, то время соударения слоя с основанием увеличивается и, соответственно, увеличивается возможность взаимодействия волн. При определенной частоте они начинают сильно взаимодействовать. В результате возникают сложные поверхностные патены.

Хорошо известно, что на поверхности вертикально-возбуждаемых слоев воды и гранулированных сред возникают волны, которые могут образовывать полосы, квадраты и шестиугольники (рис. 233) [35–37]. Область существования указанных патенов в плоскости, безразмерное вертикальное ускорение Γ и вынуждающая частота показаны на рис. 233б.

В частности, на поверхности могут возникать сильно-локализованные вертикально-вибрирующие стоячие волны. Пример таких волн, возникающих на слое шариков из бронзы, показан на рис. 231е и 234. Сильно-локализованные вертикально-осциллирующие объекты были названы — осциллоны [35].



а



б

Рис. 233. Примеры стоячих волновых поверхностных патенов (а) [36] и диаграмма, показывающая в плоскости безразмерное вертикальное ускорение — частота области формирования различных поверхностных патенов [35].

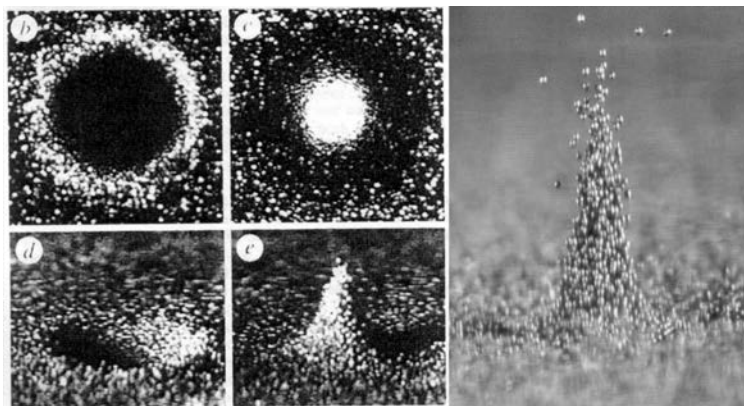


Рис. 234. Периодически возникающие выбросы гранул и кратеры на поверхности вертикально-возбуждаемого слоя (слева). Выброс материала с поверхности, рядом угадываются кратеры (справа) [35, 38].

Как видно из рис. 231e и 334, осцилон — это осесимметричный объект. Он осциллирует с частотой, в два раза меньшей, чем возбуждающая частота. Таким образом, это параметрически-возбуждаемая стоячая локализованная волна. В течение одного полупериода — это пик, в течение другого полупериода — это кратер (рис. 234). Возникновение этих необычайных волн, видимо, связано с неустойчивостью поверхности по отношению к сильным вибрациям. Иногда достаточно было тронуть карандашом поверхность, создавая малую вмятину, как на возмущенном месте возникал осцилон. Моделирование указанных вертикально-возбуждаемых нелинейных волн и патенов связано обычно с численными расчетами [35]. Однако они могут быть изучены и аналитически в контексте теории катастрофических волн.

Осцилоны наиболее полно исследованы для случая гранулированных сред. Они появляются, когда вертикальное ускорение существенно превышает g . При этом материал отрывается от основания и оказывается в состоянии свободного полета. Вся динамика происходит в течение удара слоя о поверхность. При этом кратеры схлапывались и происходило извержение материала. В противоположность — там, где были пики, возникали кратеры. Удивительно, но появление осцилонов можно качественно объяснить взаимодействием резонансных волн ряби (рис. 235), которые периодически порождают пики и кратеры на возмущенной поверхности.

На плоской поверхности воды или гранул описанный процесс может привести к появлению периодических радиально осциллирующих волн, т.е. осцилонов. Таким образом, удивительные патены возникают, когда имеются очень

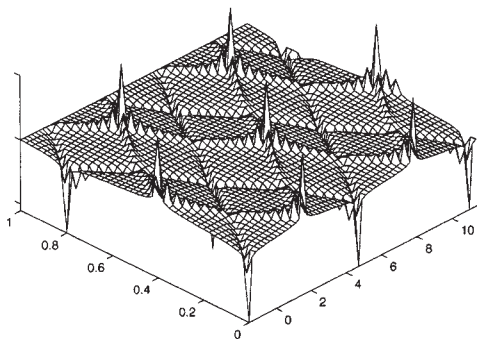


Рис. 235. Результаты расчетов, объясняющих возникновение осцилонов взаимодействием бегущих поверхностных волн [4].

сильные вертикальные движения частиц среды, сопровождаемые их существенным горизонтальным движением. Эти движения хорошо просматриваются на рис. 236.

Волны (a) и (b) на рис. 236 (картина слева) показывают волновой паттерн непосредственно до и в момент удара. Картина (c) демонстрирует разбегание продольных волн после соударения. Горизонтальная белая линия определяет положение основания. Волны на рис. 236 (картина справа) — результат численного моделирования

рования гранулированных волн, возбуждаемых на вибрирующем основании. Рис. 236 явно демонстрирует, что стоячие волны, существующие во время полета, мгновенно преобразуются в бегущие волны непосредственно после соударения. Затем бегущие волны, сталкиваясь, формируют стоячие волны на новом месте. Таким образом, на поверхности сильно-возбуждаемого слоя

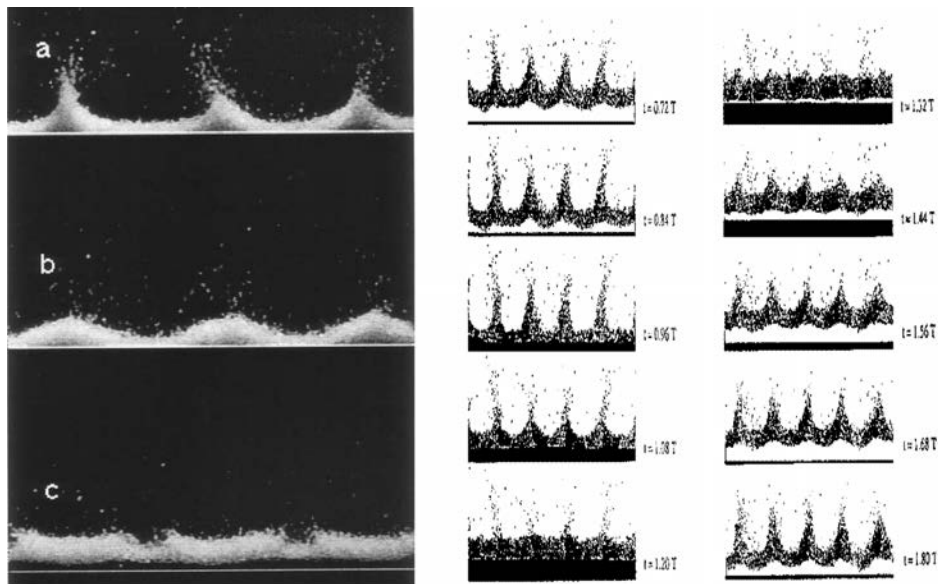


Рис. 236. Типичное волнообразование на поверхности гранулированной среды, возникающее при сильных вибрациях: эксперимент (слева) [42], численное моделирование (справа) [43].

в разные моменты времени существуют как бы два типа волн: стоячие (большая часть периода колебаний) и бегущие (в момент соударения и непосредственно после него).

Рис. 236 можно интерпретировать также другим образом, предполагая, что на поверхности слоя существует волна, осциллирующая с переменной скоростью. А именно, в моменты соударения скорость волны резко возрастает, а в моменты свободного полета слоя эта скорость падает почти до нуля. Такая схематизация волновой картины позволяет изучать ее, используя аппарат бегущих волн, как это будет сделано при моделировании некоторых задач в разделе 21.3. Описанная схема соответствует расчетам, результаты которых приведены на рис. 237 и 238. На рис. 237 приведены результаты моделирования осциллонов, показанных на рис. 231e, 234.

Из расчетов следует, что скорость волн ряби, образующих осциллоны, сильно зависит от гравитации. После отделения слоя от вибрирующего основания, т.е. во время свободного полета, эти волны практически не двигаются. Их движение (динамика) имеет место достаточно малое время при соударении слоя с основанием.

При изменении частоты волны ряби, образующие ранее осцилон, начинают образовывать другие поверхностные патены. Примеры их даны на рис. 238. Они соответствуют патенам рис. 233a.

Осциллоны на поверхности гранулированной среды открыты в 1996 году. В последующем они были обнаружены на поверхности воды и слоя суспензии. Фотографии, иллюстрирующие последний случай, представлены на рис. 239 (см. также рис. 273).

Таким образом, мы описали класс сильно-локализованных нелинейных волн, взаимодействие которых определяет формирование разнообразных динамических поверхностных патенов. Эти волны возникают, и амплитуда их резко возрастает в окрестности параметрических резонансов. Подчеркнем, что рассмотренные случаи колебаний далеко не исчерпывают их разнообразия. При очень сильном вертикальном возбуждении возникают так называемые «арочные» формы, кото-

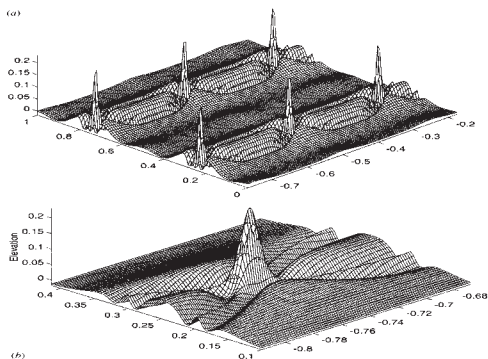


Рис. 237. Периодическое образование выбросов материала и кратеров на поверхности слабосвязных сред (а), детальная картина схлapyвания кратера и выброса материала (формирования осциллона) (b) [25].

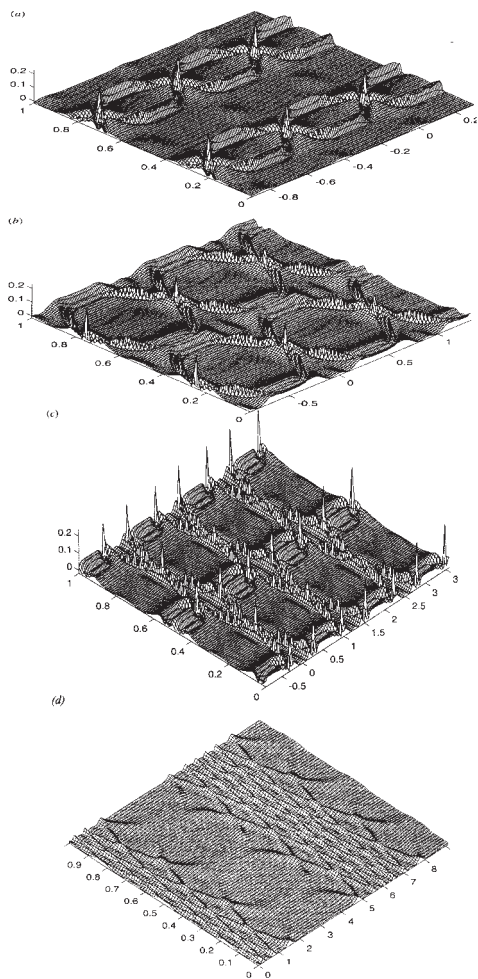


Рис. 238. Эволюция оссилонов в эллипсоидальные структуры, затем в шестиугольные и другие сложные периодические структуры [24, 25, 41].

дении появляются также существенные горизонтальные смещения. Причем частицы могут группироваться в компактные массы. Подчеркнем, что из экспериментов следует, что при качественном рассмотрении явления, даже в случаях больших γ , в некоторых случаях можно пренебрегать горизонтальным движением компактных масс гранул. Такому поведению можно поставить в соответствие динамику шара на вибрирующем основании (рис. 240).

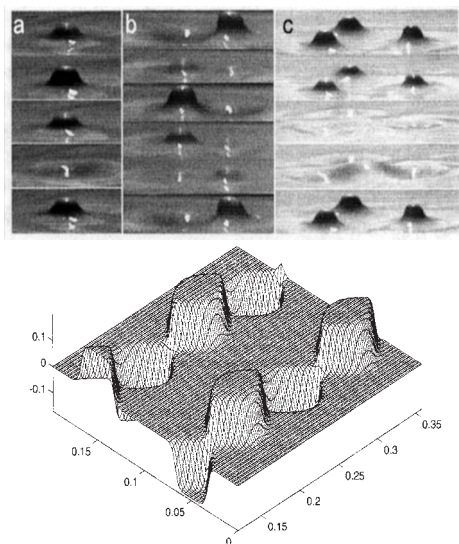


Рис. 239. Типичный вид оссилонов, возбуждаемых на поверхности суспензии. Один оссилон (a), два оссилон (b) и три оссилон (c) (сверху) [44]. Результат расчета двух оссилонов (снизу) [24].

рые трудно назвать локальными [45]. Попытка их аналитического описания дана в [24].

Из приведенных экспериментальных данных видно, что частицы слоя на вибрирующем основании характеризуются двумя типами движения — вертикальным и горизонтальным. Вертикальное движение при слабом ускорении основания γ практически полностью определяет движение частиц. При сильном возбуждении

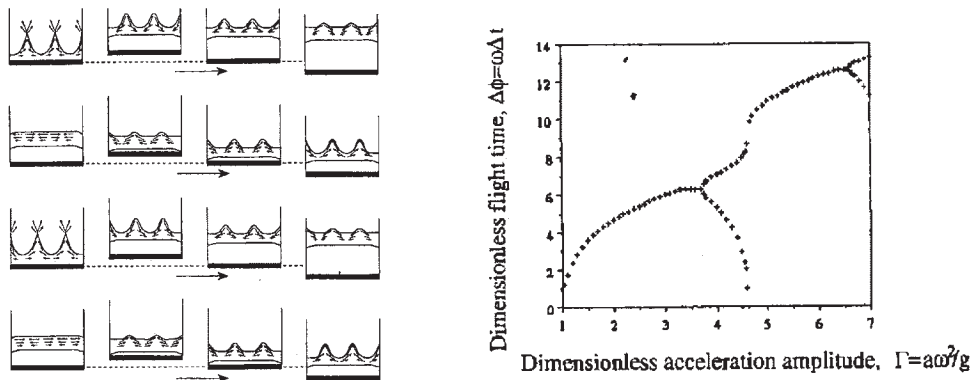


Рис. 240. Схема, показывающая движение волн и частиц в случае сильных, но устойчивых колебаний слоя на вибрирующем основании (слева), и пример бифуркационной диаграммы колеблющегося слоя в координатах, ускорение Γ и время полета [46].

Хорошо известно, что колебания шара устойчивы только при определенных соотношениях ускорения Γ и времени полета. Они становятся все менее и менее устойчивыми по мере роста Γ . Это же справедливо для колебаний компактных масс гранул. Однако в экспериментах достигались ускорения, при которых время полета устойчиво превышало три периода колебания основания.

Приведенные в этом разделе результаты интересны для нас как примеры катастрофического резонансного усиления поверхностных волн. Вместе с тем они позволяют качественно понять процессы, возникающие при очень сильных землетрясениях и моретрясениях. В свете приведенных в разделе результатов становится понятным, почему мы использовали модель вертикально возбуждаемого шара и столба кавитирующей жидкости (см. введение, а также подразделы 3.2.2 и 3.2.3) при моделировании вызванных землетрясением колебаний холма Тарзана.

21.2. Анализ неожиданных параметрически-возбуждаемых волн на воде

Знание — ограничено, неизвестное — беспрельдно.

Томас Гексли

Здесь мы продолжим рассмотрение необычайных волн, сопровождаемых извержением воды из вершин и кратеров, а также возникновением пузырей на поверхности воды.

Для возбуждения волн, представленных на рис. 241, использовалась прямоугольная вертикально-возбуждаемая емкость (контейнер). Длина контейнера была 0.6 м, ширина 0.06 м. Глубина воды была 0.3 м. Все показанные на

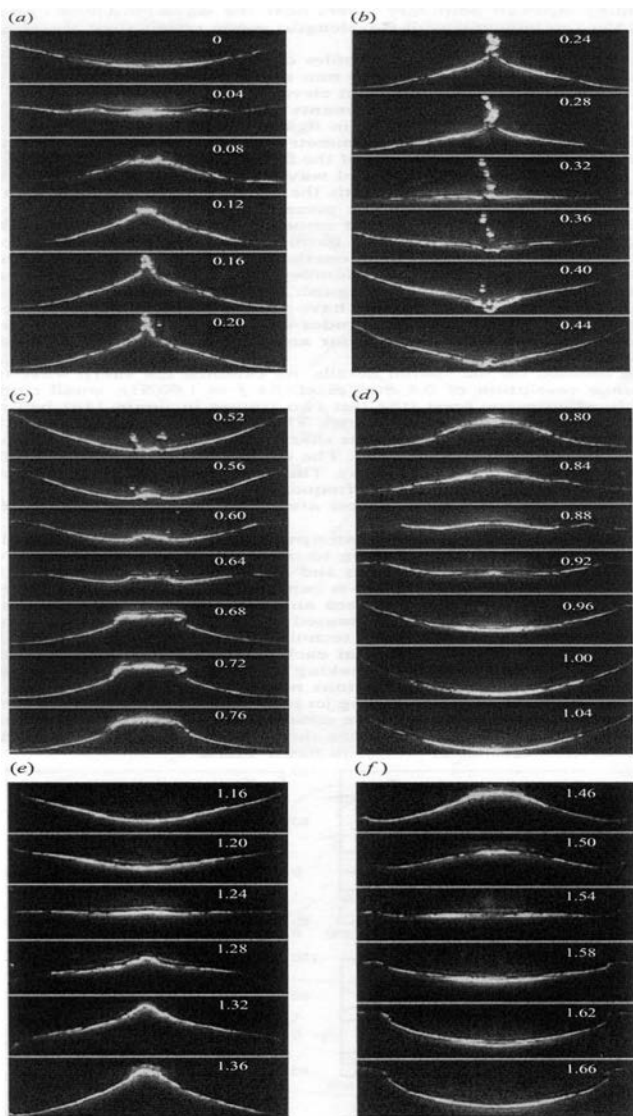


Рис. 241. Эволюция поверхностных волн, наблюдаемая в [30], сопровождаемая извержением воды из вершин. Цифры определяют моменты времени.

рис. 241 профили наблюдались в течение одного эксперимента. Волны возбуждались при частоте 1.6 Гц и амплитуде 4.6 мм колебаний контейнера. Для качественного анализа возникших волн можно представить их как сумму основной стоячей волны и нелинейного возмущения. Видно, что интервалы времени с 0 по 0.44, с 0.52 по 1.4 и с 1.16 по 1.66 секунд определяют приблизительно период колебаний основной стоячей волны T . Однако каждый интервал характеризуется своими локальными особенностями. Первый интервал характеризуется извержениями жидкости из вершины волны (см. на рис. 225 волну А). Вторым интервалом — появлением столообразной волны со складками на краях (волна В). В третьем интервале возникает волна с куполом на вершине (волна С). В последующем описанная последовательность повторяется. Таким образом, период нелинейных волн превышал в три раза период T колебаний линейных волн (т.е. волн, возбуждаемых при малой амплитуде вынуждающих колебаний). Необычайные волны появлялись в центре и у края контейнера (рис. 225 и 241). При этом волны у края имели запаздывание на $1.5 T$ по сравнению с волнами в центре (T — период вынуждающих колебаний). На эти особенности было обращено особое внимание в [24–26].

При моделировании экспериментов поверхностные волны в контейнере представлялись суммой стоячей волны и бегущих волн ряби. Эти волны считались длинными, и использовалась одномерная теория. Предполагалось, что скорость волн ряби может зависеть от ускорения контейнера, когда оно достаточно велико. Надо отметить, что имеется мало исследований высоко-нелинейных волн Фарадея. Еще меньше случаев, пусть приближенного, но описания результатов экспериментов. Это связано со сложностью проблемы. Последнее существенно усложняло анализ, и поэтому автором для волн ряби было построено приближенное решение, которое, строго говоря, справедливо только локально — у центра и краев контейнера. А именно, использовалось условие резонанса, которое выполнялось только у центра и краев контейнера, поэтому решение для волн ряби было справедливо только в указанных местах. Несмотря на указанные и другие идеализации, результаты теории качественно соответствовали некоторым данным экспериментов. Развитая теория основывается на двух разных подходах (алгоритмах).

Первый алгоритм. Первый подход несколько развивал алгоритм, созданный для гранулированных волн, т.е. он был основан на предположении, что вертикальное вынуждающее ускорение много больше g . На основе этого подхода получены картины, представленные на рис. 242. На левой стороне этого рисунка (верхний ряд) приведены все профили волн, представленных на рис. 241. На этом же рисунке приведены результаты расчетов, выполненных согласно первому подходу, изложенному в разделе 21.3.

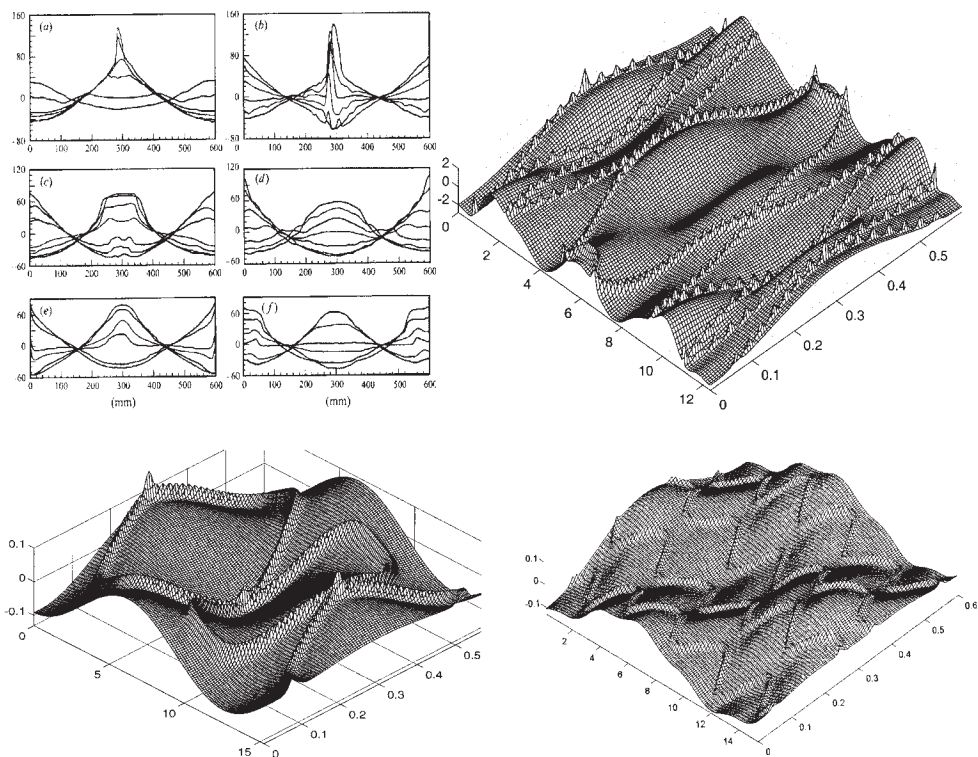


Рис. 242. Профили волн, представленных на рис. 241 (верхний ряд, слева) [30]. Там же, справа — результат моделирования этих профилей, а также волн, представленных на фотографиях рис. 241 [24, 41]. Примеры изменения волнообразования на поверхности воды в контейнере в результате варьирования амплитуды и частоты возбуждения (см. также [24]) (нижний ряд картин).

Наше моделирование вертикально-возбуждаемых необычайных волн рис. 241 основано на предположении, что скорость волн ряби изменяется в зависимости от действующего гравитационного ускорения. Изменяя частоту и амплитуду возбуждения, мы можем менять это ускорение. При этом соответственно меняется скорость и направление движения волн ряби, а также их количество. Три примера волн ряби, распространяющихся по поверхности гладкой волны, приведены на рис. 242.

Из рис. 241 и 242 следует, что максимальные амплитуды и извержения воды (рис. 225А) возникают в случаях, когда волны ряби встречаются на вершине стоячей волны. В случаях, когда эти встречи имеют место на склоне стоячей волны в момент ее роста, волны ряби формируют столообразные волны

(рис. 225В). Наконец, если эта встреча имеет место на склоне стоячей волны в момент ее спада, волны ряби формируют куполообразную вершину (рис. 225С). На фото рис. 241, так же как на профилях рис. 225, наличие на поверхности стоячих волн бегущих волн ряби только угадывается. Более явно они просматриваются на рис. 243, хотя сами приведенные там фотографии далеко не идеальные. Более четко появление этой волны показано на рис. 17 в [117].

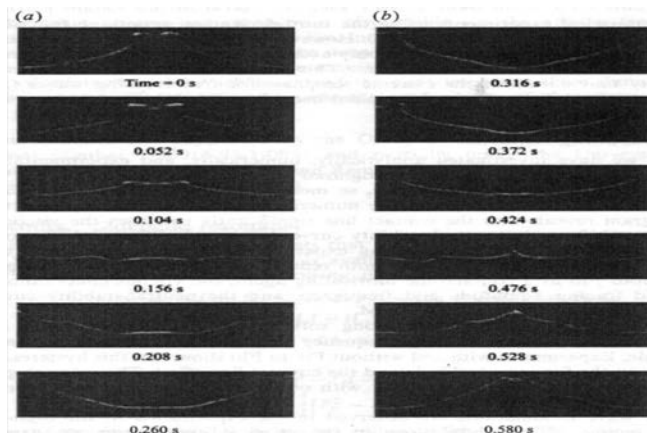


Рис. 243. Бегущие резонансные волны ряби на поверхности стоячей гармонической волны [34]. Более ясно некоторые детали показанной здесь волновой эволюции можно различить на рис. 17 из [117]. Заметим, что замечательные работы [116, 117] могли бы существенно помочь автору в понимании экспериментов [30, 34] и развитии моделей для их описания. Однако так не случилось, так как эти работы 2009 года были опубликованы много позже создания моделей и были обнаружены автором перед самым началом набора книги.

При рассмотрении удивительных волн на рис. 225, 241, 242 и 243 вкуче с экспериментами и расчетами, представленными на рис. 231, 232 и 237, 238, возникает мысль, что эти удивительные волны образуются наложением на стоячую волну двух или четырех волн ряби (солитонов), осциллирующих в окрестности центра контейнера и его краев (рис. 231, 232). Чтобы пояснить эту мысль, напомним, что удивительные колебания волн на рис. 232 соответствуют волнам, показанным на рис. 231(а–d).

Конечно, появление указанных волн ряби не вполне очевидно. Они не могут возникнуть, если исследование ограничить линейным анализом. Однако сомнения относительно волн ряби отпадают, если обратиться к нелинейной теории. Согласно ей — линейная параметрически-возбуждаемая волна порождает вынуждающую силу, генерирующую продольные волны. В результате вынужденные бегущие волны возникают на поверхности дополнительно к па-

раметрически-возбуждаемым стоячим волнам. В общем случае, волны ряби много меньше стоячих волн, но это не так, если возникающая вынуждающая сила близка к одной из резонансных частот продольных колебаний слоя. Например, гранулированные волны, показанные на рис. 23, взятом из [46], возбуждались при частотах второго продольного резонанса. Там имеет место наложение длинной волны и волны ряби, причем, в отличие от расчетных картин рис. 242, приведена четверть длины волны. Волны, рассмотренные в [50], соответствуют второй, если $L = 15$ см, или четвертой, если $L = 30$ см, резонансной частоте.

В целом, исследование, выполненное на основе первого подхода, подводит к мысли, что неожиданные результаты экспериментов [30] — результат возбуждения бегущих волн на поверхности линейных параметрически-возбуждаемых волн. Патены, образованные бегущими волнами, вполне аналогичны показанным на рис. 232, 237 и 238 предыдущего раздела.

Второй алгоритм (см. раздел 21.4). Этот подход основан на предположении, что вертикальное вынуждающее ускорение много меньше g . Таким образом, он соответствует большинству случаев экспериментального возбуждения волн Фарадея на воде. На основе этого подхода получены профили волн, представленных на серии рис. 244 этого раздела и раздела 21.4.

При расчетах нелинейных профилей катастрофических волн, показанных на рис. 244, мы использовали формулу $\eta \approx -hu_x$ (6.75) и решения кубического алгебраического уравнения (21.64). Это уравнение будет представлено в разделе 21.4. Уравнение может иметь три решения. Видно, что теоретические кривые качественно описывают центральные участки профилей волн, показанных на рис. 241. Они образуют струи, капли, пузыри и грибовидные формы. При рассмотрении кривых и образованных ими форм надо иметь в виду, что решения кубического алгебраического уравнения описывают только центральные участки профилей волн. Вне этих участков, как некоторое приближение, можно принять линейное описание волн.

Таким образом, для центральной области контейнера имеется качественное согласие рассчитанных нелинейных волновых профилей с экспериментом. В частности, согласно расчетам, в моменты 0.08, 0.12 и 0.72 на воде возникают многозначные поверхности, которые можно истолковать как грибовидные волны (волны В, согласно терминологии рис. 225). С другой стороны, хорошо видна струя на гребне волны (моменты 0.16, 0.24 и 0.84 — волна А из рис. 225), а также картина образования кратеров и струй из них (моменты 0.4 и 0.6). Эпюру 0.04 можно истолковать как волну С (см. рис. 225). Она соответствует профилям 1.32 и 1.46 рис. 241.

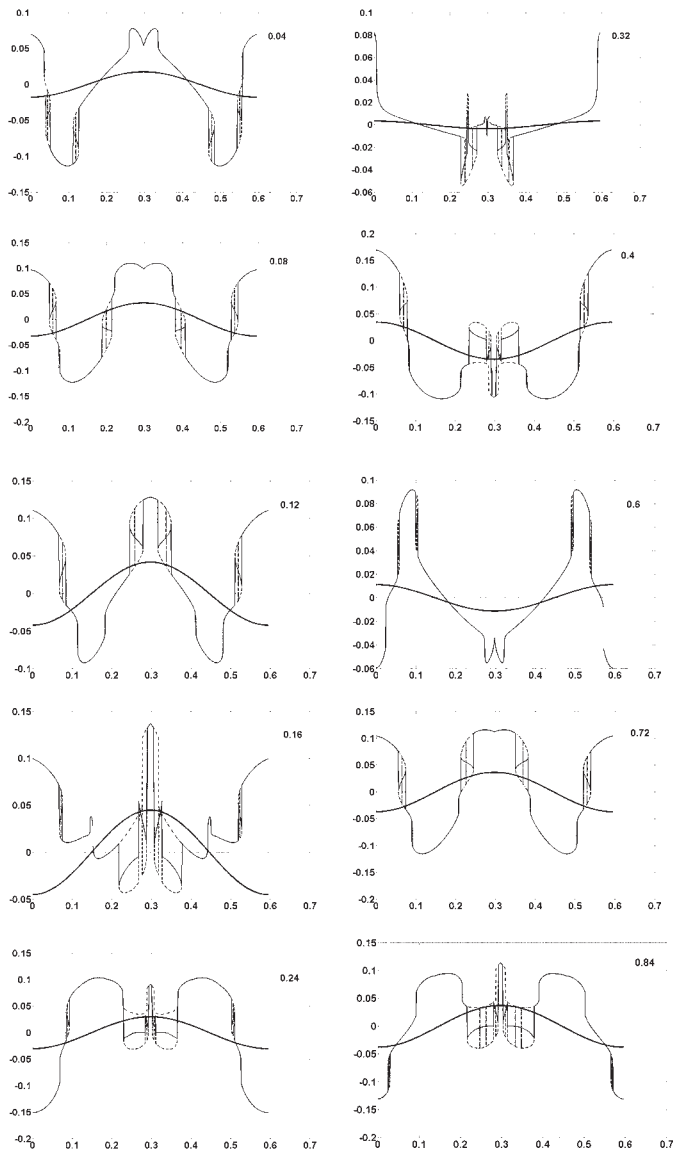


Рис. 244. Толстые линии определяют линейное решение для волн Фарадея. Другие катастрофические волновые профили определяются нелинейным решением задачи. Профили рассчитаны согласно алгебраическому кубическому уравнению (21.64), выведенному в разделе 21.4. Представлены кривые, соответствующие всем трем решениям уравнения. Они нанесены сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями.

В целом, определенное согласие данных эксперимента и кривых рис. 244 не может не вызывать удивление. Оно связано с тем, что мы используем развитую в книге теорию длинных волн. Теория не претендует на описание скачков и складок на волновых фронтах. Однако расчеты, основанные на этой теории, пусть приближенно, описывают эти скачки и складки. Вместе с тем кривые рис. 244 в их центральной части удивительно хорошо описывают высоту струй. Надо отметить еще раз, что при расчетах мы находили вначале производную u_x и лишь затем волну, согласно линеаризованной формуле (6.75): $\eta \approx -hu_x$.

После указанного анализа, мы провели расчеты с использованием уравнения (21.64) и формулы для η , учитывающей величины второго и третьего порядка: $\eta \approx h(-u_x + u_x^2 - u_x^3)$ (21.66). Результаты расчетов представлены на рис. 244а. При этом мы использовали очень важную мысль, а именно, что, исходя из рис. 244 и данных экспериментов [30, 116, 117], можно предложить различные интерпретации данных расчетов. На рис. 244а представлена одна из них.

Теоретические кривые, представленные на рис. 244а, качественно описывают профили волн, показанных на рис. 225 и 241. Таким образом, используемая интерпретация, видимо, справедлива, хотя возможны и другие, несколько отличные, интерпретации. Подчеркнем, что при расчете профилей рис. 244а использовалась формула $\eta \approx h(-u_x + u_x^2 - u_x^3)$ (21.66), в то время как при расчете профилей рис. 244 использовалась формула $\eta \approx -hu_x$. Причем высота струй, показанных рис. 244, лучше соответствует эксперименту (рис. 241 и 242), чем найденные по формуле (21.66). Сказанное, конечно, относится только к рассматриваемым экспериментам. Возможно применительно к другим данным [30, 116, 117] использование формулы $\eta \approx h(-u_x + u_x^2 - u_x^3)$ (21.66) может быть оправданным.

Отметим, что особый наш интерес вызывают струи, извергаемые гребнями волн, и возможность возникновения капель и кратеров, а также пузырей под поверхностью воды. Последние, в частности, достаточно хорошо угадываются на рис. 228 и 229. В принципе, можно исследовать вопрос — какие из членов, входящих в уравнение (21.64), ответственны за описание этих явлений. Как пример подобного исследования мы записали упрощенные варианты уравнения (21.64), а именно уравнения (21.66а) и (21.66б). В этих уравнениях сохранен только один из вынуждающих членов: J_s^3 . Как показали расчеты, представленные на рис. 244б, видимо, он в значительной степени ответственен за описание возникновения капель, грибовидных форм и поверхностных кратеров.

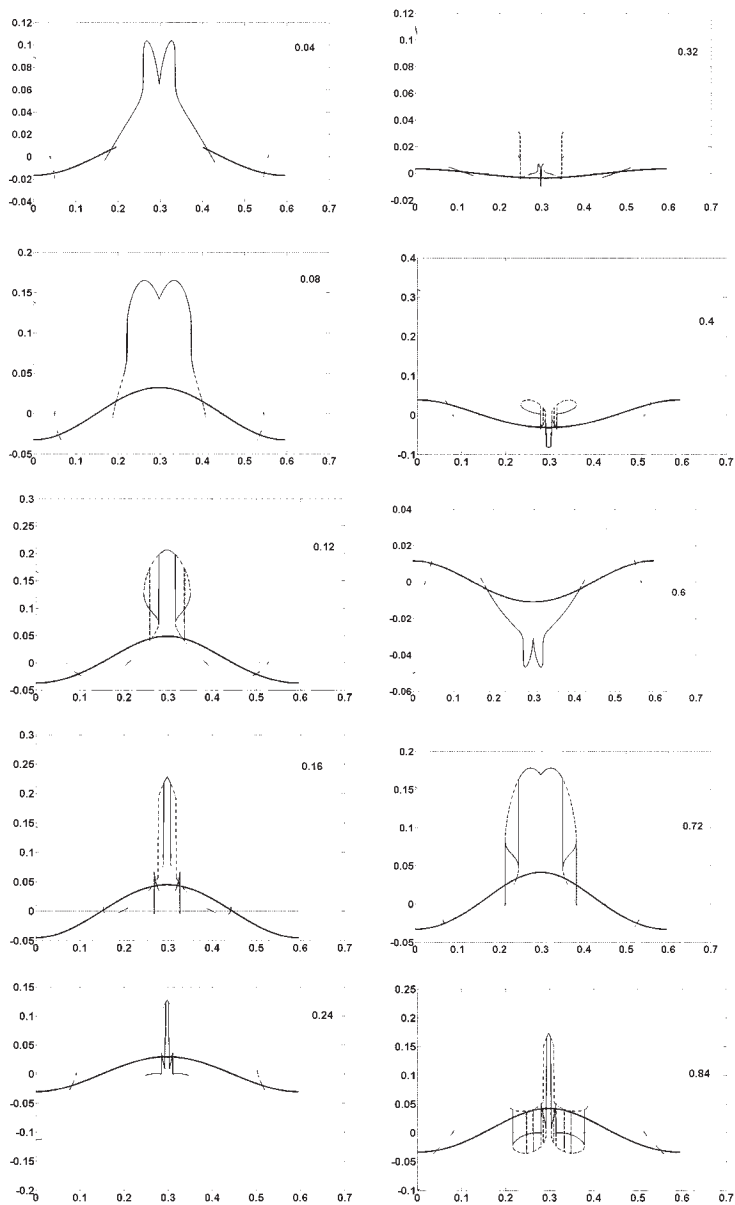


Рис. 244а. Вариант интерпретации расчетов, представленных на рис. 244. При расчетах как линейных, так и нелинейных участков профилей волн использовалась формула $\eta \approx h(-u_x + u_x^2 - u_x^3)$.

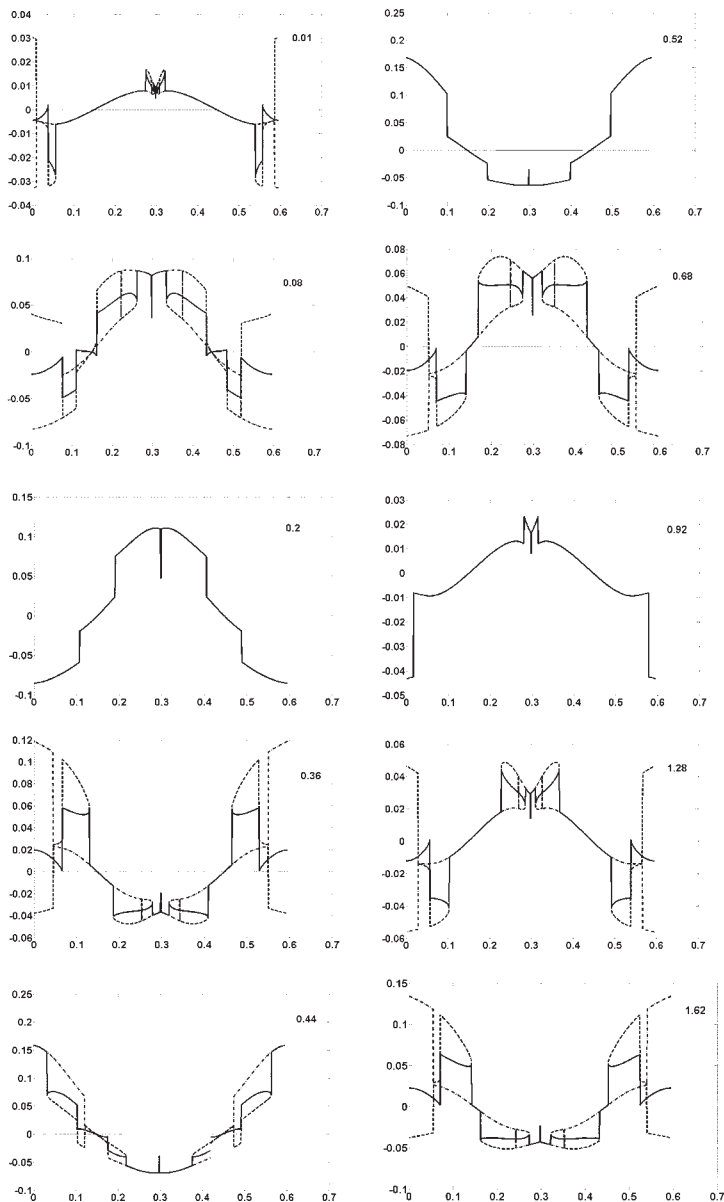


Рис. 244b. Нелинейные волновые профили, соответствующие показанным на рис. 241. Профили рассчитаны согласно (21.66) и уравнениям (21.66a) и (21.66b). Представлены кривые, соответствующие всем трем решениям уравнений. Они нанесены сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями. Видно, что теоретические кривые качественно описывают результаты экспериментов.

Расчеты центральной, резонансной, области контейнера достаточно правильно описывают профили волн рис. 241. Это можно сказать и об областях, примыкающих к концам контейнера, если там принять наиболее благоприятное для теории решение. Подчеркнем, что эти области описываются много лучше рис. 244a и 244b, чем рис. 244. Формы полученных в расчете кратеров можно сравнить с представленными ранее на рис. 228 и 229.

Из рассмотрения представленных расчетов видно, что, в целом, имеется согласие нелинейных расчетов с экспериментами. Это относится и к принципиально новым, слабо изученным вопросам — возникновению и эволюции струй и грибовидных структур на вершинах волн. Успешно моделируются также случаи возникновения брызг, пузырей и кратеров. Интересно, что, согласно экспериментам и расчетам, брызги могут возникать в центре контейнера в моменты прохождения ложбиной волны наинизшей точки.

Конечно, особенности волновых картин, представленных на рис. 232, 237, 238, 242, 244 244a и 244b в определенной мере связаны с использованием при моделировании бегущих волн. По-видимому, основные особенности волнообразования, например, на гребнях волн, можно описать также с помощью только стоячих волн. Однако использование бегущих волн ряби позволяет нам существенно упростить анализ. Это важно, в частности, для последующего моделирования. Таким образом, при вертикальном возбуждении на поверхности слоя помимо стоячей параметрически-возбуждаемой волны могут формироваться резонансные, катастрофические, волны ряби, что качественно объясняет неожиданные эффекты, показанные на рис. 225 и 241.

21.3. Теория вертикального возбуждения длинных поверхностных волн

...чистый математик, который забыл бы о существовании внешнего мира, был бы подобен живописцу, умеющему гармонически сочетать цвета и формы, но лишенному натуры, модели — его творческая сила быстро бы иссякла.

Пуанкаре

Выше приведено значительное количество экспериментальных данных, которые сопровождаются примерами расчетов. Здесь мы излагаем теорию расчетов, которая является приближенной и основана на уравнениях, выведенных в части II книги. Предполагается, что эти уравнения справедливы как для волн на воде, так и гранулированных волн. Т.е. предполагается, что гранулированный материал в результате первоначальных вибраций перешел в оживленное состояние.

Исходное уравнение теории запишем в виде:

$$u_{tt} - a_0^2 u_{xx} = -3a_0^2 u_x u_{xx} + 6a_0^2 u_x^2 u_{xx} + \mu u_{xxx} + \frac{1}{3} h_0^2 a_0^2 u_{xxxx}. \quad (21.1)$$

Здесь h_0 — невозмущенная толщина слоя, $a_0^2 = gh_0$, $g = g(t)$ и, согласно [25], используется эйлерова координата x . Таким образом, мы имеем кубически-нелинейное уравнение с переменными коэффициентами для слабо диссипативно-дисперсионной системы. Величина и форма поверхностных волн определяются по формуле:

$$\eta = h(u_x^2 - u_{xx}) \text{ или приближенно } \eta = -hu_x. \quad (21.2)$$

Отыскиваются периодические решения уравнения (21.1), имеющие период по координате, равный NL , здесь L — длина резонатора и $N = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$.

Рассмотрим краевые условия. Принимаем, что

$$u = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = L. \quad (21.3)$$

Таким образом, границы контейнера считаются неподвижными. Мы запишем ниже решение сформулированной задачи, следуя работе [25]. Там представлены аналитические решения, которые явно демонстрируют влияние амплитуды вертикального ускорения, нелинейных, параметрических, дисперсионных и вязкостных эффектов на вертикально-возбуждаемые поверхностные волны.

21.3.1. Метод возмущений и локальный резонанс

Первое правило всяких вычислений состоит в том, чтобы точность результатов, ими доставляемых, соответствовала той практической потребности, для которых вычисление производится. Очевидно, что расчеты не точны, но слова «не точны» не равносильны словам «не пригодны для дела».

Из доклада А.Н. Крылова председателю
Морского технического комитета, 1904 г.

Здесь мы строим резонансное решение уравнения (21.1). Его записываем, вводя новые переменные:

$$r = a(t) - x, \quad s = a(t) + x, \quad (21.4)$$

где $a(t)$ — неизвестная функция, которая будет определена позднее. Можно показать, что

$$\begin{aligned} u_x &= u_s - u_r, u_t = a_t(u_s + u_r), u_{xx} = u_{rr} - 2u_{rs} + u_{ss}, \\ u_{tt} &= (a_t)^2(u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}) + a_{tt}(u_r + u_s), u_{xxxx} = u_{rrrr} - 2u_{rrss} + u_{ssss}, \\ u_{lxx} &= a_t(u_{rrr} - u_{rss} - u_{rrs} + u_{sss}). \end{aligned} \quad (21.5)$$

Здесь $a = a(t)$ и значки r и s обозначают соответствующие частные производные. Введем следующее обозначение:

$$a_t^2 = a_0^2. \quad (21.6)$$

Затем, пренебрегая членами четвертого порядка, переписываем (21.1) так, что

$$\begin{aligned} 4a_0^2 u_{rs} &= 3a_0^2(1 + 2u_r - 2u_s)(u_r - u_s)(u_{rr} - 2u_{rs} + u_{ss}) + \\ &+ \mu a_t(u_{rrr} - u_{rss} - u_{rrs} + u_{sss}) + \\ &+ h_0^2 a_0^2(u_{rrrr} - 2u_{rrss} + u_{ssss}) / 3 - a_{tt}(u_s + u_r). \end{aligned} \quad (21.7)$$

Решение представляется как сумма

$$u = u_1 + u_2 + u_3, \quad (21.8)$$

где $u_1 \ll u_2 \ll u_3$. Подставляя сумму в (21.7) и приравнявая члены одного порядка, можно получить систему следующих уравнений:

$$u_{1,rs} + 0.25a_{tt}a_0^{-2}(u_{1,s} + u_{1,r}) = 0, \quad (21.9)$$

$$\begin{aligned} 4u_{2,rs} + a_{tt}a_0^{-2}(u_{2,s} + u_{2,r}) &= -3(u_{1,s} - u_{1,r})(u_{1,rr} - 2u_{1,rs} + u_{1,ss}) + \\ &+ \mu a_t^{-1}(u_{1,rrr} - u_{1,rss} - u_{1,rrs} + u_{sss}) + h_0^2(u_{1,rrrr} - 2u_{1,rrss} + u_{1,ssss}) / 3, \end{aligned} \quad (21.10)$$

$$\begin{aligned} 4u_{3,rs} + a_{tt}a_0^{-2}(u_{3,s} + u_{3,r}) &= \\ = -3(u_{2,s} - u_{2,r})(u_{1,rr} - 2u_{1,rs} + u_{1,ss}) - 3(u_{1,s} - u_{1,r})(u_{2,rr} - 2u_{2,rs} + u_{2,ss}) + \\ &+ 6(u_{1,r} - u_{1,s})^2(u_{1,rr} - 2u_{1,rs} + u_{1,ss}). \end{aligned} \quad (21.11)$$

Пусть

$$u_1 = J(r) - J(s). \quad (21.12)$$

В этом случае уравнение (21.9) локально удовлетворяется вблизи точек, где

$$-J \nless s) + J \nless r) = 0. \quad (21.13)$$

Отметим также, что уравнение (21.9) приближенно удовлетворяется выражением (21.12), если также $a_{tt} \neq 0$. В (21.13) штрих обозначает дифференцирование относительно соответствующей переменной (21.4). Мы будем далее называть (21.13) условием локального резонанса. Это понятие мы уже вводили при изучении катастрофических океанских волн и моделировании необычайных волн Фарадея. В частности, к резонансным точкам относятся границы рассматриваемого резонатора. Рассмотрим их. Видно, что около $x = 0$ равенства (21.3), (21.9), (21.13) выполняются автоматически. Теперь рассмотрим граничное условие при $x = L$ (21.3). Оно дает

$$J(a - L) - J(a + L) = 0. \quad (21.14)$$

Мы будем рассматривать резонансное решение, имеющее приближенно период $2L$. Поэтому условие (21.13) удовлетворяется.

Таким образом, выражение (21.12) в случае краевых условий (21.3) приближенно удовлетворяет линейному волновому уравнению (21.9) в окрестности резонансных точек. Условие (21.13) является для данной задачи очень важным. Только при его выполнении решение в виде бегущих волн справедливо в некоторой окрестности резонансных точек. Как было показано в разделе 20.7, возникающие там усиление и формоизменение волн могут объяснить результаты ряда удивительных экспериментов.

Подчеркнем, что решение (21.12) напоминает решение Даламбера, однако в (21.12) скорость волны меняется и зависит от вынуждающего вертикального ускорения. Далее мы уточним резонансное решение (21.12), принимая во внимание нелинейные составляющие u_2 и u_3 . При этом будем ограничиваться выражениями в виде бегущих волн. Время рассматривается как параметр, тогда волновое решение уравнения (21.10) дается выражением

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{2} a_{rr}(t) a_0^{-2} \right] u_2 = \\ & = J_2(r) + j_2(s) - \frac{3}{8} \left\{ r[J(r)]^2 - s[J(s)]^2 - 2J(s)J(r) + 2J(r)J(s) \right\} + \\ & + 0.25 a_0^{-1} [J(r) - J(s)] dr ds + \frac{1}{12} h_0^2 [sJ(r) - rJ(s)] + x d + d_1. \end{aligned} \quad (21.15)$$

Примем, что коэффициент μ в (21.1) и (21.15) зависит от вертикального ускорения слоя следующим образом:

$$\mu = \eta_* a_r, \quad (21.16)$$

где η_* — постоянная. Это позволяет нам вычислить интеграл в (21.15). Полученное выражение для u_2 может содержать вековые (сингулярные) члены, явно зависящие от времени. Эти члены исключаются, если

$$\begin{aligned} J_2(r) &= -3r(J(r)^2 / 8 - h_0^2 r J(r) / 12 - \eta_* r J(r) / 4 + \alpha h_0^{-1} r^2 / 8 + \dots)_2(r), \\ j_2(s) &= 3s(j(s)^2 / 8 - h_0^2 s j(s) / 12 - \eta_* s j(s) / 4 + \alpha h_0^{-1} s^2 / 8 + \dots)_2(s). \end{aligned} \quad (21.17)$$

Здесь $J = J(r)$, $j = -J(s)$. Выражения (21.17) вносятся в (21.15). В результате (21.15) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{2} a_{rr}(t) a_0^{-2} \right] u_2 = \\ & = \dots_2(r) + \psi_2(s) + 0.375(s-r)[(J(r)^2 + (j(s))^2] - 0.75(jJ(r) - Jj(s)) + \\ & + (s-r)[h_0^2 (J(r) + j(s)) + 3\eta_* (J(r) + j(s)) + 6d] / 12 + d_1. \end{aligned} \quad (21.18)$$

Решение справедливо вблизи границ и точек, где выполняется условие (21.13). Рассмотрим теперь величины третьего порядка. Подставляем (21.12) и (21.18) в уравнение (21.11). При этом мы не будем учитывать величины d и d_1 в (21.18). В результате (21.11) примет вид:

$$u_{3,rs} + \frac{1}{4} a_{rr} a_0^{-2} (u_{3,s} + u_{3,r}) = \Phi(r, s) + 1.5[J + (j+)^2 - 2Jj + J + (j+)^2 + j + (j+)^2 - 2Jj + j + (j+)^2], \quad (21.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(r, s) = & 9\{jj + J - Jj + - 3.5(j+)^2 J + [(J+)^2] j + 5Jj + - 2[(j+)^3] + 3 - jJ + \\ & + JJ + 5Jj + - 2[(J+)^3] + 3 - 3.5(J+)^2 j + \\ & + [(j+)^2] J - JJ + jj + j(J+)^2 - \\ & - J(j+)^2 - 0.5J + (J+)^2 - 0.5j + (j+)^2 - 0.5sj + (J+)^2 + \\ & + 0.5sj + (J+)^2 + - 0.5rJ + (j+)^2 + \\ & + 0.5rJ + (j+)^2\} / 16 + 9s\{J + (J+)^2 + / 32 + 9r\{j + (j+)^2\} + 32. \end{aligned} \quad (21.20)$$

Для качественного рассмотрения проблемы и сугубо приближенного анализа мы будем рассматривать случай, когда

$$\Phi(r, s) \approx 1.5[J + (j+)^2 - 2Jj + J + (j+)^2 + j + (j+)^2 - 2Jj + j + (j+)^2] \quad (21.21)$$

в уравнении (21.19). Теперь мы следуем разделу 9.2 и интегрируем (21.21). В результате можно найти следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{2} a_{rr} a(t) a_0^{-2}\right] u_3 = & J_3(r) + j_3(s) + 1.5 \int_0^s [J + (j+)^2 - 2Jj + J + (j+)^2 + \\ & + j + (j+)^2 - 2Jj + j + (j+)^2] ds - (J+)^2 j + \\ & + s(J+)^3 / 3 + r(j+)^3 / 3 - (j+)^2 J + j + (j+)^2 dr. \end{aligned} \quad (21.22)$$

В (21.22) вековые члены исключаются, если

$$J_3(r) = - \int_0^r (J+)^3 dr - 0.5r(J+)^3 \text{ и } j_3(s) = - \int_0^s (j+)^3 ds - 0.5s(j+)^3. \quad (21.23)$$

Напомним, что приближенное решение уравнения (21.1) определяется суммой (21.8). Используя представленные выше выражения для слагаемых суммы, записываем следующее выражение для резонансной продольной волны:

$$\begin{aligned} u = & J + j + \left[1 + \frac{1}{2} a_{rr} a(t) a_0^{-2}\right]^{-1} 2 \\ & \times \left\{ \int_0^r J_3(r) dr + \int_0^s j_3(s) ds - \int_0^r J_3(r) dr - \int_0^s j_3(s) ds + 0.75x \int_0^r [J + (j+)^2 - (j+)^2] dr - \right. \\ & \left. - 0.75(jJ + jJ) + x \int_0^r [J + (j+)^2 - (j+)^2] dr + 3\eta_*(J + j) + 6d \int_0^r J dr + d_1 + \right\} \end{aligned}$$

$$+150j^2 ds - (J^2 j + 2x(J^3)^3 / 3 - 2x(j^3)^3 / 3 - (j^2 J + j^2 J^2 dr) \}. \quad (21.24)$$

Решение (21.24) справедливо вблизи границ и точек, где выполняется условие (21.13) и $\left[1 + \frac{1}{2} a_n a(t) a_0^{-2}\right]^{-1} \neq 0$. Граничное условие при $x = 0$ (21.3) удовлетворяется автоматически, если примем, что

$$r_2(r) = r_2(s) = r_3(r) = r_3(s) = d_1 = d = 0. \quad (21.25)$$

В этом случае граничное условие при $x = L$ (21.3) сводится к уравнению

$$3(J^2)^2 / 4 + h_0^2 J + 6 + (J^3)^3 = 0. \quad (21.26)$$

Теперь мы примем, что

$$J(a \pm x) = \left\{ A \operatorname{sech}^2 [e \sin \pi L^{-1} M^{-1} (a \pm x + c_-)] + C \right\}^2 \cos^2 \pi L^{-1} M^{-1} (a \pm x + c_-), \quad (21.27)$$

содержащие $\operatorname{sech}^2 [e \sin \pi L^{-1} M^{-1} (a \pm x + c_-)]$ и $\operatorname{sech}^4 [e \sin \pi L^{-1} M^{-1} (a \pm x + c_-)]$, мы получаем три алгебраических уравнения. Из них, приближенно, находим

$$e \approx 1.423 \pi h_0^{-1} L, \quad C = -0.9, \quad A = 18. \quad (21.28)$$

Эти значения близки к полученным в разделе 13.5 (13.27). Таким образом, мы определили выражение (21.27). Используя его, мы можем найти u_1 и

$$u_x = - \left\{ A \operatorname{sech}^2 [e \sin \pi L^{-1} M^{-1} (a - x + c_-)] + C \right\} \cos^2 \pi L^{-1} M^{-1} (a - x + c_-) - \left\{ A \operatorname{sech}^2 [e \sin \pi L^{-1} M^{-1} (a + x + c_+)] + C \right\}^2 \times \cos^2 \pi L^{-1} M^{-1} (a + x + c_+). \quad (21.29)$$

Здесь постоянные A , C и e определены выше. Поверхностную волну можно отыскать согласно (21.2).

21.3.2. Методика выполнения расчетов, представленных в разделе 21.1.

Цель расчетов — не только числа, но и понимание.

Валентин Валентинович Новожилов

В общем говоря, представленная теория может быть справедлива, если $a_0 = \sqrt{g_0 h_0 + g_y h_0}$ вещественна. Например, когда

$$g_y = g_0 (2 - i) \cos \omega t + g_0 (i - 1) (\cos 4 \omega t + 4 \cos 2 \omega t) / 3. \quad (21.30)$$

Однако здесь, чтобы иллюстрировать теорию, мы рассмотрим случай чисто гармонического возбуждения, когда

$$g_y = \delta \cos \omega t. \quad (21.31)$$

1. Случай $\delta = g_0$ рассмотрен в [25]. Для него $a_t^2 = a_0^2 = g_0 h_0 (1 + g_y g_0^{-1}) = g_0 h_0 (1 + \delta g_0^{-1} \cos \omega t)$ и

$$a = (g_0 h_0)^{0.5} \int \delta g_0^{-1} \cos \omega t)^{0.5} dt = (8 g_0 h_0 \omega^{-2})^{0.5} \sin \omega t / 2. \quad (21.32)$$

Если $3 \ll g_0$, то согласно (21.32)

$$a = a(t) \approx \sqrt{h_0 g_0} \left(t + \frac{1}{2} \delta \omega^{-1} g_0^{-1} \sin \omega t - \frac{1}{16} 3^2 g_0^{-2} t - \frac{1}{32} 3^2 \omega^{-1} g_0^{-2} \sin 2\omega t \dots \right). \quad (21.33)$$

Видно, что сходимость последнего разложения зависит от ω . Если ω мало, то сходимость ряда может быть очень медленной. Возможно, что когда ω уменьшается при $3 \ll g_0$, в системе возбуждаются хаотические колебания.

2. В противоположность волнам на воде гранулированные волны возбуждаются в экспериментах, если приближенно $3 \ll 5g_0$ (см. рис. 233). При этом объем газа в гранулированном материале увеличивается, потому что слой начинает периодически отделяться от основания. Этот случай моделируется в [25] в предположении, что вертикальное ускорение слоя быстро-переменная функция во время удара, контакта и отделения материала от основания. Исходя из этого, возбуждающее ускорение, действующее на слой, аппроксимируется выражением

$$g_y = \delta_* \cos^n m^{-1} \omega t, \quad (21.34)$$

где 3_* — неизвестная постоянная, $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ и $m = 1, 2, 3, \dots$. Постоянные 3_* , n и m могут быть определены экспериментально [25]. В (21.34) степень n определяется интенсивностью возбуждения и временем контакта. Амплитуда 3_* определяется скоростью соударения слой-основание. Величина m определяется временем полета слоя.

Таким образом, постоянные в (21.34) определяются возбуждением, однако, подчеркивается, что (21.34) — не ускорение основания. Выражение (21.34) определяет ускорение слоя, которое может быть совершенно отличным от ускорения основания. В частности, (21.34) дает субгармонические колебания, возбуждаемые гармоническим движением основания, если $m = 2, 3, \dots$. Пусть 3_* велика настолько, что можно исключить эффект гравитационного ускорения ($|g_y| \ll g_0$). В этом случае $a_0^2 = \delta_* h_0 \cos^n m^{-1} \omega t$ в уравнении (21.1). Следовательно, $a_0 = (\delta_* h_0)^{0.5} \int \cos^{n/2} m^{-1} \omega t dt$ для многих экспериментов с гранулированными волнами.

Таким образом, решение (21.29) описывает разнообразные волны, поэтому надо выделить интересующие нас эксперименты. Таковыми являются волновые патены, которые мы обсудили в разделах 21.1 и 21.2.

Моделирование волн на воде [24, 25]. Прямоугольный контейнер вертикально возбуждался в [33]. Длина его была 0.2 м и ширина 0.025 м. Глубина воды 0.02 м. Согласно развитой выше теории, волновые патены на поверхности воды определяются выражением (21.29) и (21.2). Результаты вычислений для $\delta = g_0$, различных M^{-1} и $c_{\pm}$ представлены на рис. 232. Мы использовали (21.32), (21.2) и приняли, что $\omega = 63$ Гц. Эти результаты соответствуют волнам, представленным на рис. 231 (левая сторона).

Два колеблющихся в фазе солитона (см. рис. 231b и 232a) рассчитаны при $M^{-1} = 2$ и $c_{+} = c_{-} = 0.75L$. Это стоячие солитоны, однако они вибрируют относительно определенных точек. Волны, колеблющиеся в противофазе, рассчитаны при $M^{-1} = 2$ и $c_{-} = -1.25L$, и $c_{+} = 0.75L$ (рис. 232b). Рис. 232c показывает взаимодействия и колебания четырех солитонов. Они рассчитывались в предположении, что $M^{-1} = 4$ и $c_{-} = -7L/8$, и $c_{+} = 5L/8$. Таким образом, варьируя M^{-1} и $c_{\pm}$, мы качественно описали экспериментальные результаты для волн на воде.

Моделирование гранулированных волн [25]. Результаты расчетов, выполненных с использованием (21.29) и (21.2) и $h_0/L = 0.05$, $L = 1$ м, $m = 2$, $c_{+} = L/4$, $3_* = 2.5g_0$, и $a = (\delta_* h_0)^{0.5} m \omega^{-1} (\sin m^{-1} \omega t - 0.333 \sin^3 m^{-1} \omega t)$. Рис. 237 соответствует $\omega = 25$ Гц. Рис. 238 представляет волновые патены, вычисленные для разных $\omega = 15$ Гц (а), 7 Гц (б), 5 Гц (с).

Нам представляется, что возникновение осцилона, представленного рис. 237, можно лучше понять, если осцилон рассматривать как следующий этап развития осциллирующих солитонов, показанных на рис. 232, когда амплитуда их осцилляций становится настолько большой, что они начинают приходить в соприкосновение, т.е. соударяться. Из такого рассмотрения следует, что осцилон возникает как результат взаимодействия двух осциллирующих солитонов, а именно, пик возникает в момент соударения, а кратер в результате расхождения солитонов.

В плоскости время-координата осциллирующие солитоны формируют как бы цепочку. Возможно, эта цепочка качественно соответствует так называемым «молекулам» [35, 3]. Если частота вертикальных колебаний уменьшается, а амплитуда увеличивается, то цепочки начинают взаимодействовать. Это взаимодействие и влияние границ объясняет возникновение квадратных, прямоугольных и шестиугольных патенов, показанных на рис. 233. Расчеты показывают, что эти патены могут возбуждаться для слоев различных толщин и законов возбуждения [25].

21.3.3. Методика выполнения расчетов, представленных в разделе 21.2.

...человечество всегда действует в условиях неполной информации...

Валентин Валентинович Новожилов

Здесь мы построим приближенную аналитическую модель волн, рассмотренных в разделе 21.2. В соответствии с [24] принимается, что

$$g_y = \delta_0(2-i)\cos\omega t + 3_0(i-1)(\cos 4\omega t + 4\cos 2\omega t) / 3 + 3\cos^n m^{-1}\omega t, \quad (21.35)$$

где 3_0 и 3 — амплитуды и $n=2,4,6,\dots$, и $m=1, 2, 3, 4, \dots$. Эти постоянные $3_0, 3, n$ и m должны соответствовать данным моделируемых экспериментов. Одночастотные ($i=1$) и двухчастотные ($i=2$) периодические вынуждающие колебания основания описываются выражением (21.35). Мы подчеркиваем, что благодаря члену $\delta\cos^n m^{-1}\omega t$ выражение (21.35) описывает ускорение слоя, которое может значительно отличаться от ускорения основания, описываемого гармонической функцией.

Случай, когда в (21.35) $i=1$, изучается уже около 2-х столетий. Согласно разделу 21.1, ему могут соответствовать сильно-локализованные волны. Волны, возникающие при двухчастотном возбуждении, начали исследовать приблизительно 15 лет назад.

Чтобы максимально упростить рассмотрение, мы предполагаем, что гладкая составляющая

$$g_{y0} = \delta_0(2-i)\cos\omega t + 3_0(i-1)(\cos 4\omega t + 4\cos 2\omega t) / 3 \quad (21.36)$$

и быстро-переменная составляющая

$$g_{yf} = \delta\cos^n m^{-1}\omega t, \quad (21.37)$$

в (21.35) возбуждают не взаимодействующие волны. Пусть

$$u = u_0 + u_f, \quad (21.38)$$

где $u_0 = u_0(x, t)$ — медленно-переменная, а $u_f = u_f(x, t)$ — быстро-переменная функция. Теперь мы можем записать следующие уравнения для u_0 :

$$u_{0,tt} - a_0^2 u_{0,xx} = -3a_0^2 u_{0,x} u_{0,xx} + 6a_0^2 u_{0,x}^2 u_{0,xx} + \mu u_{0,txx} + \frac{1}{3} a_0^2 h^2 u_{0,xxxx}, \quad (21.39)$$

где $a_0^2 = 2g_0 h \cos^2 \omega t / 2$, если $i=1$ в (21.36) или $a_0^2 = \frac{8}{3} g_0 h \cos^4 \omega t$, если $i=2$

в (21.36). Уравнение для быстро-переменной функции аналогично (21.39):

$$u_{f,tt} - a_f^2 u_{f,xx} = -3a_f^2 u_{f,x} u_{f,xx} + 6a_f^2 u_{f,x}^2 u_{f,xx} + \mu u_{f,txx} + \frac{1}{3} a_f^2 h^2 u_{f,xxxx}, \quad (21.40)$$

где $a_f^2 = \delta h \cos^n m^{-1} \omega t$. Ниже мы строим решения для уравнений (21.39) и (21.40), удовлетворяющие граничным условиям на жестких стенках контейнера (21.3).

Гладкие стоячие параметрически-возбуждаемые волны. Функция u_0 удовлетворяет граничным условиям, если

$$u_0 = U_{0I}(t) \sin 2\pi x I L^{-1}. \quad (21.41)$$

Здесь I может быть одним из целых чисел, например, $I = 1, 2, 3, \dots$. Выражение (21.41) подставляется в (21.39). Как результат следующее уравнение может быть записано так:

$$\begin{aligned} \pi^{-2} I^{-2} L^2 U_{0I}'' + 4\mu U_{0I}' + 4h(g_0 + g_y)(1 - 4h^2 \pi^2 I^2 L^{-2} / 3) U_{0I} = \\ = -24h(g_0 + g_y) \pi^2 I^2 L^{-2} U_{0I}^3. \end{aligned} \quad (21.42)$$

Здесь $U_{0I} = U_{0I}(t)$ и штрих обозначает дифференцирование по времени. Рассмотрим частные случаи, следующие из (21.36).

Случай $i = 1$. При этом $h(g_0 + g_y) = 2g_0 h \cos^2 \omega t / 2$, и мы принимаем, что $U_{0I} = A_{0I} \cos \omega t / 2$. Подставляем это выражение в (21.42) и приравниваем члены, содержащие $\cos \omega t / 2$. В результате получаем алгебраическое уравнение для A_{0I} . Затем мы находим, что

$$\begin{aligned} A_{0I} = \omega \pi^{-2} I^{-2} L^2 \times \\ \times \sqrt{0.5(g_0 h)^{-1} [1 - 16g_0 h \omega^{-2} \pi^2 I^2 L^{-2} (1 - 4h^2 \pi^2 I^2 L^{-2} / 3)]} / 6. \end{aligned} \quad (21.43)$$

Если кубический член в (21.42) пренебрежимо мал, то параметрически-возбуждаемые волны возникают, если

$$16g_0 h \omega^{-2} \pi^2 I^2 L^{-2} (1 - 4h^2 \pi^2 I^2 L^{-2} / 3) = 1. \quad (21.44)$$

Случай $i = 2$. При этом $h(g_0 + g_y) = \frac{8}{3} g_0 h \cos^4 \omega t$ и принимается, что $U_{0I} = A_{0I} \cos \omega t$. Следуя затем случаю $i = 1$ и собирая члены, содержащие $\cos \omega t$, мы получаем алгебраическое уравнение для коэффициента A_{0I} . Откуда находим:

$$\begin{aligned} A_{0I} = \omega \pi^{-2} I^{-2} L^2 2 \\ \times \sqrt{(g_0 h)^{-1} [1 - 4g_0 h \omega^{-2} \pi^2 I^2 L^{-2} (1 - 4h^2 \pi^2 I^2 L^{-2} / 3)]} / 20. \end{aligned} \quad (21.45)$$

Если кубический член в (21.42) пренебрежимо мал, то параметрически-возбуждаемые волны возникают, если

$$4g_0 h \omega^{-2} \pi^2 I^2 L^{-2} (1 - 4h^2 \pi^2 I^2 L^{-2} / 3) = 1. \quad (21.46)$$

Учитывая приведенное выше, мы записываем следующее приближенное выражение для u_0 :

$$u_0 = \omega \pi^{-2} I^{-2} L^2, 0.5i(g_0 h)^{-1} \left(-16i^{-2} g_0 h \omega^{-2} \pi^2 I^2 L^{-2} (1 - 4h^2 \pi^2 I^2 L^{-2} / 3) \right) \left(\frac{1}{6} \div \left(\frac{1}{6} 6i^{-1} + i(i-1) \right) \right)^{0.5} \cos(\omega t / 2) \sin 2\pi x / L. \quad (21.47)$$

Полагая здесь $i = 1$ и 2 , мы находим перемещение для двух рассмотренных выше случаев. Решение (21.47) предсказывает как субгармонические ($i = 1$), так и гармонические ($i = 2$) волны. Эти результаты качественно соответствуют экспериментам.

Бегущие волны ряби. Легко видеть, что уравнение (21.49) полностью соответствует (21.1), поэтому методика анализа, развитая для (21.1), вполне применима и в случае быстро-переменных волн. Уравнение (21.49) записываем в переменных (21.4). Повторяя далее описанный в разделе 21.3.1 процесс и следуя работе [24], мы сводим решение нашей краевой задачи для быстро-переменных волн к интегрированию следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$J \ddot{r} + D_2 J + D_4 J + D_1 (J +)^2 + D_3 (J +)^3 + D_* J \dot{r} = d_*. \quad (21.48)$$

Здесь D_1, D_2, D_3, D_4 и D_* — некоторые постоянные [24]. Выражение для $J(r)$ принимается в виде:

$$J(r) = B \tanh(e \sin \zeta_-) \cos^k \zeta_- + A \operatorname{sech}^2(e \sin \zeta_-) \cos^k \zeta_- + C \cos^z \zeta_-, \quad (21.49)$$

где $\zeta_- = \pi L^{-1} M(r + c_-)$, A, B, C, e , — неизвестные константы, k, K, z и M — целые числа, c_- — произвольная постоянная, L — длина. Мы не будем здесь обсуждать детально решение (21.49). Отметим только, что (21.49) описывает широкий круг явлений. Если $A = 0$, то оно описывает параметрически-возбуждаемые поверхностные волны с очень крутым (можно сказать разрывным) фронтом. Такие волны показаны на рис. 231 (с, d). Если $B = 0$, то (21.49) соответствует (21.27) и описывает параметрически-возбуждаемые солитоны и осциллоны. Дополнительно решение (21.49) будет обсуждаться в разделе 23.4.

Используя (21.49) и (21.2) и полагая $B = 0, K = z = 2$, можно записать сумму:

$$\eta = -h(u_0)_x + h \left\{ A \operatorname{sech}^2 [e \sin \pi L^{-1} M^{-1}(a - x + c_-)] + C \right\} \cos^2 \pi L^{-1} M^{-1}(a - x + c_-) + h \left\{ A \operatorname{sech}^2 [e \sin \pi L^{-1} M^{-1}(a + x + c_+)] + C \right\} \cos^2 \pi L^{-1} M^{-1}(a + x + c_+). \quad (21.50)$$

$$\text{Напомним, что здесь } a = a(t). \text{ В частности, } a = \frac{\sqrt{3} \hbar m}{\omega} \left(\sin \frac{\omega t}{m} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\omega t}{m} \right),$$

если $n = 6$ в (21.35). Патены, представленные на рис. 242, рассчитаны на основе формулы (21.50) [24]. Таким образом, наше исследование несколько прояс-

нило природу возбуждения необычайных волн в экспериментах [30]. Как уже отмечалось, необычайные волны возникают при возникновении горизонтально осциллирующих солитонов или осцилонов на поверхности параметрически-возбуждаемых гладких гармонических стоячих волн.

Замечание 1. Конечно, в общем случае, используемое здесь предположение о взаимной независимости волн u_0 и волн ряби не справедливо. Если его не принимать, то наше рассмотрение существенно усложняется.

Замечание 2. В общем говоря, результаты этого раздела справедливы только там, где выполняется условие локального резонанса (21.13). Вне указанных областей решение нам не известно. Однако полагаем, что там усиление должно сходить на нет. В силу сказанного можно полагать, что расчеты, представленные на рис. 232, описывают реальность, так как они описывают малые колебания волн ряби относительно фиксированных резонансных точек. В следующей главе мы продолжим обсуждение путей моделирования интересных результатов экспериментов, показанных на рис. 225, 241 и 243.

21.4. Анализ катастрофических волн Фарадея на воде

Истина — слишком тонкая материя, а наши инструменты слишком тупы, чтобы ими можно было прикоснуться к истине, не повредив ее.

Блез Паскаль

Выше мы провели ряд расчетов вертикально возбуждаемых волн, результаты которых, качественно, согласуются с экспериментом. Качественность этого согласия, в первую очередь, относится к волнам на воде, так как параметрически-возбуждаемая рябь на воде наблюдалась даже при слабом гармоническом возбуждении, при котором не может быть отрыва жидкого слоя от основания. Таким образом, стоит задача объяснить появление ряби в этом случае. При рассмотрении мы будем использовать алгоритм, несколько развивающий методы, изложенные в подразделах 21.3.1 и 21.3.3. В частности, имея в виду расчеты раздела 20.7, мы будем стараться показать влияние локализованных резонансов, кубичной и квадратичной нелинейностей.

Вводим переменные (21.4). После чего записываем уравнение (21.7) в виде:

$$4a_0^2 u_{rs} + a_{\pi} (u_r + u_s) = -3a_0^2 u_x u_{xx} + 6a_0^2 u_x^2 u_{xx}. \quad (21.51)$$

Здесь мы отбросили вязкие и дисперсионные члены. Рассматриваются высоко-нелинейные резонансные волны. Для них решение ищем в виде бегущих в разные стороны слабо-взаимодействующих локализованных волн. Взаимодействие проявляется только в линейных членах. В этом случае для каждой

бегущей волны исследование сводится к алгоритму, несколько обобщающему изложенный для однонаправленной волны в разделе 8.4 и главах 15 и 16. Принимается, что

$$u = J(r) - J(s) + \bar{J}(r) - \bar{J}(s). \quad (21.52)$$

Здесь волны $J(r)$ и $J(s)$ определяют линейное решение. Предполагается, что оно известно. $\bar{J}(r)$ и $\bar{J}(s)$ — неизвестные нелинейные составляющие волны. В этом случае уравнение (21.51) дает

$$a_{rr}(J_r + \bar{J}_r - J_s - \bar{J}_s) = -3a_0^2 u_x u_{xx} + 6a_0^2 u_x^2 u_{xx}. \quad (21.53)$$

Можно видеть, что это уравнение вырождается в точках, где

$$\bar{J}_r = \bar{J}_s. \quad (21.54)$$

Эти точки назовем точками *локального* резонанса. Обозначим эти точки как x_0 . Вблизи этих точек справедливы следующие разложения в ряд Тейлора:

$$\bar{J}_s(a + x_0 + x_v) = \bar{J}_s(a + x_0) + x_v \bar{J}_{ss}(a + x_0) + \dots, \quad (21.55)$$

$$\bar{J}_r(a - x_0 - x_v) = \bar{J}_r(a - x_0) - x_v \bar{J}_{rr}(a - x_0) + \dots. \quad (21.56)$$

Здесь x_v — малое возмущение координаты относительно точки x_0 . Рассмотрим разность $\bar{J}_r - \bar{J}_s$ в (21.53), используя (21.55) и (21.56). Она дает

$$\bar{J}_r - \bar{J}_s = -x_v [\bar{J}_{rr}(a - x_0) + \bar{J}_{ss}(a + x_0)]. \quad (21.57)$$

Таким образом, рассматривая вблизи резонанса линейные члены в (21.53), учитываем малое отличие волн $\bar{J}_s(a + x)$ и $\bar{J}_r(a - x)$. Таким же образом оцениваем в (21.53) члены, содержащие $J_s(a + x)$ и $J_r(a - x)$. Напомним, что согласно нашему допущению противоположно бегущие волны нелинейно не взаимодействуют. В этом случае вблизи точек локального резонанса уравнение (21.53) дает

$$\begin{aligned} -x_v a_{rr}(J_{rr} + J_{ss}) - x_v a_{rr}(\bar{J}_{rr} + \bar{J}_{ss}) &= 3a_0^2 (J + \bar{J})_r (J + \bar{J})_{rr} + 6a_0^2 (J + \bar{J})_r^2 (J + \bar{J})_{rr} - \\ &- 3a_0^2 (J + \bar{J})_s (J + \bar{J})_{ss} + 6a_0^2 (J + \bar{J})_s^2 (J + \bar{J})_{ss}. \end{aligned} \quad (21.58)$$

В резонансной точке квадратичные члены уничтожают друг друга. Однако при отходе от этой точки эти члены начинают проявлять себя. Мы примем, что квадратичные члены дают приблизительно $3a_0^2 J_r J_{rr} - 3a_0^2 J_s J_{ss}$. Рассматривая далее эти члены будем учитывать разложения вида (21.55) и (21.56). В результате уравнение (21.58) приводится к виду:

$$\begin{aligned} -x_v a_{rr}(J_{rr} + J_{ss}) - x_v a_{rr}(\bar{J}_{rr} + \bar{J}_{ss}) &= -3a_0^2 x_v (J_{rr}^2 + J_r J_{rrr}) - 3a_0^2 x_v (J_{ss}^2 + J_s J_{sss}) + \\ &+ 6a_0^2 (J + \bar{J})_r^2 (J + \bar{J})_{rr} + 6a_0^2 (J + \bar{J})_s^2 (J + \bar{J})_{ss}. \end{aligned} \quad (21.59)$$

Рассмотрим волну $\bar{J}_r$. Пусть ее определяет уравнение

$$-x_v a_{rr} J_{rr} - x_v a_{rr} \bar{J}_{rr} = 6a_0^2 (J + \bar{J})_r^2 (J + \bar{J})_{rr} - 3a_0^2 x_v (J_{rr}^2 + J_r J_{rrr}). \quad (21.60)$$

После интегрирования (21.60) дает

$$\begin{aligned} & \bar{J}_r^3 + 3J_r \bar{J}_r^2 + 3J_r^2 \bar{J}_r + 0.5 \cancel{g}_v a_0^{-2} a_u \bar{J}_{rr} dr = \\ & = 0.5 \cancel{g}_v a_0^{-2} (-a_u J_{rr} + 3J_{rr}^2 + 3J_r J_{rrr}) dr - J_r^3 + 0.5 a_0^{-2} C. \end{aligned} \quad (21.61)$$

Анализ полученного уравнения затрудняется входящими в него интегралами. Вычислить их, в общем случае, мы не можем. Несмотря на это, уравнение (21.61) может быть полезно, так как дает качественное представление о виде уравнений, которые могут описать высоко-нелинейные волны Фарадея. Уравнение, аналогичное (21.61), имеет место и для волны $\bar{J}_s$. Используя эти уравнения, попытаемся качественно описать экспериментальные данные, представленные на рис. 225, 241 и 242.

Величина x_v аппроксимируется как

$$x_8 = [(x - L/2)^2]^{0.5}. \quad (21.62)$$

Используя приведенные в [30] данные, запишем для вертикального ускорения дна контейнера следующее выражение: $16\pi^2 \omega^2 9 \cos[4\pi\omega(t - t_1)]$, здесь t_1 — сдвиг по фазе. Затем следуя (21.33) найдем, что

$$a(t) \approx \sqrt{g_0 h} \left\{ t + 2\pi\omega 9 g_0^{-1} \sin[4\pi\omega(t - t_1)] \right\},$$

здесь g_0 — гравитационное ускорение (2.4), $9 = 0.0046$ м — амплитуда вертикальных перемещений контейнера в экспериментах, $\omega = 1.6$ сек⁻¹. После чего находим

$$a_u \approx -32\sqrt{g_0 h} \gamma \pi^3 \omega^3 g_0^{-1} \sin[4\pi\omega(t - t_1)]. \quad (21.63)$$

Кроме этого a_0^2 & gh & $3\text{ м}^2\text{сек}^{-2}$. Линейные бегущие волны записываем так: $J_r = l \sin 2\pi(\omega t - x/L)$, $J_s = l \sin 2\pi(\omega t + x/L)$. Теперь найдем приближенно l . Так как максимальная величина $\eta \approx -hu_x$ равна приблизительно 0.046м, то $l \approx 0.075$ м. При оценке параметров волн не учитываем влияние вибраций контейнера на амплитуду и скорость волн. Мы имеем в (21.63) сдвиг по фазе t_1 . Он призван учесть разницу в ускорениях, действующих на дно контейнера и поверхность жидкости. Как следующий шаг радикального упрощения задачи будем рассматривать время и координату в (21.61) как параметры. В результате моделирование экспериментов [30] свелось к решению уравнений вида:

$$\begin{aligned} & \bar{J}_r^3 + 3l \sin 2\pi(\omega t - x/L) \bar{J}_r^2 + 3l^2 \sin^2 2\pi(\omega t - x/L) \bar{J}_r + \\ & + 0.5[(x - L/2)^2]^{0.5} a_0^{-2} a_u \bar{J}_r = -0.5[(x - L/2)^2]^{0.5} a_0^{-2} a_u J_r + \\ & + 1.5[(x - L/2)^2]^{0.5} \pi l^2 \sin 4\pi(\omega t - x/L) - J_r^3. \end{aligned} \quad (21.64)$$

Здесь $C = 0$. В аналогичном виде записывается уравнение для $\bar{J}_s$. Последние уравнения вполне подобны расчетной модели (20.44).

Приведенная теория позволяет найти u_x и рассчитать резонансные волны Фарадея. Теперь учтем то, что фаза возбуждаемых в резонансной полосе (вокруг середины контейнера) волн может сильно отличаться от фазы возбуждающей волны (см. подраздел 12.4.2). Мы учитывали это при изучении катастрофических волн на поверхности океана (см. (15.4), (15.14) и (15.15)). Используя указанный опыт, полагаем, что линейная составляющая волны имеет сдвиг относительно нелинейной составляющей. Примем грубо, что этот сдвиг постоянен и равен π . Тогда мы имеем выражение

$$u_x = -l \sin[2\pi(\omega t - x / L) + \pi] - l \sin[2\pi(\omega t + x / L) + \pi] - \bar{J}_r(r) - \bar{J}_r(s). \quad (21.65)$$

Результаты расчетов, основанных на формуле $\eta \approx -hu_x$ (6.75) и (21.64), (21.65), показаны на рис. 244 (раздел 21.2). Было принято, что для левой стороны уравнения (21.64) $t_1 = 0$, а для правой стороны $t_1 = 0.08$. Такой сдвиг ускорений позволил несколько улучшить согласие расчетов с экспериментом. Видно, что теоретические кривые качественно описывают центральные, резонансные, участки профилей волн, показанных на рис. 241. Собственно говоря, только на это и претендуют уравнение (21.64) и теория данного раздела.

Следующий этап в исследовании связан с использованием уточненной формулы для η :

$$\eta \approx h(-u_x + u_x^2 - u_x^3). \quad (21.66)$$

Результаты уточненных расчетов приведены на рис. 244а. Однако оказалось, что учет нелинейных составляющих в (21.66) ухудшил согласие расчетов с экспериментом. Возможно это связано с тем, что использование (21.66) уводит нас далеко за рамки справедливости используемой здесь теории длинных волн, которая сугубо приближенно описывает рассматриваемые здесь эксперименты. Помимо этого читатель легко проследит те существенные предположения, которые сопутствовали выводам уравнений (21.64) и (21.65). Кроме этого не учтено изменение трансрезонансного сдвига (фазы) по ширине резонансной полосы. Учет этого изменения позволял нам ранее (рис. 128, 134–138) более гладко состыковывать линейное и нелинейное решения на границах резонансной полосы. Мы пошли на упрощающие предположения, не выбрасывая при этом фундаментальную идею о локальном резонансе, чтобы максимально ясно показать, что наблюдаемая в экспериментах сложная эволюция волн определяется локальным резонансом, имеющим место в центре контейнера. Именно учет резонансного феномена позволил, в целом, правильно описать экспериментальные данные рис. 225, 241 и 243.

Таким образом, получены кубически-нелинейные алгебраические уравнения вида (21.61), (21.64) с переменными коэффициентами, описывающие некоторые удивительные волны Фарадея. Исследованию подобных уравнений мы уделили выше в книге много места. Варианты этих уравнений качественно описывают множество явлений, начиная с цунами и океанских катастрофических волн, и кончая поверхностными высоко-нелинейными волнами в конечных резонаторах (см. также [3–5, 24–26, 39–41, 46, 47, 57]).

Уравнения вида (21.61) имеют много членов, каждый из которых, видимо, ответственен за определенный эффект. Оценка вклада каждого члена в конечную волновую картину представляет несомненный интерес. Как пример возможности подобной оценки, рассмотрим следующие сильно упрощенные варианты уравнения (21.64):

$$\bar{J}_r^3 + 0.5[(x - L/2)^2]^{0.5} a_0^{-2} a_u \bar{J}_r + J_r^3 = 0, \quad (21.66a)$$

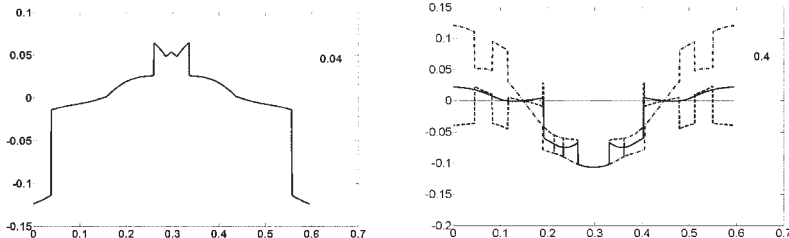
$$\bar{J}_s^3 + 0.5[(x - L/2)^2]^{0.5} a_0^{-2} a_u \bar{J}_s + J_s^3 = 0. \quad (21.66b)$$

Результаты расчетов для случая $t_1 = 0$ представлены на рис. 244b. Видно, что расчеты для центральной, резонансной, области контейнера достаточно правильно описывают профили волн рис. 241. Это можно сказать и об областях, примыкающих к концам контейнера, если там принять наиболее благоприятные для теории решения уравнений (21.66a) и (21.66b). Особый интерес представляют грибовидные волны, брызги и кратеры. Формы последних можно сравнить с представленными ранее на рис. 228 и 229.

В заключение исследования рассмотрим возможность модификации уравнения (21.64), так чтобы улучшить расчеты рис. 244–244b. Имея это в виду, мы запишем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \bar{J}_r^3 + 3l \sin 2\pi(\omega t - x/L) \bar{J}_r^2 + 3l^2 \sin^2 2\pi(\omega t - x/L) \bar{J}_r + \\ & + 460[(x - L/2)^2]^{0.5} \omega \gamma \cos(4\pi\omega t) \bar{J}_r = \\ & = -46[(x - L/2)^2]^{0.5} \omega \gamma \cos(4\pi\omega t) J_r - l^3 \sin^3 2\pi(\omega t - x/L). \end{aligned} \quad (21.66c)$$

Результаты расчетов волн Фарадея, основанных на (21.66c), (21.65) и формуле $\eta \approx -hu_x$, представлены ниже на рис. 244с. При расчетах принимали, что $t_1 = 0$.



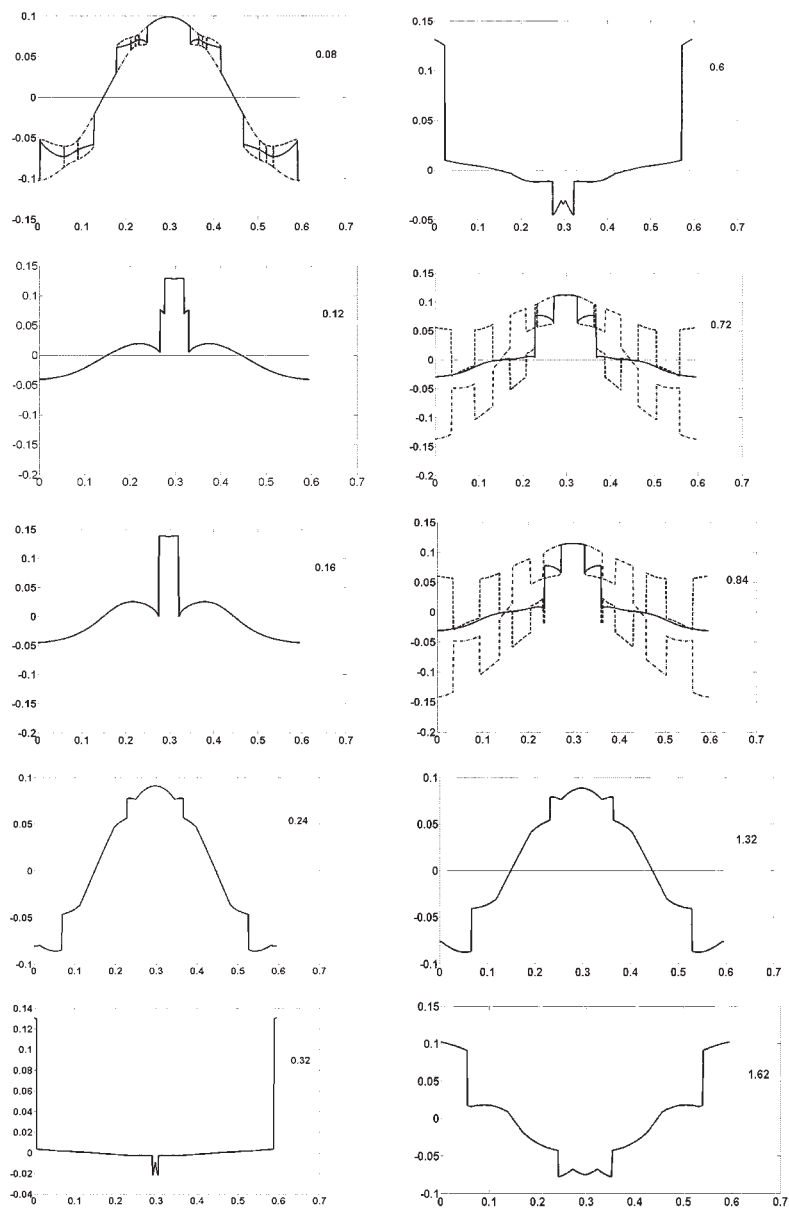


Рис. 244с. Волновые эпюры, соответствующие показанным на рис. 241. Эпюры рассчитаны согласно алгебраическому кубическому уравнению (21.66с).

Имеется качественное согласие рассчитанных эпюр и волновых профилей, показанных на рис. 241. Можно даже утверждать, что в некоторых отношениях согласие с экспериментом лучше, чем у рис. 244–244b. Главное улучшение в том, что профили рис. 244с описывают данные экспериментов почти по всей длине контейнера. В некоторых случаях исключением являются окрестности краев. Это подтверждает мысль, что аппроксимация резонансной зоны выражением (21.62) достаточно хорошо описывает реальность.

После всех расчетов, представленных на рис. 232, 237, 238, 239, 242 и 244–244с, автор не может не выразить удивления тому, что развитая теория волн Фарадея, основанная на нескольких сильных предположениях, в определенной мере описывает данные экспериментов как для гранулированных волн, так и для волн на воде. Действительно, развитая теория включает теорию длинных волн, которая не всегда соответствует параметрам рассмотренных экспериментов, а также сугубо приближенные аппроксимации в областях локальных резонансов. Напомним, что, строго говоря, используемые уравнения в какой-то мере справедливы только в резонансных точках. Определенное согласие с экспериментами расчетов, основанных на теории раздела 21.3 и заметно отличающихся управляющих уравнениях (21.64), (21.66a), (21.66b) и (21.66с), мы связываем с тем, что основная идея расчетов — существование локализованных резонансов — правильна. Вместе с тем в случае волн на воде расчеты показывают необходимость учета как взаимодействия волн $\bar{J}_r$ и $\bar{J}_s$, так и более точного учета вынуждающих и параметрических членов в управляющих уравнениях.

Отметим также, что данные наших расчетов качественно соответствуют некоторым экспериментам, описанным в [117], хотя наши расчетные параметры отличаются от экспериментальных параметров в [117].

21.5. Локально-справедливая теория вертикально-возбуждаемых резонансных волн

Страх перед возможностью ошибиться не
должен отвращать нас от поисков истины.

Клод Гельвеций

Используемые в книге методы анализа одномерных волн в некоторых случаях могут быть распространены на двухмерные параметрически-возбуждаемые волны. Чтобы иллюстрировать эту мысль, рассмотрим плоские волны, распространяющиеся по поверхности жидкости.

Уравнение, описывающее эти волны, запишем в следующем виде [4, 50]:

$$\eta_{tt} - gh\nabla^2\eta = 1.5g\nabla^2\eta^2. \quad (21.67)$$

Пусть в (21.67) $g = g_0 + g_d$ (5.4). Далее положим, что

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}. \quad (21.68)$$

Слабо-нелинейные волны. В этом случае мы принимаем, что $\eta^{(1)} \neq \eta^{(2)}$. Выражение (21.68) подставляется в (21.67). Затем величины третьего порядка отбрасываются. В результате мы имеем:

$$\eta_{tt}^{(1)} - gh\nabla^2 \eta^{(1)} = -\eta_{tt}^{(2)} + gh\nabla^2 \eta^{(2)} + 1.5g\nabla^2 \eta^{(1)2}. \quad (21.69)$$

Введем новые переменные:

$$r = \alpha(t) - k_1 x - k_2 y, \quad s = \alpha(t) + k_1 x + k_2 y, \quad (21.70)$$

где мы полагаем, что

$$a_t = \sqrt{gh} \quad \text{и} \quad 1 = k_1^2 + k_2^2. \quad (21.71)$$

Используя (21.70) и (21.71), переписываем уравнение (21.69) в следующем виде:

$$\begin{aligned} 4a_t^2 \eta_{rs}^{(1)} + a_{tt}(\eta_r^{(1)} + \eta_s^{(1)}) = \\ = -4a_t^2 \eta_{rs}^{(2)} - a_{tt}(\eta_r^{(2)} + \eta_s^{(2)}) + 1.5g\nabla^2 \eta^{(1)2}. \end{aligned} \quad (21.72)$$

Далее мы будем строить периодические решения, справедливые только в окрестности точек, где

$$\eta_r^{(1)} = -\eta_s^{(1)}. \quad (21.73)$$

Автор рассматривает (21.73) как условия резонансного усиления волн. Учитывая (21.73) и приравняв в (21.72) члены одинакового порядка, мы получим два уравнения. Первое уравнение дает

$$\eta^{(1)} = J(r) + j(s). \quad (21.74)$$

Второе уравнение имеет вид:

$$4a_t^2 \eta_{rs}^{(2)} + a_{tt}(\eta_r^{(2)} + \eta_s^{(2)}) = \frac{3}{2}g(J_r^2 + j_s^2). \quad (21.75)$$

Здесь время рассматриваем как параметр, тогда интеграл уравнения (21.75) можно записать так:

$$\left[1 + \frac{1}{2}a_{tt}\alpha(t)a_t^{-2}(s+r)\right]\eta^{(2)} = J_*(r) + j_*(s) + \frac{3}{8}h^{-1}(sJ_r^2 + rj_s^2). \quad (21.76)$$

Это решение содержит члены, явно зависящие от времени. Чтобы избавиться от этого, выполняем стандартную для нас процедуру преобразования вековых членов. В результате получим:

$$\left[1 + \frac{1}{2}a_{tt}\alpha(t)a_t^{-2}(s+r)\right]\eta^{(2)} = J_2(r) + j_2(s) + \frac{3}{8}(s-r)h^{-1}(J_r^2 - j_s^2). \quad (21.77)$$

Теперь мы можем записать следующее приближенное решение для (21.67):

$$\eta = J + j + \left[1 + \frac{1}{2} a_{rr} a(t) a_r^{-2} (s + r) \right]^{-1} 2 \times \left[J_2(r) + j_2(s) + \frac{3}{4} h^{-1} (k_1 x + k_2 y) (J_r^2 - j_s^2) \right]. \quad (21.78)$$

Решение (21.78) можно рассматривать как некоторый аналог выражений, полученных в начале главы 9. При выводе (21.78) мы положили члены $J_2(r)$ и $j_2(s)$ малыми. Решение (21.78) справедливо, когда имеем (21.71) и лишь в областях, где выполняется условие (21.73). Несмотря на эти ограничения, мы надеемся, что это решение может описать качественно некоторые волны и патены, возбуждаемые в двухмерных резонаторах, например, показанные на рис. 231, 233 234 и 239.

Резонансные катастрофические волны. Рассматривая эти волны, следуем разделу 21.4. Полагаем, что $\eta^{(1)}$ & $\eta^{(2)}$. Выражение для $\eta^{(1)}$ (21.74) не меняется. В отличие от раздела 21.4 рассматриваем только случай точного локального резонанса, когда имеет место (21.73). Учитывая это, записываем уравнение для $\eta^{(2)}$, сохраняя все члены, отброшенные в (21.72):

$$4a_r^2 \eta_{rs}^{(2)} + a_{rr} (\eta_r^{(2)} + \eta_s^{(2)}) = 15g \nabla^2 \eta^{(1)^2} + 3g \nabla^2 (\eta^{(1)} \eta^{(2)}) + 15g \nabla^2 \eta^{(2)^2}. \quad (21.79)$$

Далее мы принимаем, что $\eta^{(2)}$ является суммой волн:

$$\eta^{(2)} = \bar{J}(r) + \bar{j}(s), \quad (21.80)$$

которые, несмотря на их нелинейность, не взаимодействуют. Ускорение a_{rr} считаем настолько малым, что в окрестности резонанса член $a_{rr} (\eta_r^{(2)} + \eta_s^{(2)})$ в (21.79) пренебрежимо мал. С учетом сказанного уравнение для $\bar{J}(r)$ принимает вид:

$$J_{rr}^2 + \bar{J}_{rr}^2 = 0. \quad (21.81)$$

После интегрирования имеем:

$$\bar{J}^2 + J^2 = C_1 r + C_2. \quad (21.82)$$

Пусть $C_1 = 0$, тогда

$$\bar{J}^2 + J^2 = C_2. \quad (21.83)$$

Видно, что в какой-то мере это уравнение аналогично уравнениям, описывающим ударные волны, возбуждаемые на воде (см. разделы 8.5, 8.6, 9.4, 9.5, 13.2). Поясним эту мысль. Пусть в (21.83) $J = A \sin \omega r$ и $C_2 = A$, тогда (21.70) дает

$$\bar{J} = \pm A \cos \omega r. \quad (21.84)$$

Это решение можно интерпретировать как поверхностную ударную волну (см. (13.6)). В отличие от (13.6) последнее решение описывает двухмерную, вертикально-возбуждаемую волну. Возможно, в определенной мере, решение (21.84) описывает ударные волны, показанные на рис. 236(с, d). Выражения (21.68) и (21.74), (21.80) теперь можно записать так:

$$\eta = A(\sin \omega r + \sin \omega s) (\cos \omega r + \cos \omega s). \quad (21.85)$$

Это выражение может быть справедливо вблизи некоторых областей поверхности, где выполняется резонансное условие (21.73). В общем случае вне этих областей решение нам не известно. Однако полагаем, что там усиления волн не может быть и, следовательно, для качественных расчетов, вне указанных областей, можно использовать чисто линейные решения вида $\eta = A(\sin \omega r + \sin \omega s)$.

Отметим, что согласно (21.85) амплитуда волн η может достигать $2A$ и более. Таким образом, в некоторых случаях вертикальное возбуждение может генерировать катастрофические волны с удвоенной амплитудой и разрывными фронтами (рис. 236(с, d)). Сумма распространяющихся в разные направления волн, имеющая вид (21.85), может описать патены и слабо-осциллирующие, почти стоячие волны на поверхностях различных вертикально-возбуждаемых сред.

21.6. Сильно-нелинейные волны, вихри и направления дальнейших исследований

Душу сражает, как громом, проклятие:
Творческий разум осилил — убил.
И замыкаю я в клетку холодную
Легкую, добрую птицу свободную,
Птицу, хотевшую смерть унести,
Птицу, летевшую душу спасти.

А. Блок

Мы рассмотрели высоко-нелинейные необычайные поверхностные волновые явления, при которых скорость волн рэби меняется в широких пределах. Можно задаться вопросом — имеются ли подобные сильные вариации скорости распространения возмущений в других средах. В [3] подчеркивается, что скорость света резко уменьшается в Бозе-Эйнштейн конденсате (БЭК). Многие ученые полагают, что сверххолодный газ (БЭК) — модель плазмы ранней Вселенной [51, 52]. Действительно, скорость света в плазме ранней Вселенной тоже мала. А если развивать нашу мысль, то вибрирующий слой раздела двух

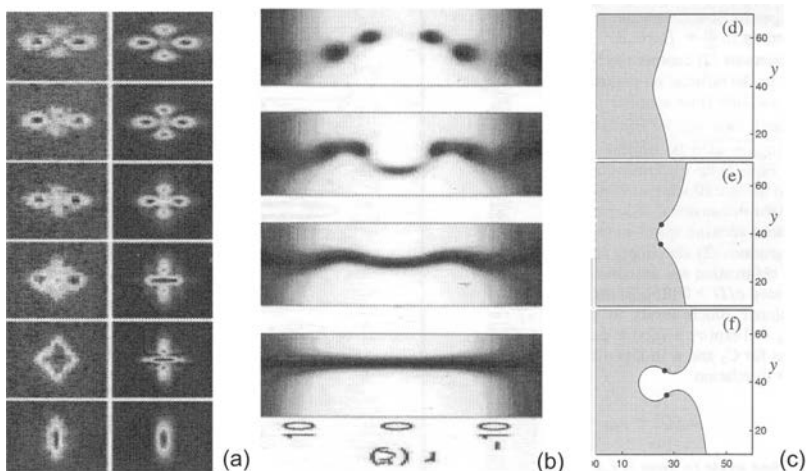


Рис. 245. Примеры развития первоначально малых возмущений в сложные патены (a) [53] и вихри (b), (c) [54, 55].

сред, сверххолодный газ и плазма ранней Вселенной в плане волновых свойств могут быть в чем-то подобными. Конечно, волновые формы, представленные выше, малая толика всех возможностей Природы. В частности, «эластика» формы могут эволюционировать в вихри.

Пример интересной эволюции вытянутого эллипсоидального возмущения в БЭК показан на рис. 245a [53]. Видно, что в процессе эволюции возникают формы, напоминающие некоторые формы «эластика» (рис. 212–214) и патены, представленные на рис. 233. Большой интерес вызывает эволюция волн в вихри. Эволюция «эластика» форм в вихри исследована в [5, 56]. На этой эволюции мы остановимся в следующей главе. Здесь дадим только два примера этой эволюции. Сначала остановимся на примере развития линейного возмущения в БЭК (рис. 245b) [54]. Там первоначально прямая линия искажается в гармонично, затем появляется складка, напоминающая возникающую в эксперименте Тэйлора (рис. 208). Последняя далее распадается на вихри (точки на рис. 245b)). Рассмотрим другой пример. Решение уравнения Гинзбурга-Ландау показало, что «эластика» формы (или грибовидные волны), имеющие на своей поверхности вихри, которые выделены точками на рис. 245(c) [55], могут возникать в процессе развития начального возмущения (рис. 245 (d)) на поверхности раздела двух сред.

Все это в контексте нашего исследования не может не привести к мысли, что некоторые «эластика» формы могут эволюционировать в вихри. Это может иметь место как на неустойчивой поверхности раздела сред, так и в БЭК

и плазме ранней Вселенной, т.е. везде, где развитие волн определяется очень высокой нелинейностью. В случае Вселенной эти вихри можно рассматривать как зародыши наблюдаемых сейчас спиралевидных галактик.

Напомним, что по Декарту, все небесные тела образовались в результате вихревых движений, происходивших в первоначально однородном мировом эфире. Вихревая модель Декарта, которую он сформулировал задолго до того, как человечество узнало о галактиках, сейчас переживает, на новой научной основе, эпоху возрождения, хотя и ранее ее не забывали. Так, Пуанкаре говорил в 1911 г.: «Несмотря на многочисленные возражения, выдвигавшиеся против нее, несмотря на все новые поразительные открытия в астрономии, способные удивить ее творцов, вихревая космогония остается все еще с нами». Действительно, по-видимому, вихрь — следующий по распространенности после волн динамический элемент Вселенной, а в масштабах Вселенной, возможно, наиболее распространенный [52].

Таким образом, проведенное выше исследование показывает, что в окрестности резонансов возникают сильно-локализованные формы осцилонов и «эластики». Как эти катастрофические волны эволюционируют в вихри? Возможно ли, что на формирование форм и патенов, существующих в Природе, оказывают влияние вихри, возникающие при трансрезонансной эволюции волн? Возможно ли, что спиралевидные галактики, плавающие в безграничных просторах Вселенной, образовались когда-то при трансрезонансной эволюции катастрофических волн в вихри?

22. Эволюция волн в вихри

Изучая историю науки, мы замечаем два явления, которые можно назвать взаимно противоположными: то за кажущейся сложностью скрывается простота, то, напротив, видимая простота на самом деле таит в себе чрезвычайную сложность.

Пуанкаре

22.1. Введение

Зачем крутится ветр...

Пушкин

В главе 20 мы рассмотрели вынужденные волны. Можно видеть, что представленный там материал является распространением результатов глав 13 и 14 книги на случай учета кубической нелинейности. В главе 21 исследовались параметрически-возбуждаемые волны. Теперь мы рассмотрим самовозбуждаемые катастрофические волны.

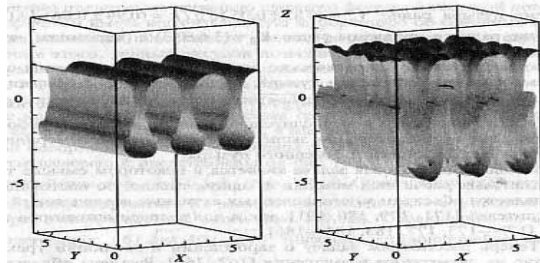


Рис. 246. Два момента эволюции поверхности раздела двух сред. Развитие гармонического возмущения (амплитуда 0.013) порождает «эластика» форму с амплитудой 2.5 (слева), которая затем трансформируется в трехмерную волновую турбулентность [57].

См. также рис. 97 и 205.

Таким образом, в этой главе мы продолжаем исследование плодотворности применимости развитого в частях II и III книги подхода к исследованию природных волновых катастрофических процессов, основанного на их анализе как самовозбуждающихся резонансных явлений. Мы также широко используем аналогии с целью исследования процесса эволюции волн в вихри. Примеры подобной эволюции уже приводились на рис. 204, 205 и 245(b,c). Рис. 246 дает представление о неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей, которая приводит к турбулизации поверхности. Видно, что «эластика» форма и грибо-

видные волны могут служить некоторым элементом этого процесса. Мы приводим еще рис. 247, который демонстрирует эволюцию малых возмущений, порождающих турбулентность.



Рис. 247. Картина эволюции возмущений на поверхности раздела двух течений жидкости.

В волновых процессах, подобных представленным на рис. 246 и 247, начальное возмущение эволюционирует в опрокидывающиеся грибовидные структуры, которые порождают вихри. Имеется огромное количество исследований, посвященных этому и смежным вопросам. Интересно, что левая картина рис. 246 напоминает волны, возникающие в первые моменты неустойчивости Рихтмайера-Мешкова [31] (рис. 97). Действительно, возникновение «эластика» формы, преобразующейся в вихрь, возможно как при импульсных, так и при вибрационных периодических процессах. Примеры этого даны в [23, 58]. В этих работах исследовались резонансные колебания газа в трубах. Оказалось, что в случае учета кубической нелинейности при некоторых частотах возбуждения и параметрах трения «эластика» подобные колебания газа в трубах преобразуются в вихри.

Расчеты [58] показывают возможность своеобразного управления турбулентностью. Оказывается, можно так изменить параметры процесса, чтобы они оказались в точке, где происходит взрывообразное развитие турбулентности. Уходя из этой точки, мы заведомо подавляем турбулентность. Здесь имеется определенная аналогия с развитием океанских катастрофических волн, которые возвращаются к исходным параметрам, если волна уходит достаточно далеко за резонансную полосу.

Теоретические результаты, представленные на рис. 248, качественно соответствуют экспериментальным данным, полученным в [59], где изучалось возбуждение турбулентности в резонансной трубе, показанной внизу рис. 249. Волны возбуждались поршнем. Исследователи нашли, что периодическая волновая турбулентность может возникать в пристеночном слое (рис. 250).

Таким образом, мы проиллюстрировали некоторый сценарий эволюции волн в вихри. Интерес к подобным сценариям объясняется тем, что процесс возникновения катастрофических волн и их трансформации в вихри лежит в основе многих сценариев возникновения турбулентности. В нашем случае он выглядит так — гармоническое возмущение : слабо-нелинейные волны : опрокидывающиеся грибовидные волны («эластика» формы) : вихри : турбулентность.

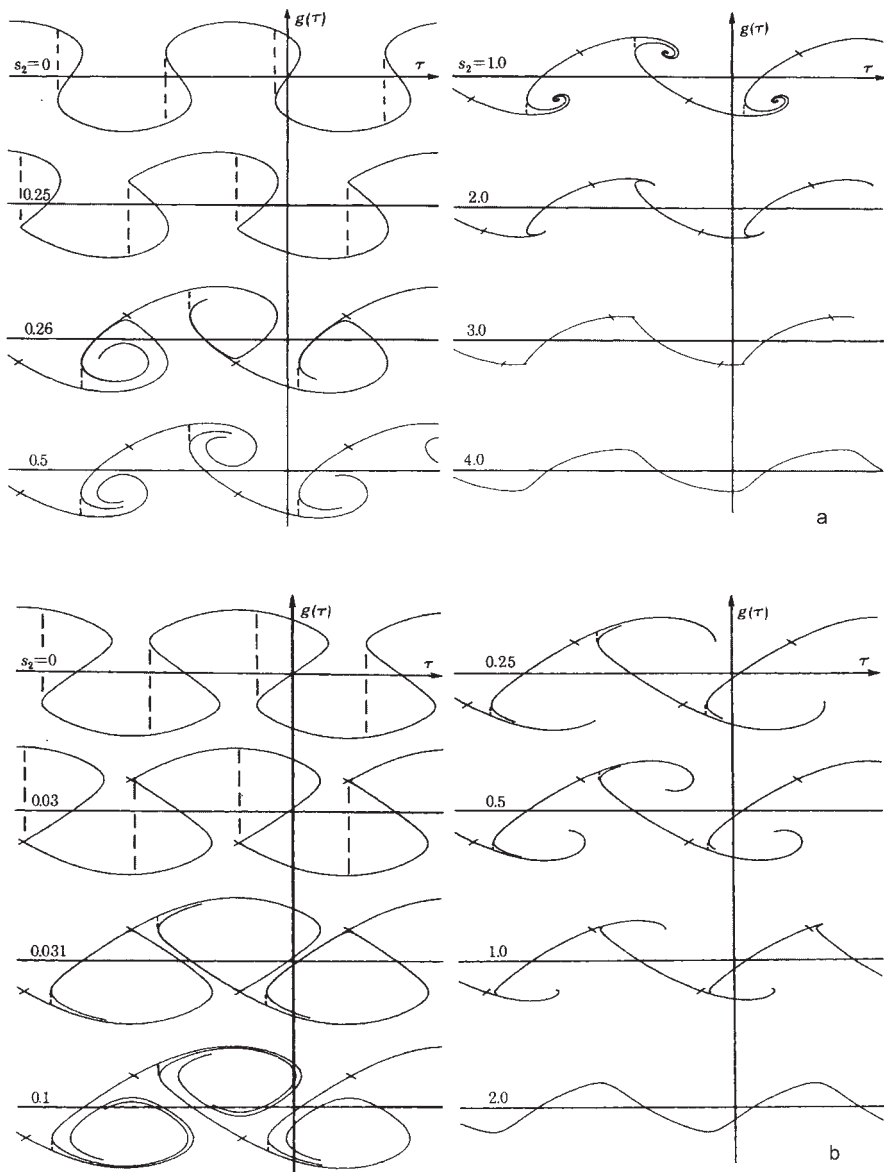


Рис. 248. Два примера трансрезонансной эволюции волн. В резонансной полосе гармоническая волна вначале преобразуется в столбообразные и грибовидные волны («эластика» формы), затем могут возникнуть вихревые структуры, которые при подходе к другой границе резонансной полосы вырождаются в слабо-нелинейные волны [58].

Хорошо известно, что турбулентность является одной из самых сложных областей исследования, которая связана с решением множества теоретических проблем. Ее детальное исследование — ключ ко многим прикладным и инженерным проблемам. Не менее она важна для моделирования трудно-наблюдаемых геофизических и астрофизических процессов. Однако, несмотря на более чем сто лет работы и многие важные достижения в этой области, исчерпывающей теории турбулентности еще нет. К этой ситуации еще вполне применимы слова, высказанные в 1932 году известным британским гидромехаником Ламбом (Hogase Lamb) «Я — старик, — сказал он на собрании Британской ассоциации развития науки (*British Association for the Advancement of Science*), — и когда я умру и попаду на небеса, то, надеюсь, найду там ответ на две проблемы. Одна — квантовая электродинамика, а другая — турбулентное движение жидкостей. И в том, что я получу ответ на первый вопрос, я довольно оптимистичен». [38]. И он оказался глубоко прав. Уже более полувека расчеты в квантовой электродинамике демонстрируют беспрецедентную точность, не сопоставимую с точностью какой-либо теории турбулентности.

Тем не менее, существует ряд теорий турбулентности, количественные предсказания которых вполне соответствуют практическим нуждам и которые

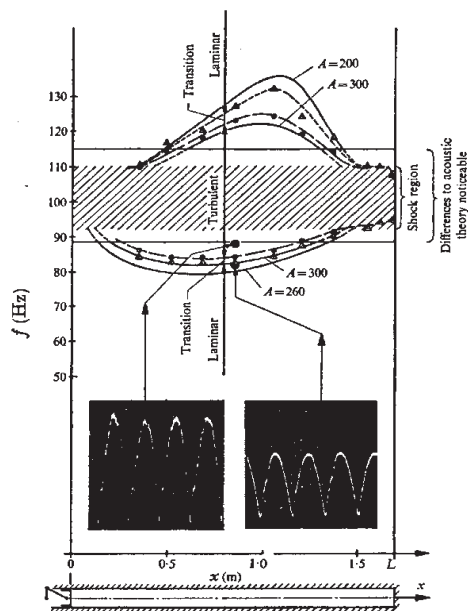


Рис. 249. Турбулентность, возникающая при некоторых частотах, лежащих в окрестности резонанса: треугольники определяют границы появления взрывной турбулентности. Кружки дают параметры взрывного развития турбулентности [59].

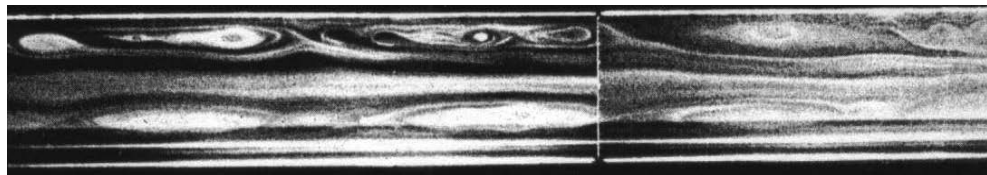


Рис. 250. Вихревая резонансная структура, исследованная Меркли и Томаном [59].

не оставили места непониманию причин возникновения и развития турбулентности [61–69]. Эти теории основаны обычно на комбинации классических уравнений течения жидкости и некоторых предположений, которые подсказаны экспериментами.

Самая важная особенность турбулентности связана с ее мелкомасштабной непредсказуемостью. Это вполне согласуется с точкой зрения Пуанкаре, согласно которой многие процессы естественного мира можно рассматривать как полностью непредсказуемые [71]. Эта глобальная идея, далеко выходящая за рамки математики, применима и к волновому движению. Как пример отметим, что согласно нелинейным решениям слабо-нелинейных волновых уравнений (см. раздел 9) любое изменение бегущей волны может вырасти до бесконечной величины за достаточно длительное время. Причем решение, которое вполне ясно демонстрирует подобное резонансное усиление волны, имеет достаточно простой вид.

Возможно, многие сильно-нелинейные непредсказуемые волновые явления Природы, которые кажутся противоинтуитивными, неожиданными и не понятными, могут быть объяснены как продукты различных волновых резонансов [3, 4] и могут быть связаны простыми математическими соотношениями. В частности, многие исследования показывают возможность появления «эластика»-подобных волн, которые эволюционируют в вихри. В этом плане автора особенно заинтересовали результаты Честера и Мозера (рис. 248). Возникло желание обобщить эти результаты на основе алгоритмов этой книги. Это желание реализуется в настоящей главе. Таким образом, в ней мы развиваем теорию главы 20 с целью исследования эволюции «эластика»-подобных волн в вихревые структуры. Интерес к подобной эволюции связан с описанием некоторых механизмов возникновения вихревых волн и турбулентности в различных средах и полях.

Исходными точками исследования являются предположения о решающем влиянии нелинейности и слабом, или нулевом, влиянии дисперсии на эволюцию катастрофических волн в вихри.

22.2. Самовозбуждаемые волны на поверхности раздела сред

Воображение так же важно для геометра, как для поэта в моменты вдохновения.

Даламбер

Слабо-нелинейные аналитические решения волнового уравнения получены в разделах 9.1 и 9.2. Они содержат вековые или явно зависящие от координаты члены, поэтому хорошо иллюстрируют возможность быстрого роста воз-

мущений, что нам демонстрируют эксперименты (см. рис. 204 и 247) и что является характерным для развития турбулентности. Однако, если начальное возмущение гладкое, то эти решения не описывают его эволюцию в грибовидную волну, а затем в вихрь, что также иногда характерно для зарождения волновой турбулентности. Вместе с тем эта эволюция иногда хорошо описывается простыми кубически-нелинейными уравнениями. Например, Честер и Мозер [58] использовали при расчетах эволюции волн в вихри (рис. 248) уравнение, которое запишем в виде:

$$-\sin \zeta = g^3 + 3R(2)^{-2/3} g + s_2 \frac{\partial g}{\partial t} |g| \zeta. \quad (22.1)$$

Здесь интеграл соответствует так называемой вихревой вязкости (*eddy viscosity*). Эволюцию грибовидных волн также хорошо описывают кубически-нелинейные алгебраические уравнения, рассмотренные в подразделе 8.5.2 и главах 20 и 21. Иногда с помощью этих уравнений удастся моделировать также появление вихрей. Для этого в работах [3–5, 57] использовались уравнения, которые в обобщенном виде можно записать так:

$$J_*^3 + 3R(2)^{-2/3} (J_* + J) = 0 \quad \text{или} \quad J_*^3 + 3R(2)^{-2/3} J_* + J = 0. \quad (22.2)$$

Здесь J_* — искомая бегущая волна, J — вынуждающая волна (начальное возмущение), а $R = R(a, t)$ — трансрезонансный параметр. Важно подчеркнуть, что он может зависеть как от координаты, так и от времени. Все сказанное приводит к мысли, что моделирование эволюции волн в вихри требует вывода уравнения, содержащего как высоко-нелинейные, так и быстрорастущие и сильно-зависящие от координаты члены. Это обеспечит как быстрый рост волн, так и их преобразование в грибовидные формы и, возможно, в вихри.

В этом разделе даются примеры вывода подобных уравнений. В качестве примера изучаемых физических систем рассмотрим два слоя, показанные на рис. 251. Начальная возмущающая волна распространяется в верхнем слое. Частицы в этой волне перемещаются относительно частиц нижнего слоя. Образование волновой турбулентности определяется различием в скорости частиц около поверхности контакта. Если амплитуда волны в верхнем слое мала, то она никак не возмущает поверхность раздела и никаких вихревых движений не воз-

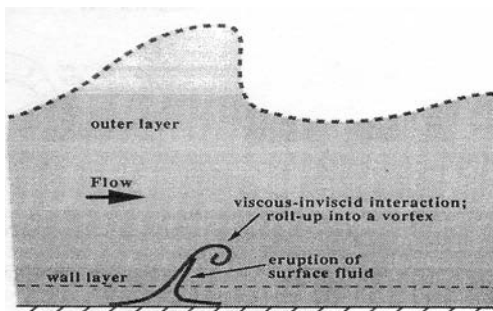


Рис. 251. Схема возникновения вихря в двухслойной системе (не в масштабе) [65].

никает. Если амплитуда волны является достаточно большой, то могут появиться вихри.

Уравнение, описывающее волнообразование на поверхности контакта двух жидкостей приведено в [70]

$$N_{\pi} - c_0^2 N_{xx} = \frac{1}{3} c_0^2 h_1 h_2 N_{xxxx} + (h_1 - h_2)(h_1 h_2)^{-1} (2N_t N_{xt} + c_0^2 N_x N_{xx}). \quad (22.2a)$$

Легко видеть, что это уравнение в случае однонаправленных бегущих волн является частным случаем уравнения (8.107), решению которого посвящен основной объем книги. Следовательно, на поверхности контакта могут возникать многие рассмотренные в книге катастрофические волны, описываемые квадратичной нелинейностью и слабой дисперсией. Однако (22.2a) не учитывает явно кубическую нелинейность. Поэтому при описании волн в двухслойной системе вместо (22.2a) будем использовать следующее модельное уравнение для горизонтальной компоненты волны

$$u_{\pi} - C^2 u_{aa} = \beta u_a u_{aa} + \beta_1 u_a^2 u_{aa}. \quad (22.3)$$

При рассмотрении (22.1) используем методику, изложенную в подразделе 8.4.1 и главе 9. Пусть

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} + U. \quad (22.4)$$

Тогда (22.2) можно представить как три следующих уравнения:

$$u_{\pi}^{(1)} - C^2 u_{aa}^{(1)} = 0, \quad (22.5a)$$

$$u_{\pi}^{(2)} - C^2 u_{aa}^{(2)} = \beta u_a^{(1)} u_{aa}^{(1)}, \quad (22.5b)$$

$$U_{\pi} - C^2 U_{aa} = \beta u_a^{(1)} (u^{(2)} + U)_{aa} + \beta (u^{(2)} + U)_a (u^{(1)} + u^{(2)} + U)_{aa} + \beta_1 (u^{(1)} + u^{(2)} + U)_a^2 (u^{(1)} + u^{(2)} + U)_{aa}. \quad (22.5c)$$

Уравнения (22.5a) и (22.5b) рассматривались в разделе 9.2. Там были введены координаты

$$r = Ct - a, \quad s = Ct + a. \quad (22.6)$$

Используя их и следуя разделу 9.2, находим первые два члена в (22.4):

$$\begin{aligned} u^{(1)} + u^{(2)} &= J(r) + j(s) + J_2(r) + j_2(s) - \\ &- \frac{1}{8} \beta C^{-2} (s J_r^2 - r j_s^2) + \frac{1}{4} \beta C^{-2} (j J_r + J j_s) \end{aligned} \quad (22.7)$$

или

$$\begin{aligned} u^{(1)} + u^{(2)} &= J(r) + j(s) + \bar{J}_2(r) + \bar{j}_2(s) - \\ &- \frac{1}{4} a \beta C^{-2} (J_r^2 + j_s^2) + \frac{1}{4} \beta C^{-2} (j J_r + J j_s). \end{aligned} \quad (22.7a)$$

Мы можем видеть, исходя из (22.7) и (22.7а), что в уравнении (22.5с) могут появиться сингулярно (резонансно) растущие члены. Рассмотрим их все нет возможности. Поэтому ограничимся грубо качественным исследованием. А для этого пойдем на радикальное упрощение уравнения (22.5с). Как первый шаг упрощения будем рассматривать волны, бегущие справа налево со скоростью $\hat{C}$, очень близкой C . В этом случае (22.5с) и (22.7а), после некоторых выкладок и игнорирования ряда членов, можно привести к следующему алгебраическому уравнению:

$$U_a^3 + \frac{3}{2}\beta\beta_1^{-1}U_a^2 - \frac{3}{4}a\beta_1^{-1}\beta^2C^{-2}J_{aa}U_a + 3\beta_1^{-1}(\beta J_a - \frac{1}{4}\beta^2C^{-2}J_a - \hat{C}^2 + C^2)U_a - \\ - \frac{3}{32}a^2\beta_1^{-1}\beta^3C^{-4}J_{aa}^2 - \frac{3}{4}a\beta_1^{-1}\beta^2C^{-2}J_aJ_{aa} + \frac{3}{8}\beta_1^{-1}\beta^3C^{-4}J_a^2 + \\ + \left(J - \frac{1}{4}a\beta C^{-2}J_r^2\right)_a^3 = \bar{C}. \quad (22.8)$$

Здесь $\bar{C}$ — постоянная интегрирования. Волна J_a рассматривается как начальное известное возмущение. В (22.8) оставлены члены, характеризующие важные аспекты задачи. В частности, оставлены некоторые члены, зависящие как от координаты, так и от возмущения J_a . Заметим, что в (22.8) имеем $J(Ct - a)$, в то время как $U(\hat{C}t - a)$. Однако различием аргументов будем пренебрегать, так как $\hat{C} \approx C$. Однако это различие очень важно для самого уравнения, а именно члена $3\beta_1^{-1}\left(\beta J_a - \frac{1}{4}\beta^2C^{-2}J_a - \hat{C}^2 + C^2\right)U_a$. Благодаря этому различию мы

можем, варьируя $\hat{C}$ в окрестности C , получать различные резонансные решения уравнения (22.8). Уравнение (22.8) обобщает (20.32). Мы надеемся, что уравнение вида (22.8) описывает некоторый круг волновых явлений, в частности, преобразование гармонических волн в вихревые структуры. Так как подобное преобразование — одно из фундаментальных свойств Природы, то аналогичное уравнение должно следовать и из других волновых уравнений.

Таким образом, мы показали, что уравнение (22.3) можно привести к кубическому алгебраическому уравнению, некоторые коэффициенты которого явно зависят от координаты. В общем случае подобное уравнение можно записать в следующем виде:

$$U_a^3 + A(a)U_a^2 + 2^{-2/3}R(a)U_a + 2^{-2/3}F = 0. \quad (22.9)$$

Здесь коэффициент $A(a)$ и трансрезонансный параметр $R = R(a)$ явно зависят от координаты, F — вынуждающий член. В целом, уравнение (22.9) соответствует уравнениям (22.2).

22.3. Катастрофические волны в потоках

... и я, сомнений нет,
Создам стихии все, животных, вихри, свет.

Вольтер

Продолжая исследование предыдущего раздела, рассмотрим уравнение (20.10), которое приближенно описывает волны и течения различных сплошных сред. В одномерном случае оно дает

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} + 2\varphi_x \varphi_{xt} + (X-1)\varphi_t \varphi_{xx} + \frac{1}{2}(X+1)\varphi_x^2 \varphi_{xx} = 0. \quad (22.10)$$

Пусть

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + U - u_0 x. \quad (22.11)$$

Здесь u_0 определяет осредненную постоянную скорость среды. Подставляем (22.11) в (22.10) и сводим исследование к анализу следующей системы уравнений:

$$\varphi_{tt}^{(1)} - c_0^2 \varphi_{xx}^{(1)} - 2u_0 \varphi_{xt}^{(1)} = 0, \quad (22.12)$$

$$\varphi_{tt}^{(2)} - c_0^2 \varphi_{xx}^{(2)} - 2u_0 \varphi_{xt}^{(2)} + 2\varphi_x^{(1)} \varphi_{xt}^{(1)} + (X-1)\varphi_t^{(1)} \varphi_{xx}^{(1)} = 0, \quad (22.13)$$

$$\begin{aligned} & U_{tt} - c_0^2 U_{xx} - 2u_0 U_{xt} + 2(\varphi^{(2)} + U)_x \varphi_{xt}^{(1)} + \\ & + 2(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + U)_x \varphi_{xt}^{(2)} + 2(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + U)_x U_{xt} + (X-1)[(\varphi^{(2)} + U)_t \varphi_{xx}^{(1)} + \\ & + (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + U)_t \varphi_{xx}^{(2)} + (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + U)_t U_{xx}] + \\ & + \frac{1}{2}(X+1)[(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + U)_x^2 \varphi_{xx}^{(1)} + (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + U)_x^2 \varphi_{xx}^{(2)} + \\ & + (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + U)_x^2 U_{xx}] = 0. \end{aligned} \quad (22.14)$$

Рассмотрим первые два уравнения, следуя методу, развитому в [74]. Введем новые переменные:

$$r = (C_* - u_0)t - x, \quad s = (C_* + u_0)t + x. \quad (22.15)$$

Здесь

$$C_*^2 = c_0^2 + u_0^2. \quad (22.16)$$

Используя (22.15) и следуя главе 9 при решении уравнений (22.12) и (22.13), получим следующие выражения:

$$\varphi^{(1)} = J(r) + j(s), \quad (22.16)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} = & J_2(r) + j_2(s) - \frac{1}{4}C_*^{-1}(X+1)J_r^2 x + \frac{1}{4}C_*^{-1}(X+1)j_s^2 x + \\ & + \frac{1}{48}C_*^{-2}[2(C_* - u_0) - (X-1)(C_* + u_0)]jJ_r + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}C_*^{-2}[2(C_*+u_0)-(X-1)(C_*-u_0)]Jj_s. \quad (22.17)$$

Если сохраняются вековые члены, то (22.17) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} = & J^*(r) + j^*(s) - \frac{1}{8}(c_* - u_0)c_*^{-2}(X+1)sJ_r^2 - \frac{1}{8}(c_* + u_0)c_*^{-2}(X+1)rj_s^2 + \\ & + c_*^{-2}\frac{1}{4}[2(c_* - u_0) - (X-1)(c_* + u_0)]jJ_r + \\ & + c_*^{-2}\frac{1}{4}[2(c_* + u_0) - (X-1)(c_* - u_0)]Jj_s. \end{aligned} \quad (22.17a)$$

Выражения (22.16)–(22.18) определяют коэффициенты уравнения (22.14). Последующая задача в его решении. Для этого рассмотрим однонаправленные волны U , скорость которых $\bar{C}_*$ очень близка разности $C_* - u_0$. Отбрасывая затем малые члены, запишем (22.14) в виде:

$$\begin{aligned} (\bar{C}_*^2 - c_0^2 + 2u_0\bar{C}_*)U_{xx} + (X+1)(c_* + u_0A)[U_x(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)})_x]_x + \\ + (X+1)(c_* + u_0A)U_xU_{xx} + \frac{1}{2}(X+1)(U_x)^2U_{xx} = \\ = -(X+1)(c_* + u_0A)(\varphi_x^{(2)}\varphi_x^{(1)})_x. \end{aligned} \quad (22.19)$$

После интегрирования имеем:

$$\begin{aligned} U_x^3 + 3(c_* + u_0A)U_x^2 + 6\{(X+1)^{-1}(\bar{C}_*^2 - c_0^2 + 2u_0\bar{C}_*) + \\ + (c_* + u_0A)(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)})_x\}U_x = -6(c_* + u_0A)\varphi_x^{(2)}\varphi_x^{(1)} + \bar{C}. \end{aligned} \quad (22.20)$$

Теперь рассмотрим вынуждающие функции в (22.20). Если мы принимаем во внимание только резонансные члены в (22.17), то

$$\varphi^{(2)} = J^*(r) + j^*(s) - \frac{1}{4}C_*^{-1}(X+1)J_r^2x + \frac{1}{4}C_*^{-1}(X+1)j_s^2x. \quad (22.21)$$

Для однонаправленной волны

$$\varphi^{(2)} = J^*(r) - \frac{1}{4}xC_*^{-1}(X+1)J_r^2. \quad (22.22)$$

Вносим (22.22) в (22.20), тогда

$$\begin{aligned} U_x^3 + 3(c_* + u_0A)U_x^2 + 6\{(X+1)^{-1}(\bar{C}_*^2 - c_0^2 + 2u_0\bar{C}_*) + \\ + (c_* + u_0A)\left[J - \frac{1}{4}C_*^{-1}(X+1)J_r^2x\right]_x\}U_x = \\ = \frac{3}{2}(c_* + u_0A)C_*^{-1}(X+1)(J_r^2x)_xJ_x + \bar{C}. \end{aligned} \quad (22.23)$$

Легко видеть, что уравнение (22.23) вполне аналогично (22.9). Соответственно, при одинаковых коэффициентах они имеют одинаковое решение. При соответствующих обозначениях и предположениях (22.23) может быть сведено к одному из уравнений (22.2), которое будет рассмотрено в следующем разделе.

Катастрофические волны, описываемые уравнениями (22.8) или (22.23), возникают, конечно, и в физических полях. Уравнение Клейна-Гордона будет рассмотрено в следующей главе.

Подчеркнем, что уравнения (22.8) и (22.23) имеют подобную структуру. Они содержат вынуждающие члены и переменные коэффициенты при некоторых членах. Все эти уравнения могут быть сведены к уравнениям, описывающим катастрофические резонансные волны, рассмотренным в частях II и III и главах 20, 21 книги. Мы здесь на этих случаях дополнительно не останавливаемся, так как нас здесь интересуют эволюция волн в вихри. Поэтому, рассматривая эту эволюцию, мы иногда не будем учитывать вклада в конечную сумму волнового поля иницирующих волн.

Замечание по разделам 22.2 и 22.3. Мы рассмотрели два волновых уравнения и показали на их примерах, что при некоторых резонансных условиях нелинейные волновые уравнения могут быть существенно упрощены вплоть до сведения к нелинейным алгебраическим уравнениям, содержащим переменные коэффициенты. Мы надеемся, что эти уравнения могут описать эволюцию волн в вихри. Таким образом, реализуется наше стремление к максимально простому описанию сложных волновых явлений.

Подчеркнем также, что в общем случае задача исследования свелась к нелинейным уравнениям (22.5с) и (22.14), в которых вынуждающие и параметрические члены определяются выражением (22.7), (22.7а) или (22.17), (22.18). Таким образом, эти уравнения содержат как нелинейные, так пульсационные и резонансные, быстро растущие, члены. В целом, уравнения (22.5с) и (22.14) в своих линеаризованных вариантах напоминают уравнение известного английского ученого Лайтхилла [72, 73], призванное описывать звук, порождаемый турбулентностью. Можно предполагать, что уравнения (22.5с) и (22.14) также описывают генерацию вихрей и турбулентности звуком. Отметим, что далее нам встретится аналогичное уравнение (23.17), выведенное для физического поля. Конечно, сколько-нибудь полное исследование указанных уравнений лежит далеко за пределами тематики этой книги, и на нем мы останавливаться не будем. Однако мы будем рассматривать их упрощенные варианты вида (22.2), описывающие эволюцию волн в вихри.

22.4. Резонансное зарождение вихрей

...Видимое движение появилось благодаря вихревому движению ниже каждой возбужденной точки...

Дарвин

Динамическая неустойчивость на поверхности раздела двух различных жидкостей — хорошо известное явление. Оно часто приводит к зарождению вихрей. Менее оно известно для случая гранулированных сред. Поэтому для нас важно отметить, что Дарвин, анализируя движение поверхности Земли во время землетрясения, задумывался о возможности вихреобразования под верхним слоем почвы. Он пишет: *...Некоторые прямоугольные украшения у карнизов тех же стен были сдвинуты землетрясением наискось.... Этот перекос на первый взгляд как будто указывает на то, что под каждой точкой земной поверхности почва подверглась вихревому движению, что, однако, в высшей степени невероятно....* Сомнение Дарвина вполне понятно. Но возникновение вихревого движения в верхних слоях почвы, по-видимому, вполне возможно. Начальный этап возникновения такого движения иллюстрирует рис. 252 [75].

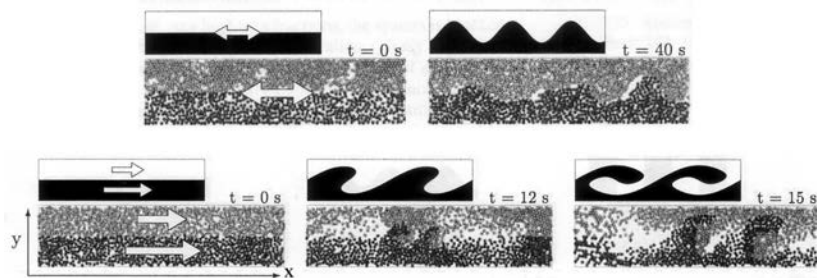


Рис. 252. Катастрофические волны, возникающие на поверхности раздела двух гранулированных сред [75].

Видно, что возникающая на поверхности раздела двух твердых слоев почвы волна вполне соответствует катастрофической волне на поверхности раздела жидкостей различной плотности (рис. 204). Возможно, возникновение складок слоев вблизи поверхности и в глубинах Земли, хорошо известных геологам, может быть связано с распространением катастрофических сейсмических волн. В последние годы активно обсуждаются огромные вертикальные грибовидные вихревые образования в глубине Земли, так называемые «плюмы», вызванные тепловыми потоками. Их существование объясняет движение

плит земной коры. Видимо, мысль Дарвина не распространялась на такие глубины, однако само возникновение идеи о возможности вихревых движений под поверхностью земли почти 200 лет тому назад не может не поражать.

Таким образом, как в жидких, так и в твердых средах возможны катастрофические волны, порождающие вихри. По-видимому, в некоторых случаях для исследования вихреобразования достаточно ограничиться учетом кубической нелинейности. Рассмотрим этот случай, учитывая то, что образование вихрей связано с влиянием вязкости, что необходимо учитывать в расчетах. Особенно это важно в случае пристеночной турбулентности (рис. 250, 251), когда имеется сильный градиент изменения скорости частиц. В пристеночном слое могут возникать грибовидные волны, напоминающие «эластика» формы (рис. 253).

При анализе мы используем уравнения, которые описывают самовозбуждение волн и следуют как частный случай из (22.2) после введения в них феноменологического вязкостного члена. Так как изучается бегущая волна, то мы вводим координату r (22.7). В целом, при изложении материала мы следуем работам [5, 57].

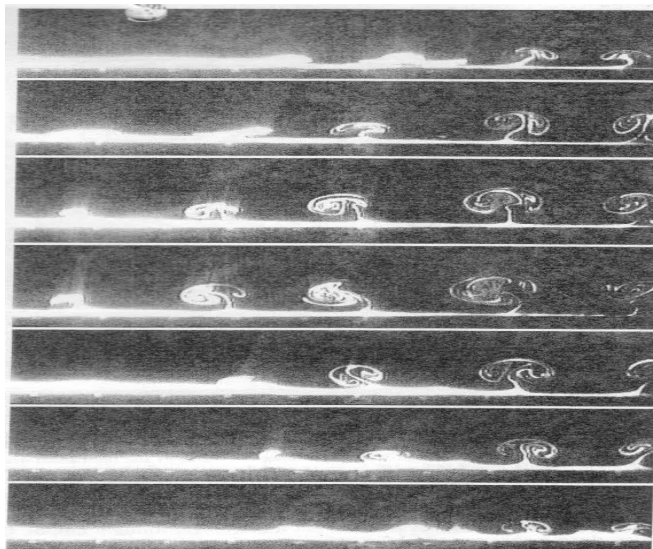


Рис. 253. Фотографии показывают последовательность (не на равных временных интервалах) развития малых возмущений. Из них возникают грибовидные структуры. Они растут в размере и числе, когда возрастает скорость течения [61].

Сначала отметим, что, моделируя вихри, Честер использовал нелинейную (вихревую) вязкость (22.1). Однако она существенно усложняет как последую-

щий расчет, так и анализ причин зарождения вихря, поэтому мы здесь используем линейную вязкость. Случай нелинейной вязкости будет рассмотрен в разделе 22.6. В рассматриваемом случае мы используем следующее уравнение:

$$J_*^3 / 3 + 2^{-2/3} R J_* + \mu \mathcal{A}_* dr + 2^{-2/3} J = 0. \quad (22.24)$$

Здесь член $\mu \mathcal{A}_* dr$ учитывает линейную вязкость. Первым делом подчеркнем, что обычно вне точек зарождения вихрей влияние вязкости пренебрежимо мало, поэтому основной профиль волны, за исключением вихревых точек, описывается уравнением

$$J_*^3 / 3 + 2^{-2/3} R J_* + 2^{-2/3} J = 0. \quad (22.25)$$

Кривые аналитического решения этого уравнения построены на рис. 254а. Для простоты мы приняли, что вдали от зон зарождения вихрей функцию J можно определить одной гармоникой. При расчетах принимали, что $J = AR \sin \omega r$, $A=0.3$, $R = A_1 - \alpha \omega r$ и $0^\circ \leq \alpha \omega r \leq 0.7$. Таким образом, R меняется по мере движения волны, т.е. мы рассматриваем случай, когда волна бежит внутри некоторой резонансной полосы. При $r = 0$ трансрезонансный параметр положителен, но далее, по мере распространения волны, он становится отрицательным. Кроме этого учитывается резонансная сингулярная компонента в R . Можно ожидать, что она наряду с вязкостью определяет возможность появления вихрей. Исследуем этот комплекс вопросов.

Результаты расчета развития волны возмущения J в грибовидные волны $J_* + J$ показаны на рис. 254 толстыми линиями.

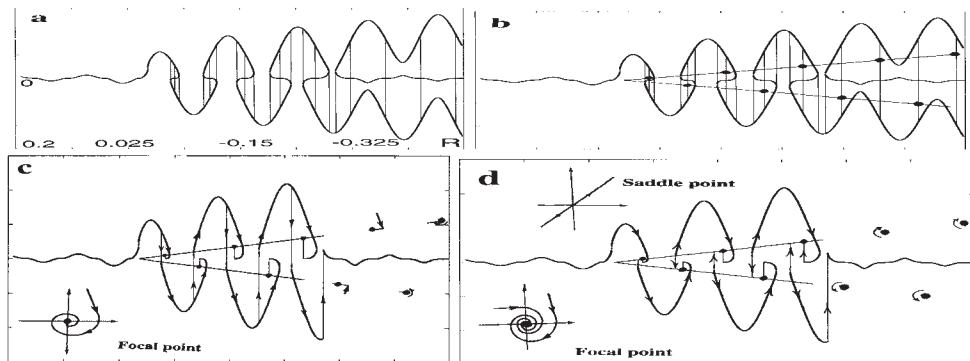


Рис. 254. Трансрезонансное развитие возмущений в грибовидные волны и вихри. Непрерывные тонкие линии на картинках b, c и d — сингулярные линии. Фокусы, расположенные на них, выделены черными точками. Вихри начинают формироваться, когда $R \approx 0$ [5]. Смотри также рис. 247, 248 и 253.

Подчеркнем, что мы исследуем возникновение вихрей как результат прохождения резонансной полосы (см. рис. 248), поэтому на рис. 254 переменной служит трансрезонансный параметр R . В частности, отметим, что грибовидные структуры возникают при $R \rightarrow 0$. Последующая задача — найти на этих линиях точки, в которых могут зародиться вихри, и затем, если они там возникли, описать их структуру.

Начнем с того, что продифференцируем уравнение (22.24). В результате, мы имеем:

$$(J_*^2 + R / 2^{2/3}) J_*^+ + 2^{-2/3} R \mathcal{H}_* + \mu J_* + 2^{-2/3} \omega [-A\alpha \sin \omega r + A(A_1 - \alpha \omega r) \cos \omega r] = 0. \quad (22.26)$$

Здесь и далее верхний штрих обозначает производную: $J_*^+ = \partial J_* / \partial r$. Уравнение имеет сингулярности на линиях, определяемых R , где

$$J_* = J^+ = \sqrt{-R / 2^{2/3}}, \quad (22.27)$$

$$J_* = J^- = -\sqrt{-R / 2^{2/3}}. \quad (22.28)$$

Линии, определяемые уравнениями (22.27) и (22.28), качественно показаны на рис. 254 как прямые линии. В общем случае они могут не пересекать толстые линии, определяемые уравнением (22.25). Однако на рис. 254 показан случай, когда такое пересечение в некоторых точках есть. Пересечения определяют те параметры процесса, при котором возможно зарождение вихрей.

Далее мы будем исследовать уравнение (22.26) в малой окрестности сингулярных линий, там, где можно записать:

$$r = r_0 + z, \quad (22.29)$$

здесь r_0 — некоторая точка, в окрестности которой мы изучаем уравнение. В окрестности этой точки используем следующее представление J^+ или J^- :

$$J_* = J^+ = g + \sqrt{-R / 2^{2/3}}, \quad (22.30)$$

$$J_* = J^- = g - \sqrt{-R / 2^{2/3}}. \quad (22.31)$$

Подставляем последние соотношения в (22.26). Далее мы учитываем, что в окрестности рассматриваемой точки g быстро-переменная функция, а R — практически постоянная. Поэтому в рассматриваемой окрестности $R \rightarrow 0$. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \left(g^2 \mp 2g\sqrt{-2^{-2/3}R} \mp \mu \right) \pm \sqrt{-2^{-2/3}R} = \\ & + 2^{-2/3} \omega (-A\alpha \sin \omega r + A A_1 \cos \omega r - A\alpha \omega r \cos \omega r) = 0. \end{aligned} \quad (22.32)$$

Отбрасываем здесь малые члены $g^2 g$. Тогда

$$\mp 2\sqrt{-2^{-2/3}R}gg++\mu \ll \mp \sqrt{-2^{-2/3}R} \equiv \\ +2^{-2/3}\omega(-A\alpha \sin \omega r + AA_1 \cos \omega r - A\alpha \omega r \cos \omega r) = 0. \quad (22.33)$$

Рассмотрим следующее выражение, входящее в (22.33),

$$\mp 2^{1/3}\mu\sqrt{-R} + \omega A(-\alpha \sin \omega r + A_1 \cos \omega r). \quad (22.34)$$

Оно связывает начальное возмущение с R и вязкостью. По мере движения волны величина (22.34) меняется. В частности, возможны случаи, когда (22.34) обращается в нуль. Чтобы проиллюстрировать эти случаи, примем, что член $\mp 2^{1/3}\mu\sqrt{-R}$ и коэффициент α в (22.34) малы, тогда (22.34) дает

$$\omega r \approx \pi \left(N - \frac{1}{2} \right). \quad (22.35)$$

Здесь $N = 0, \pm 1, (2, 3, \dots)$ Таким образом, возможны случаи, когда уравнение (22.33) упрощается к следующему виду:

$$g++ = \pm 2^{-2/3}(-R)^{-1/2}(\mu g - 2^{-2/3}\omega^2 A\alpha \omega r \cos \omega r)g^{-1}. \quad (22.36)$$

Пусть

$$E = \pm 2^{-2/3}(-R)^{-1/2}\mu \quad \text{и} \quad a = \mp 2^{-4/3}(-R)^{-1/2}\omega^2 A\alpha \omega r \cos \omega r. \quad (22.37)$$

Мы изучаем малую окрестность точки, лежащей на сингулярной линии. Поэтому в последнем выражении $\cos \omega r$ рассматривается как постоянная. Уравнение (22.36) примет вид:

$$g++ = (ar + Eg) / g. \quad (22.38)$$

Уравнение (22.38) имеет сингулярные (особые) точки. Они определяются собственными значениями λ уравнения (22.38):

$$\lambda_{1,2}^- = 0.5 \ll E (\sqrt{E^2 + 4a} \equiv \quad (22.39)$$

$$\lambda_{1,2}^+ = 0.5 \ll E \pm \sqrt{E^2 - 4a} \equiv \quad (22.40)$$

Мы подчеркиваем, что собственные значения $\lambda_{1,2}^-$ (22.39) соответствуют сингулярной линии (22.30), а $\lambda_{1,2}^+$ (22.40) соответствуют сингулярной линии (22.31). Поведение решений уравнения (22.38) зависит от $\lambda_{1,2}^\mp$. Согласно (22.39) и (22.40), сингулярные точки соответствуют узлу или седлу, если оба корня $\sqrt{E^2 - 4a}$ действительны. Когда корни становятся мнимыми (при уменьшении E), узлы преобразуются в спирали. Возможность такого развития определяется величинами R , A , μ и ω (22.34). Например, если E , N и a таковы, что $\lambda_{1,2}^- = \pm 2i\sqrt{|a|}$, то особая точка — фокус. Если же они дают $\lambda_{1,2}^+ = \pm 2\sqrt{|a|}$, то особая точка — седло. Пусть E уменьшаются от нуля и $a < 0$, тогда фокус может

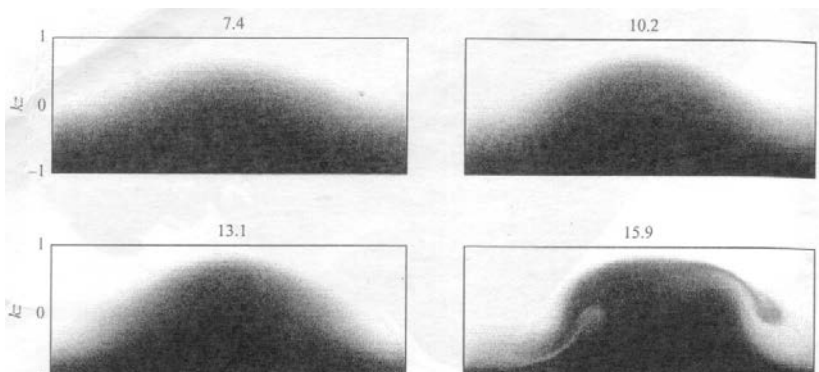


Рис. 255. Развитие вихрей при распространении подводной волны. Волна распространяется слева направо [76].

преобразоваться в спираль (вихрь). Если $N=1$, то спираль расположена на сингулярной линии (22.30), а седло расположено на (22.31). Обратная ситуация имеет место, если $N=2$ и $a > 0$. В общем случае, если N является нечетным, то спирали (вихри) расположены на (22.30), а седла на (22.31). Если N — четное, то спирали (вихри) расположены на (22.31), а седла расположены на (22.30).

Образование и развитие вихрей качественно показано на рис. 254 (с, d). Видно, что рис. 254 (с, d) описывает результаты экспериментов лучше, чем рис. 254 (а, b). В частности, профили на рис. 254 (с, d) качественно описывают образование и развитие волн и вихрей в случаях, представленных на рис. 205, 253, 255, 257. Вихри, возникающие при $R < -0.3$, образуют некоторое подобие вихревой «дорожки» Кармана.

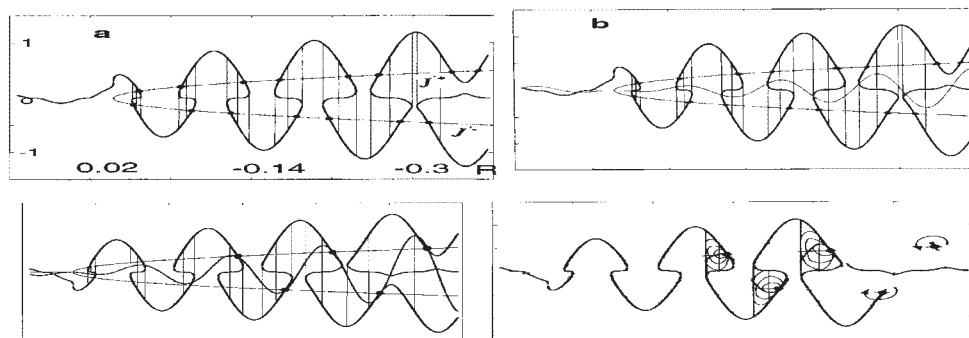


Рис. 256. Трансрезонансное развитие возмущений в грибовидные волны и вихри [5]. Черные точки соответствуют зонам, где могут возникнуть вихри. См. также рис. 247 и 248.

Таким образом, в пределах резонансной полосы возбуждаются волны, имеющие различные амплитуды и формы, которые могут порождать вихри. Причем вихри возникают только при отрицательных значениях трансрезонансного параметра R . Так же как и многие рисунки этой части книги, рис. 254 демонстрирует эффект гистерезиса. Другими словами,

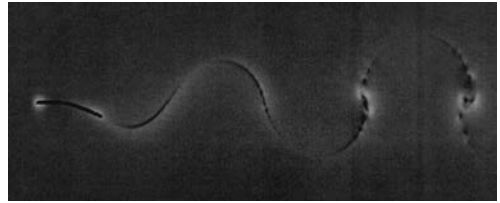


Рис. 257. Развитие вихрей при распространении волны. Фотография Марка Матри (Mark Murray) и Лоренса Хауэла (Laurens Howl) (Duke университет, семинар CNCS) [*].

из-за вертикальных скачков в зонах неоднозначности (складок и вихрей) возникает разная динамика, когда R увеличивается или когда R уменьшается, поэтому результаты расчетов можно истолковать по-разному в зависимости от того, в каком направлении мыслится прохождение резонансной полосы. Пример несколько другого расчета дан на рис. 256.

На рис. 256 используются те же обозначения, что и на рис. 254. Дополнительно на двух картинках введены волновые линии, определяющие значения r , при которых выражение (22.34) равно нулю. В общем говоря, если эти линии не пересекают сингулярные линии, то вихри могут не образовываться (рис. 256b). Если волновая тонкая линия начинает пересекать сингулярные линии, то около точки пересечения должны начать формироваться вихри (рис. 256c). Из рис. 256 видно, что вихри начинают формироваться, когда $R \rightarrow 0$ [5]. См. также рис. 255 и 257.

В заключение отметим существенное влияние нелинейностей на возникновение вихрей. Эффект вязкости также очень важен. Однако решающее влияние, согласно представленной модели, имеет резонанс. Пренебрежимо малые вне резонанса возмущения и вязкость могут привести к «взрывной» турбулентности в резонансной полосе.

22.5. Моделирование результатов неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

Каждый человек стоит ровно столько, сколько стоит то, о чем он хлопочет.

Марк Аврелий

Следуя [5], рассмотрим следующее уравнение:

$$-0.11J_*^5 + J_*^3 + 3R / 2^{2/3} J_* + 3R / 2^{2/3} J = 0. \quad (22.41)$$

Результаты численного решения этого уравнения представлены на рис. 258. Рассмотрен случай $R = -0.2 + 0.002Y(r) + \tanh[Y(r) / 50]$, где Y изменяется

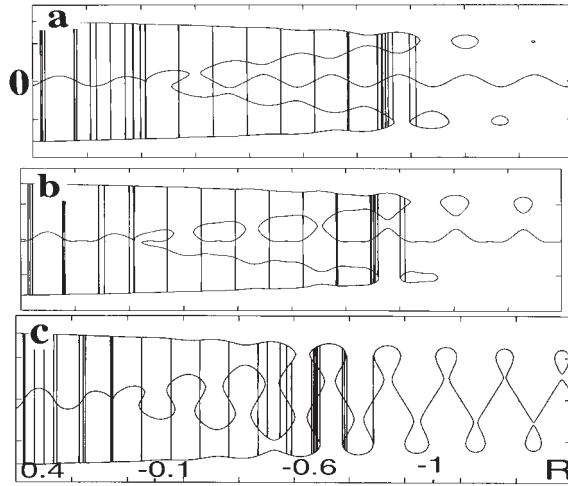


Рис. 258. Трансрезонансное развитие начального возмущения в замкнутые структуры, кноидальные, грибовидные и пирамидальные волны, описываемые алгебраическим уравнением пятого порядка (22.41) [5].

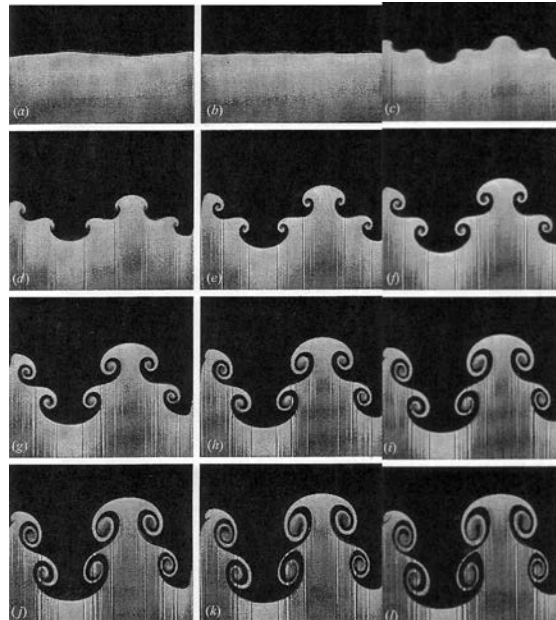


Рис. 259. Грибовидные вихревые волновые структуры, возникающие в процессе развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова [31].

по линейному закону от 30 до -120 . Волны на рис. 258 (а, с) вычислены для начального возмущения $J = A \cos 0.5r$, где $A=0.3$ (рис. 258а) или $A=0.7$ (рис. 258с). Волны на рис. 258b найдены для $J = 0.3(1 + 0.75 \cos 0.5r) \cos 0.5r$.

Видно, что в пределах резонансной полосы непрерывное начальное возмущение преобразуется в замкнутые структуры, которые можно истолковать как вихри. Действительно, они образуют некоторое подобие вихревой «дорожки» Кармана. Рост амплитуды A от 0.3 до 0.7 (рис. 258с) сильно усложняет транс-резонансное развитие волны. В результате, возникают «эластика» формы, которые скачкообразно преобразуются в новые, более сложные структуры. Однако в конце резонансной полосы картина упрощается и сводится к «дорожке» Кармана и пирамидальным волнам.

Возможно разное истолкование результатов, представленных на рис. 258. Следуя [3–5, 57], а также в контексте нашего исследования, мы связываем их с развитием вихрей. Легко видеть некоторую аналогию волновой эволюции, представленной на рис. 258с, и развития неустойчивости на поверхности контакта двух жидкостей (рис. 259), при которой возникают сложные и красивые вихревые структуры. Этот впечатляющий результат неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, рассмотренный совместно с рис. 258с, иллюстрирует сильное влияние высокой нелинейности на возникновение вихрей и турбулентности.

Ниже мы предпримем попытку моделирования эволюции волн, показанную на рис. 259. Исходим из того, что рис. 254 и 256 качественно описывают неустойчивость Рихтмайера-Мешкова (рис. 97), возникающую при наличии одной возмущающей гармоники на поверхности раздела сред. Возникновение более сложных вихревых структур (рис. 259) связано только с наличием на этом разделе двух возмущающих гармоник. Возникает мысль, что введение в уравнение (22.26) двух возмущающих гармоник позволит качественно описать развитие вихрей, показанное на рис. 259. Давайте проверим это предположение. Для этого опишем алгоритм расчета, который обобщает методику, изложенную в разделе 22.4 на случай двух возмущающих гармоник. Следуя [57], мы переписываем (22.26) в виде:

$$\begin{aligned} (J_*^2 + 2^{-2/3} R) J_* + 2^{-2/3} R J_* + \mu J_* - 2^{-2/3} A \alpha \omega (\sin \omega r + A_3 \sin 3\omega r) + \\ + 2^{-2/3} \omega A A_1 (\cos \omega r + 3A_3 \cos 3\omega r) - \\ - 2^{-2/3} \alpha \omega^2 r A (\cos \omega r + 3A_3 \cos 3\omega r) = 0. \end{aligned} \quad (22.42)$$

Согласно разделу 22.4, вводим сингулярные линии и находим в окрестности точки, лежащей на одной из этих линий, что

$$\begin{aligned} \mp 2\sqrt{-2^{-2/3} R} g g + \mu \ll \mp \sqrt{-2^{-2/3} R} \equiv 2^{-2/3} A \alpha \omega (\sin \omega r + A_3 \sin 3\omega r) + \\ + 2^{-2/3} \omega A A_1 (\cos \omega r + 3A_3 \cos 3\omega r) - \end{aligned}$$

$$-2^{-2/3}\alpha\omega^2 rA(\cos\omega r + 3A_3 \cos 3\omega r) = 0. \quad (22.43)$$

Далее записываем выражение

$$\mp\sqrt{-2^{-2/3}R\mu} - 2^{-2/3}A\alpha\omega(\sin\omega r + A_3 \sin 3\omega r) + 2^{-2/3}\omega AA_1(\cos\omega r + 3A_3 \cos 3\omega r). \quad (22.44)$$

Пусть это выражение равно нулю при некоторых значениях

$$\omega r = \text{const} \quad \text{и} \quad R = \text{const}. \quad (22.45)$$

В результате для случаев (22.45) уравнение (22.43) можно привести к следующему виду:

$$\mp 2\sqrt{-2^{-2/3}R}g + \mu g - 2^{-2/3}\alpha\omega^2 rA(\cos\omega r + 3A_3 \cos 3\omega r) = 0. \quad (22.46)$$

В окрестности рассматриваемой точки, лежащей на рассматриваемой сингулярной линии, величина $(\cos\omega r + 3A_3 \cos 3\omega r)$ меняется медленно, и ее полагаем постоянной. В этом случае (22.46) можно записать как уравнение (22.38). Таким образом, моделирование эволюции начальных возмущений из двух гармоник в вихри свелось к анализу рассмотренного ранее уравнения (22.38). Не останавливаясь далее на подробностях, описанных в разделе 22.4, приведем результаты расчетов, данных в [57].

Результаты расчетов приведены на рис. 260–262 (толстые линии). Там же показаны сингулярные (тонкие) линии J^c .

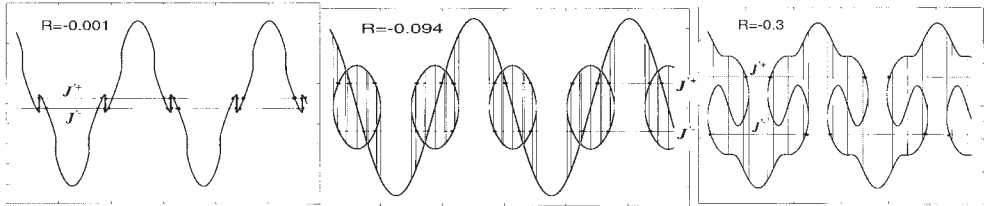


Рис. 260. Волновые резонансные грибовидные структуры, возникающие при различных значениях трансрезонансного параметра R [57]. Сингулярные (тонкие) линии параллельны оси.

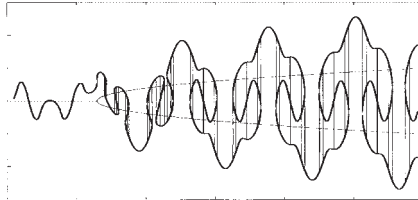


Рис. 261. Возникновение вихреобразной структуры при трансрезонансном развитии начального возмущения в диапазоне $-0.4 < R < 0.1$. Хорошо различима точка бифуркации прямой в «двухзубную вилку», образованную сингулярными линиями.

Из рис. 260 видно, что при $R = -0.094$ на кривой решения возникает эллипсоидальная структура, которую можно истолковать как некоторый прообраз вихря. При дальнейшем уменьшении R возникают сложные грибовидные волны, качественно напоминающие возникающие при неустойчивости Рихтмайера-Мешкова (рис. 97 и 259).

Трансрезонансное развитие начального возмущения в диапазоне $-0.4 < R < 0.1$, дополнительно иллюстрирующее динамику рис. 260, показано на рис. 261. Видно, что это развитие качественно соответствует экспериментальным данным, показанным на рис. 97, 220 и 259.

Подчеркнем, что полученные решения могут быть несправедливы в окрестностях точек пересечения толстых и тонких линий. Наша цель — показать качественно возможность появления на этих пересечениях вихрей. Результаты дальнейшего исследования представлены на рис. 262.

Образование вихря связано с вязкостью. Если вязкость большая, то выражение (22.44) всегда отлично от нуля. В этом случае уравнение

$$\mp \sqrt{-2^{-2/3} R \mu - 2^{-2/3} A \alpha \omega (\sin \omega r + A_3 \sin 3\omega r) + 2^{-2/3} \omega A A_1 (\cos \omega r + 3A_3 \cos 3\omega r)} = 0. \quad (22.47)$$

определяет кривую, которая нигде не пересекает сингулярные линии (22.30) и (22.31). Чтобы иллюстрировать этот случай, соответствующая кривая представлена на рис. 256b (волнистая линия). При этом исследование не сводится к уравнению (22.38) и образование вихрей невозможно. Однако если трение невелико, то размах волнистой линии, определяемой уравнением (22.47), увеличивается. В результате она начинает пересекать сингулярные линии J^c (22.30) и (22.31) около черных точек (рис. 256 и 262), а уравнение (22.43) преобразуется в уравнение вида (22.38), которое в этом случае имеет решение в виде спирали. Физически это соответствует образованию вихрей.

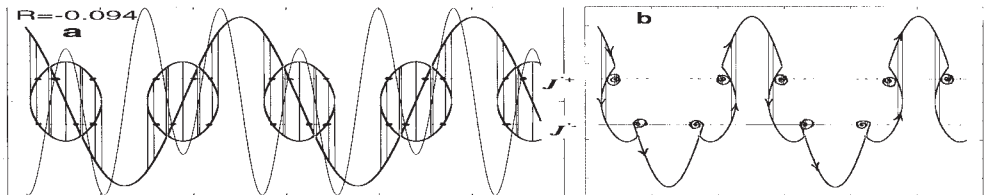


Рис. 262. Локализация вихрей (а) и результат моделирования неустойчивости Рихтмайера-Мешкова (b) (рис. 259) [57]. Темными точками выделены области, где имеет место пересечение кривой, определяемой уравнением (22.47), с сингулярными линиями. Там справедливо уравнение вида (22.38) и поэтому возможно возникновение вихрей. Эти вихри, качественно, показаны справа.

Видно, что рис. 262b достаточно хорошо соответствует многим экспериментальным картинкам, представленным на рис. 259.

Заключение по последним двум разделам. Мы затронули некоторые вопросы, относящиеся к огромной области исследования волновой турбулентности [60–69]. Из нашего анализа следует, что возникновение вихрей может сопровождать резонансные процессы и формирование катастрофических волн. Образование вихрей — высоко-нелинейный процесс, который возможен, когда влияние дисперсии много меньше влияния нелинейности. Линейная вязкость играет двоякую роль. Если она велика настолько, что выражения (22.34) (или (22.44)) не обращаются в нуль, то вихри не возникают. Вихри появляются только, если вязкость присутствует, но она не слишком велика. Количество вихрей, которые могут возникнуть в определенной точке резонансной полосы, зависит от количества гармоник в бегущем по пространству возмущении. Если бежит одна гармоника, то за полный цикл может возникнуть два вихря (имеется два пересечения кривых, определяемых уравнениями вида (22.47), с сингулярными линиями). Если имеются две гармоники, то за период возникают 4 вихря (четыре указанных пересечения). По аналогии — если имеется в бегущем возмущении N гармоник, то за каждый период колебаний появляются $2N$ вихрей.

Конечно, сказанное — только примитивная схема возможных процессов. Например, известно, что любое возмущение при распространении в слабовязкой среде порождает много гармоник (см. главу 9), поэтому теоретически, даже если начальное возмущение было чисто гармоническим, то по прошествии достаточного времени оно может породить огромное количество вихрей. Приведенные результаты, конечно, не являются новыми. Возможно, в менее явном виде они представлены в [3–5, 57].

Выполненное в последних двух разделах исследование эволюции волн в вихри, несмотря на то, что рассматриваются одномерные волны, обладает значительной общностью. Подобная эволюция может быть на поверхности раздела сред, в потоке газа или жидкости или при распространении резонансных волн поля. Действительно, исходные уравнения для исследования (22.27) или (22.41) являются частными случаями уравнения (22.3) и (22.10) (уравнение течения).

22.6. Устойчивость, неустойчивость и турбулизация волн при трансрезонансной эволюции

Родной язык, святой язык, отца и матери язык,
Как ты прекрасен, целый мир в твоём богатстве я
постиг.

Габдулла Тукай

Выше мы моделировали процесс эволюции волн в вихри, ориентируясь, в первую очередь, на описание процессов, наблюдаемых при развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова (см. рис. 97 и 259). Теперь мы попытаемся распространить развитый подход на более широкий круг явлений, в частности, рассмотрим волновые структуры, представленные на рис. 204, 205, 220, 246, 247, 251, 252, 253, 255 и 257. На некоторых из них видно, что возникновение сложных волновых структур связано с быстрым ростом начальных возмущений. Поэтому как исходные нам нужны выражения, где есть быстро растущие члены. Такие выражения выведены нами ранее в разделах 9.1, 9.2, 22.2 и 22.3, где они построены в предположении линейного трения (разделы 9.1, 9.2) или для невязкой среды (разделы 22.2 и 22.3). В какой-то мере такой упрощенный подход справедлив для волновых течений, близких к ламинарным. Влияние линейной вязкости часто очень мало, и она начинает проявлять себя только при некоторых специальных обстоятельствах, в частности, вблизи точного резонанса или при некоторых критических (резонансных) скоростях течения. После возникновения вихрей линейная вязкость может перестать описывать реальность даже в этих резонансных условиях. Поэтому зарождение турбулентности изучается обычно на основе нелинейных моделей вязкости. Одна из них, так называемая вихревая вязкость, будет использоваться в этом разделе дополнительно к линейной вязкости. Еще более важно то, что в предшествующих двух разделах использовались максимально упрощенные уравнения, только в малой степени учитывающие многообразие нелинейных эффектов, формирующих вихревую катастрофическую волну. Кроме этого напомним, что в этих разделах мы исследовали процесс зарождения вихрей во время распространения начального гармонического возмущения. Она предполагалась весьма малой, поэтому на рис. 254, 256 260 и 262 само начальное возмущение не учитывали. Давайте учтем его дополнительно к некоторым упущенным ранее нелинейным членам, нелинейной вязкости, дисперсии и посмотрим, к чему это все приведет в математических выражениях и расчетах.

Наконец отметим, что в предыдущих двух разделах мы ориентировались на моделирование уравнения (22.8). Оно содержит члены, существенно завися-

щие от координаты, которая в разделах 22.4 и 22.5 отсчитывалась от середины резонансной полосы. Поэтому мы интерпретировали эту зависимость как зависимость от трансрезонансного параметра R . Следовательно эти члены важны только в случаях достаточно широкой полосы и вдали от ее середины. Теперь рассмотрим случай узких резонансных полос, когда влияние членов явно зависящих от координаты (т.е. от R), мало. При этом амплитуда начального гармонического возмущения не меняется.

Запишем следующее модельное уравнение для горизонтальной компоненты волны:

$$u_{tt} - C^2 u_{aa} = \beta u_a u_{aa} + \beta_1 u_a^2 u_{aa} + k u_{aatt} + \bar{s} u_t + \hat{s} u_t |u_t|. \quad (22.48)$$

Здесь, в отличие от (22.3), введены члены, учитывающие дисперсию, трение и вихревую вязкость. Все эти члены рассматриваются как величины второго порядка. Заметим, что уравнение (22.48) является частным случаем уравнения (7.24), дополненным вихревой вязкостью. Так как (7.24) выведено из общих уравнений сплошной среды (см. главы 5 и 6), то можно ожидать, что оно описывает, в какой-то мере, процессы вихреобразования и турбулизации. Конечно, для исследования эволюции многовихревых волновых структур было бы желательно учесть в (22.48) и более высокие нелинейности, но используемый далее математический аппарат не позволяет сделать этого.

Пусть, как и ранее, $u = u^{(1)} + u^{(2)} + U$ (22.4). Подставляем последнее равенство в (22.48). Затем получим уравнения, полностью аналогичные уравнениям (22.5a)–(22.5c). Примем, что влияние дисперсии, трения и вихревой вязкости из уравнения для U можно исключить. Тогда уравнения для $u^{(1)}$ и U совпадают с (22.5a) и (22.5c), а уравнение для $u^{(2)}$ записывается в следующем виде:

$$u_{tt}^{(2)} - C^2 u_{aa}^{(2)} = \beta u_a^{(1)} u_{aa}^{(1)} + k u_{aatt}^{(1)} + \bar{s} u_t^{(1)} + \hat{s} u_t^{(1)} |u_t^{(1)}|. \quad (22.49)$$

Уравнение вида (22.49) многократно встречалось в этой книге. Используя традиционный для нас подход, можно записать его приближенное решение в следующих двух видах:

$$4C^2 u^{(2)} = 4C^2 \bar{J}_2(r) + 4C^2 \bar{J}_2(s) - \frac{1}{2} \beta (sJ_r^2 - rj_s^2) + \beta (jJ_r + Jj_s) + k(ru_{sss} + su_{rrr})^{(1)} + \bar{s}(ru + su)^{(1)} + \hat{s} \oint \oint u_s + u_r)^{(1)} |u_s + u_r)^{(1)}| dr ds, \quad (22.50)$$

$$4C^2 u^{(2)} = 4C^2 J_2(r) + 4C^2 j_2(s) - \frac{1}{2} \beta (2aJ_r^2 + 2aj_s^2) + \beta (jJ_r + Jj_s) + k(-2au_{sss} + 2au_{rrr})^{(1)} + \bar{s}(-2au + 2au)^{(1)} + \hat{s} \oint \oint u_s + u_r)^{(1)} |u_s + u_r)^{(1)}| dr ds. \quad (22.51)$$

Для случая однонаправленной волны (22.51) запишется так:

$$u^{(2)} \approx J_2(r) - \frac{1}{4}\beta a C^{-2} J_r^2 + \frac{1}{2}ka C^{-2} J_{rrr} + \\ + 2\bar{s}a C^{-2} J + 2a\hat{s} C^{-2} \mathcal{O}_r |J_r| dr. \quad (22.52)$$

Теперь рассмотрим величины третьего порядка. После некоторых преобразований и интегрирования уравнение (22.5с) для однонаправленной волны дает, что

$$U_a^3 + 3\left(u^{(1)} + u^{(2)} + \frac{1}{2}\beta\beta_1^{-1}\right)U_a^2 + 3[\beta_1^{-1}(-\hat{C}^2 + C^2) + \beta\beta_1^{-1}(u^{(1)} + u^{(2)})_a + \\ + (u^{(1)} + u^{(2)})_a^2]U_a + 3\beta\beta_1^{-1}u_a^{(2)}\left(u^{(1)} + \frac{1}{2}u^{(2)}\right)_a + (u^{(1)} + u^{(2)})_a^3 = \bar{C}. \quad (22.53)$$

Здесь $\bar{C}$ — постоянная интегрирования. Полученное уравнение соответствует уравнению (22.8) раздела 22.2. В нем приближенно

$$u_a \approx (u^{(1)} + u^{(2)})_a \& J_a + J_{2,a}(r) - \frac{1}{2}\beta a C^{-2} J_r J_{ar} - \frac{1}{4}\beta C^{-2} J_r^2 + \frac{1}{2}k C^{-2} J_{rrr} + \\ + \frac{1}{2}ka C^{-2} J_{rra} + 2\bar{s} C^{-2} J + 2\bar{s}a C^{-2} J_a + \\ + 2\hat{s} C^{-2} \mathcal{O}_r |J_r| dr - 2a\hat{s} C^{-2} J_r |J_r|. \quad (22.54)$$

Нас интересует случай резонанса, когда $\hat{C}^2 = C^2$ в (22.53). Исходя из результатов разделов (22.4) и (22.5), можно ожидать, что в окрестности резонанса влияние нелинейности, трения и дисперсии на волновой процесс и возникновение вихрей резко возрастает. Поэтому заманчиво исследовать систему (22.53) и (22.54) в окрестности резонанса, учитывая, что условие резонанса является функцией координаты и роста амплитуды начального возмущения. Пока эта амплитуда мала, скорость возмущения совпадает с C . При этом влияние выражения $(u^{(1)} + u^{(2)})_a$ (22.54) на коэффициент линейной составляющей уравнения (22.53), т.е. на близкий точному резонансу этап эволюции волны, может быть существенным. Выражение $(u^{(1)} + u^{(2)})_a$ начинает определять некоторый важный этап трансрезонансной эволюции волны. В результате этой эволюции возмущение усиливается, ее скорость меняется и условие, как бы точного, резонанса $\hat{C}^2 = C^2$ нарушается. Так как при этом координата a растет, то увеличивается влияние зависящих от a членов в (22.53) и (22.54). Все это вкупе с другими эффектами делает задачу исследования эволюции и устойчивости системы (22.53) и (22.54) очень интересной и сложной.

Однако подобное исследование превышает наши возможности. Поэтому мы сильно ограничим задачу, а именно рассмотрим упрощенные варианты

системы (22.53) и (22.54). При этом будем ориентироваться, в первую очередь, на моделирование данных экспериментов, представленных в [1, 38, 61].

Вместо уравнения (22.53) мы запишем его следующие варианты:

$$U_a^3 + 3\beta_1^{-1}(-\hat{C}^2 + C^2)U_a + u_a^{(1)3} = 0, \quad (22.55)$$

$$U_a^3 + 3[\beta_1^{-1}(-\hat{C}^2 + C^2) + \beta\beta_1^{-1}u_a^{(1)}]U_a + u_a^{(1)3} = 0, \quad (22.56)$$

$$U_a^3 + 3[\beta_1^{-1}(-\hat{C}^2 + C^2) + \beta\beta_1^{-1}u_a^{(1)} + (u^{(1)})_a^2]U_a + u_a^{(1)3} = 0, \quad (22.57)$$

$$U_a^3 + \frac{3}{2}\beta\beta_1^{-1}U_a^2 + 3[\beta_1^{-1}(-\hat{C}^2 + C^2) + \beta\beta_1^{-1}u_a^{(1)} + (u^{(1)})_a^2]U_a + u_a^{(1)3} = 0. \quad (22.58)$$

Использовалось также следующее уравнение:

$$U_a^3 + 3[\beta_1^{-1}(-\hat{C}^2 + C^2) + \beta\beta_1^{-1}(u^{(1)} + u^{(2)})_a + (u^{(1)} + u^{(2)})_a^2]U_a + (u^{(1)} + u^{(2)})_a^3 = 0. \quad (22.59)$$

На его основе исследовались некоторые аспекты влияния нелинейности и вязкости на волнообразование. Уравнения (22.55)–(22.59) позволяют анализировать вклад того или иного эффекта в изменение профиля волны. Подчеркнем, что при решении (22.59) вместо (22.54) использовались следующие упрощенные представления для $(u^{(1)} + u^{(2)})_a$:

$$(u^{(1)} + u^{(2)})_a \approx J_a + 2\bar{s}aC^{-2}J_a, \quad (22.60)$$

$$(u^{(1)} + u^{(2)})_a \approx J_a - 2a\hat{s}C^{-2}J_r|J_r|. \quad (22.61)$$

Таким образом, принимали, что вклад той или иной вязкости определяется в первую очередь начальным возмущением. Изучался также важнейший для нас специальный случай, когда $(u^{(1)} + u^{(2)})_a$ зависело нелинейно от J_r :

$$(u^{(1)} + u^{(2)})_a \approx J_a - \frac{1}{2}\beta aC^{-2}J_rJ_{ar}, \quad (22.62)$$

$$(u^{(1)} + u^{(2)})_a \approx J_a - \frac{1}{4}\beta C^{-2}J_r^2. \quad (22.63)$$

Еще раз подчеркнем, что все выражения (22.60)–(22.63) являются частными случаями (22.54). При расчетах мы приняли, что инициирующая волна возмущения имеет простейший вид:

$$J_r(r) = \varepsilon \sin Kr, \quad r = Ct - a. \quad (22.64)$$

Таким образом, мы обрисовали комплекс упрощений, которые мы будем использовать при анализе. Конечно, мало шансов на успех моделирования данных сколь-нибудь сложных экспериментов при таком упрощенном подходе. Это обстоятельство усугубляется тем, что исходное уравнение (22.48) является сугубо модельным, претендующим как бы на грубое описание множества экспериментов. В такую возможность трудно поверить. Наконец, при расчетах

мы сталкиваемся с проблемой неопределенности коэффициентов в исходных уравнениях. Все эти ограничения используемого математического аппарата усугубляют трудности описания экспериментов и наблюдений развиваемой теорией. Однако другого пути оценки справедливости теории, помимо сравнения ее результатов с данными экспериментов, у нас нет. Таким образом, при расчетах мы, как всегда, будем ориентироваться на данные экспериментов.

При расчетах трансрезонансной эволюции волн предполагалось, что величина $\beta_1^{-1}(-\hat{C}^2 + C^2)$ в уравнениях (22.55)–(22.59) изменяется с координатой согласно следующему закону:

$$\beta_1^{-1}(-\hat{C}^2 + C^2) = \xi - 7i. \quad (22.65)$$

Здесь ξ и 7 — постоянные, i — целое число, которое меняется от 1 до некоторого значения I . Координата a рассчитывалась по формуле:

$$a = \zeta i. \quad (22.66)$$

Здесь ζ — постоянная. При расчетах менялась координата. Вместе с ней, аналогично тому, как это имело место в расчетах разделов 22.4 и 22.5, менялась разность $-\hat{C}^2 + C^2$ в (22.65). Легко видеть, что эта разность соответствует трансрезонансному параметру R разделов 22.4 и 22.5. Подчеркнем, что введенные в (22.65), (22.66) постоянные могут меняться в зависимости от изучаемого процесса и скорости трансрезонансной эволюции волн. Например, резонансная полоса может быть меньше длины волны. Тогда она может меняться очень быстро и непредсказуемо. В других случаях на этой полосе укладывается множество слабо-меняющихся с координатой волн. Результаты расчетов представлены на рис. 263–267. Приступим к их рассмотрению.

На рис. 263 показана трансрезонансная эволюция волн, рассчитанных на основе уравнений (22.55)–(22.57). Т.е. влияние ряда нелинейностей, диссипации и дисперсии не учитывалось. Проводились, в первую очередь, исследования влияния начального возмущения на эволюцию волн. Находилась величина U_a или u_a (22.4). В последнем случае значение $u_a^{(2)}$ не учитывалось, а именно, использовалась формула:

$$u_a = -\cos Kr + U_a. \quad (22.67)$$

Можно видеть, что, в целом, последняя формула аналогична используемому ранее (20.43) и (21.52). Подчеркнем, что в (22.67), в отличие от (22.49)–(22.51), где $J_r(r) = \varepsilon \sin Kr$ (22.64), мы ввели сдвиг по фазе, равный $\pi/2$, между начальным возмущением и возбужденной волной U_a . Согласно линейной теории, сдвиг, равный $\pi/2$ имеет место в точном резонансе. Отметим, что фазовый сдвиг хорошо рассчитывается для линейных волн (см. (12.53)), но не для нелинейных волн (см. (13.13), разделы 15.4 и 21.4). В дальнейшем мы будем

рассматривать и другие значения рассматриваемого сдвига (см. (22.68), (22.70) и (22.71)). Конечно, фиксация значения сдвига, который в действительности меняется в резонансной полосе и даже меняется скачкообразно, — еще одно ограничение применимости нашей модели.

Кривые 1 и 2 рис. 263 определяют U_a и рассчитаны на основе (22.55) для различных амплитуд начального возмущения ($=0.235$ или 0.35) и $K=0.6$ в (22.64). Показано возникновение и развитие грибовидных структур, которые несколько отличаются от рассмотренных ранее. Эти структуры распадаются в конце резонансной полосы на три кривые. В целом, образуется своеобразная вилка, хорошо просматриваемая для кривых 1. Середина вилки (грибовидная форма) определяется быстрой волновой эволюцией. Расчеты показали, что эта эволюция тем быстрее, чем меньше амплитуда начального возмущения. Ниже кривых 1 и 2 располагаются данные экспериментов [61]. Видно, что, в целом, экспериментальные кривые согласуются с расчетом. Кривые 3–6 также определяют U_a . Они рассчитаны для $K=0.8$ в (22.64). Из них кривые 3, 4 найдены по уравнению (22.56), а кривые 5, 6 по уравнению (22.57). Таким образом, эти кривые учитывают влияние начального возмущения на линейный член в (22.56), но не вынуждающий член. Кривые 3 быстро распадаются на три кривые, а кривые 4 после быстрой эволюции порождают замкнутые кривые, которым в дальнейшем мы будем ставить в соответствие вихри. При расчетах полагали $\beta\beta_1^{-1} = 0.1$ (кривые 3 и 5) или $\beta\beta_1^{-1} = -0.1$ (кривые 4 и 6).

На кривых 1–4 рис. 263 видны основные волновые профили, возникающие при трансрезонансной эволюции. Это опрокидывающиеся волны (1), грибовидные волны (2), волны обрамленные «ушами» (4), и профили, содержащие замкнутые кривые у основания (3). Эти профили будут обсуждаться далее.

Из сопоставления кривых 1 и 2 (соответствующих уравнению 22.55) с кривыми 3 и 4 (соответствующих уравнению 22.56), а также с кривыми 5 и 6 (соответствующих уравнению 22.57) уже можно сделать некоторые выводы. Видно, что влияние $u_a^{(1)}$ на профили волн 3 и 4 может быть очень важным, в то время как влияние $(u_a^{(1)})^2$ только несколько изменяет профиль волн 5 и 6 относительно кривых 3 и 4. Таким образом, вопрос о влиянии $u_a^{(1)}$ и $(u_a^{(1)})^2$ на U_a несколько прояснился. Теперь оценим влияние $u_a^{(1)}$ и $(u_a^{(1)})^2$ на профили волн u_a . Для этого расчеты кривых 7–9 проведены для u_a с учетом вклада начального возмущения на окончательную форму волн, т.е. согласно (22.67).

Видно, что учет инициирующего возмущения может радикально менять профиль волн. В результате быстрой эволюции они начинают напоминать опрокидывающиеся волны. Затем они часто образуют замкнутые, почти круговые, структуры, которые мы рассматриваем как некоторый аналог вихрей.

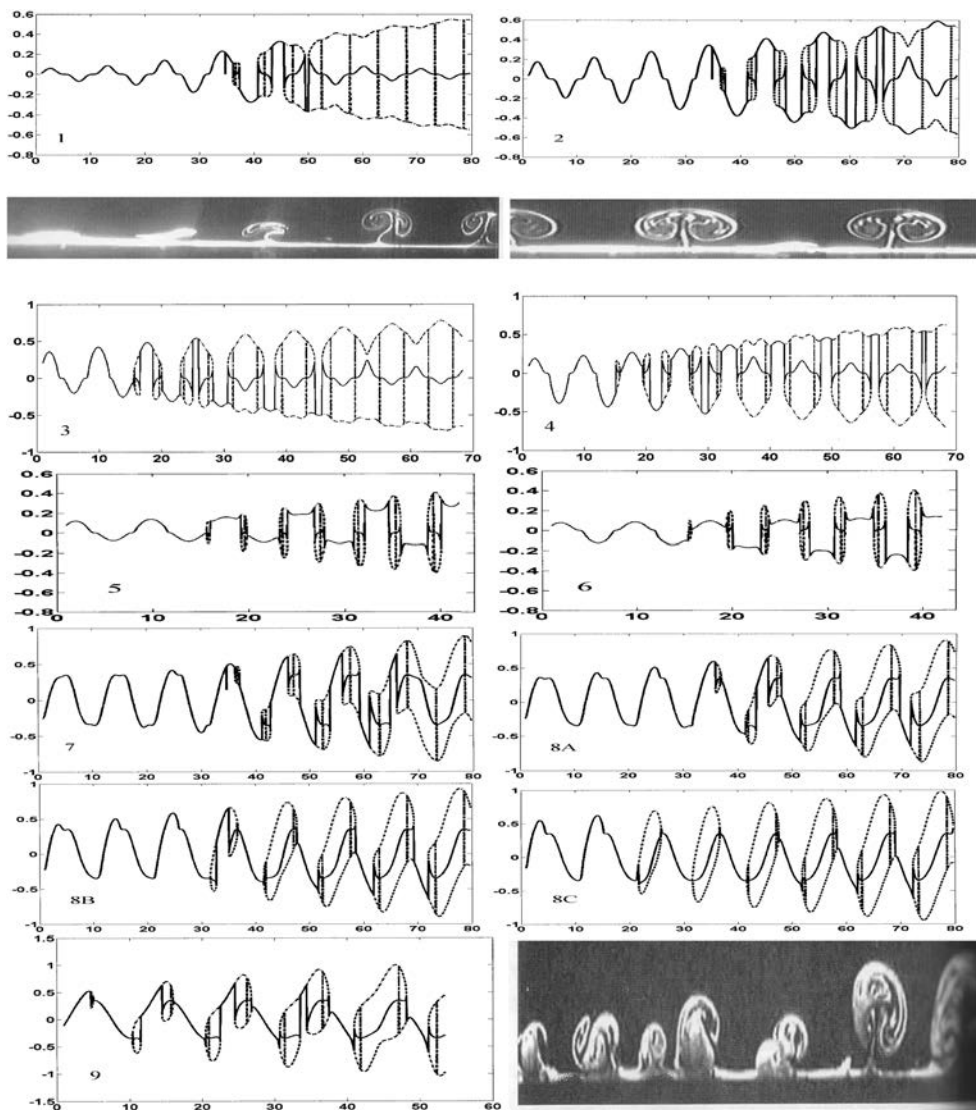


Рис. 263. Эволюция и трансрезонансное развитие волн, рассчитанных по различным моделям, и некоторые данные экспериментов [61] (см. также рис. 253).

Теперь определим параметры, при которых проводились расчеты. При расчетах кривых 2–9 амплитуда начального возмущения $= 0.35$. Подчеркнем, что изменение волновых профилей связано с увеличением координаты. Она

находилась по (22.66). При расчетах кривых серий 1, 2, 7–9 полагали $\varsigma = 0.045$ и $\xi = 0.075$, $7 = 0.0001$, $I = 1750$ в (22.65). Постоянная K в (22.64) равнялась 0.6. При расчетах кривых серий 3–6 полагали $\varsigma = 0.035$, $K = 0.8$ и $\xi = 0.035$, $7 = 0.0001$, $I = 1950$ в (22.65). Далее остановимся на рассмотрении кривых 7–9.

Кривые 7 найдены согласно (22.55) и (22.67). Кривые 8 учитывают влияние $u_a^{(1)}$. Они найдены согласно (22.56) для разных значений $\beta\beta_1^{-1} = 0.1, 0.175$ и 0.3. При $\beta\beta_1^{-1} = 0.3$ (кривые 8С) этап опрокидывания волны практически исчезает, и она почти мгновенно преобразуется в вихрь. Теперь рассмотрим кривые 9. При их расчете использовали (22.57) и полагали, что $\xi = 0.025$ в (22.65). Остальные параметры вычислений не меняли. Сказанное изменение позволило рассмотреть большую область быстрой эволюции волн. Однако, в целом, указанные изменения не изменили существенно характера кривых 9 относительно кривых 8А. Мы также провели расчеты с использованием уравнения (22.58), учитывающего его квадратичную нелинейность. Полученные результаты в области принятых параметров практически не изменились. Поэтому они здесь не приводятся. В конце рис. 263 приведены данные экспериментов [61], которые читатель может сопоставить с расчетами, например, с кривыми 9. Если замкнутые кривые в расчетах рассматривать как вихри, то можно увидеть определенное подобие рассчитанных кривых и экспериментальных.

Рассмотрим теперь результаты расчетов и экспериментов, представленных на рис. 263 совместно. Сложность рассмотрения определяется тем, что многие участки расчетных кривых неоднозначны и соответствуют некоторым трем решениям уравнения (22.48). Поэтому возможна различная интерпретация результатов. Собственно говоря, повторяется ситуация, с которой мы неоднократно встречались выше, например, в разделах 21.2 и 21.4. Однако нельзя не видеть, что расчеты, пусть грубо, но соответствуют экспериментам, выполненным для волн, распространяющихся в различных сдвиговых течениях. Трудно было ожидать, что наше исходное уравнение (22.48), хоть в малой степени, опишет эти волны. Однако определенное соответствие есть. В частности, можно видеть, что некоторые кривые рис. 263 напоминают волны, возникающие за обтекаемыми жидкостью телами (см., например, рис. 247). Чтобы сделать сказанное явным, мы приводим рис. 264, где показаны некоторые результаты экспериментов [38] и их моделирования.

Верхняя картина соответствует эксперименту. Остановимся на результатах расчетов и их анализе. Вначале рассмотрим кривые 1 и 2, полученные согласно (22.56) и (22.67) для $\beta\beta_1^{-1} = 0.1$ (кривые 1), $\beta\beta_1^{-1} = -0.1$ (кривые 2) при $\varepsilon = 0.35$ и $K = 0.8$. В (22.65) $\xi = 0.025$, $7 = 0.000045$ и $I = 1150$, величина $\varsigma = 0.025$ (22.66). Видно, что в процессе эволюции возникают конфигурации, напоминающие экспериментальные кривые. Чтобы сделать это более явным, мы при-

вели кривые А, А1, В и В1. На них представлены расчеты (А и В) и кривые интерпретации расчетов (А1 и В1). Как исходное использовалось уравнение (22.57). В (22.65) $\xi=0.025$, $7=0.0001$ и $I=1900$, величина $\zeta=0.03$ (22.67).

Вначале рассмотрим кривые А, полученные для $\beta\beta_1^{-1} = 0.03$ и $\varepsilon = 0.25$ В целом, они соответствуют расчетным картинам 7–9 рис. 263. На рассчитанных кривых имеются вертикальные линии. Напомним, что эти кривые определяются алгебраическим уравнением (22.57), которое имеет три решения. Вертикальные линии определяют точки, в которых имеет место как бы ветвление решения и возможен перескок с одного решения на другое. В разделе (20.6) (см. рис. 215 и 216) именно с этим мы связывали появление вихревых волн. На нижеследующей картинке А1 мы даем интерпретацию расчетов, исходя из экспериментальных кривых. Выделены участки кривых, которые моделируют завихренность, и удалены участки решений, которые отсутствуют в эксперименте. Рис. 264 также содержит кривые В, рассчитанные для $\beta\beta_1^{-1} = 0.1$ и $\varepsilon = 0.25$, их интерпретацию В1. Мы полагаем, что, учитывая грубость исходной модели и сложность задачи, подчеркиваемую экспериментальной кривой, имеется определенное подобие кривых теоретических и экспериментальной.

Результаты попытки более детального исследования эволюции волн в вихри представлены на рис. 265. Цель расчетов — также моделирование данных экспериментов, представленных наверху этого рисунка. Использовалось уравнение (22.56). Величина u_a находилась по формуле:

$$u_a = \cos Kr + U_a. \quad (22.68)$$

Таким образом, фазовый сдвиг между слагаемыми в (22.68) полагался равным $-\pi/2$. При расчетах частота волны слегка менялась, а именно K в выражении (22.64) равнялось 0.43 (кривые А и А1) или 0.4 (кривые В и В1), или 0.37 (кривые С и С1). Кривые А, В и С определяются расчетом, а А1, В1 и С1 определяются их авторской интерпретацией. В (22.65) $\xi = 0.075$, $7 = 0.0001$ и $I = 1750$, величина $\zeta = 0.045$ (22.66).

Из рис. 265 видно, что в целом кривые А1, В1 и С1 качественно описывают некоторые этапы эволюции волн, наблюдаемые в эксперименте (верх рис. 266).

Следующая серия расчетов связана с моделированием волн, обранных вихрями. Интересный пример таких волн дан на рис. 220. Показанные там сложные волновые структуры напоминают возникающие при неустойчивости Рихтмайера-Мешкова (рис. 97 и 259). Мы посвятили этим волнам два предыдущих раздела. Далее мы продолжим наше моделирование этих волн. Результаты серии попыток моделирования волн, представленных на рис. 220, даны на рис. 266.

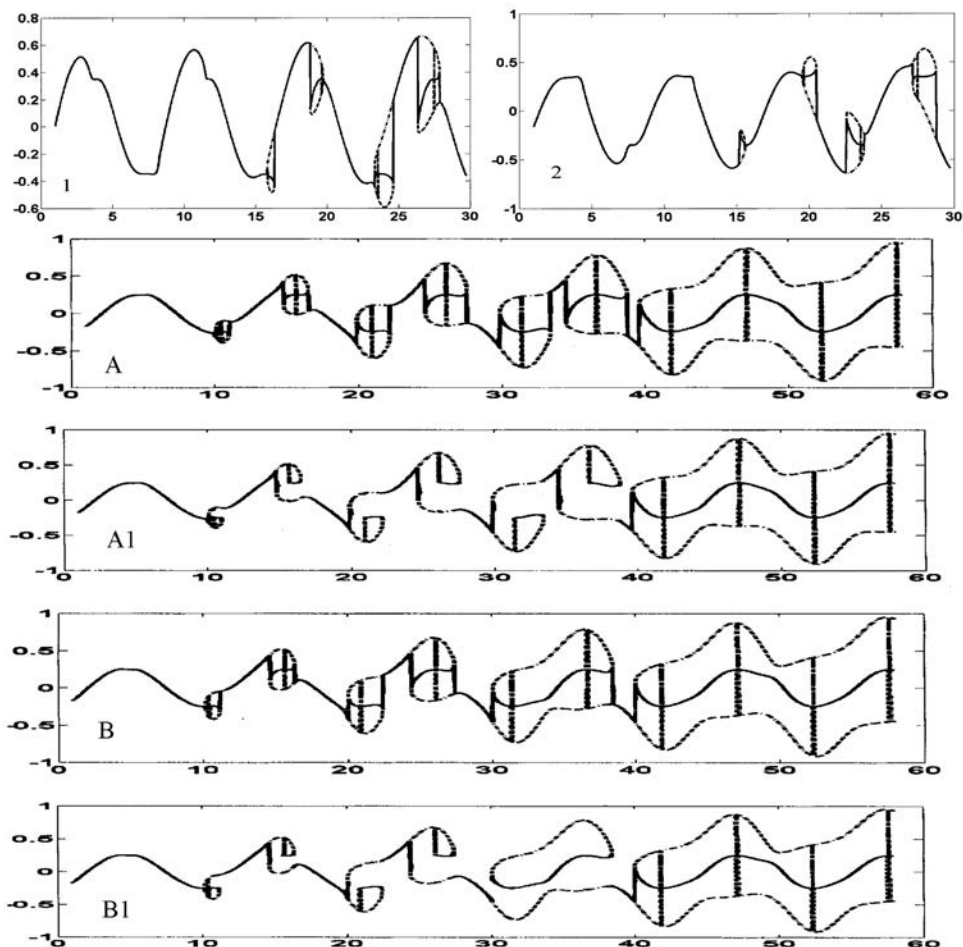
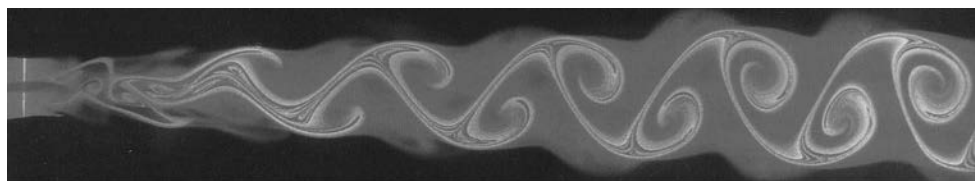


Рис. 264. Картина эволюции возмущений на поверхности раздела двух течений жидкости (верхняя картина) и результаты аналитического моделирования. Хотя начальное возмущение неизвестно и, строго говоря, окончательная конфигурация течения тоже, можно говорить о некоторой упорядоченности течения в каком-то интервале времени и об определенном согласии расчетов и экспериментов [38].

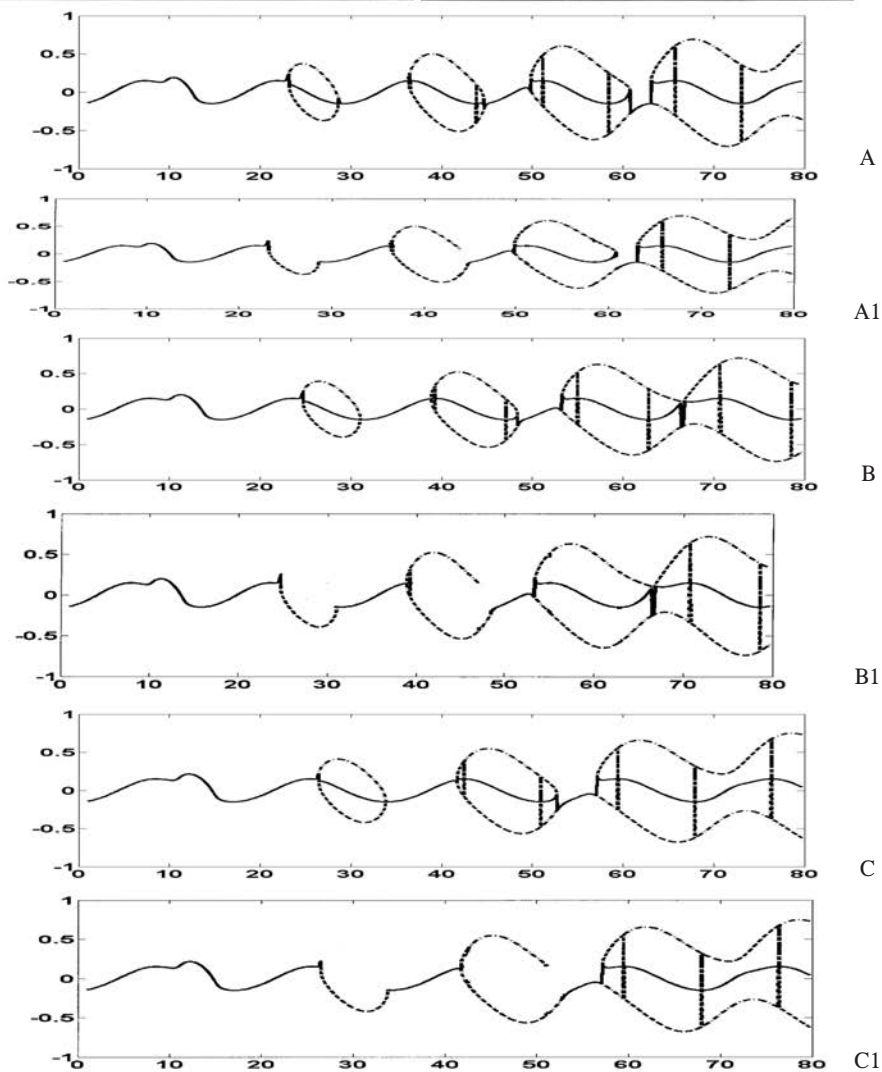
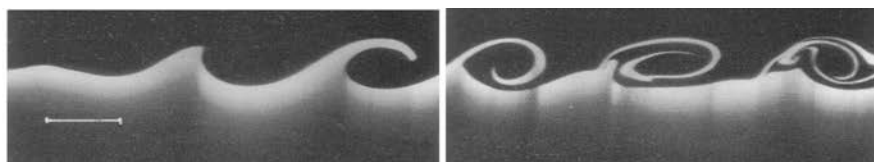


Рис. 265. Трансрезонансная эволюция волн в вихри. Данные эксперимента [1] и их моделирование.

Как и ранее, мы связали возникновение мелкомасштабных вихрей с вязким эффектом. Поэтому вначале исследовался эффект вязкости. При описании линейной вязкости на основе (22.60) проблем не было. При учете нелинейной вязкости (22.6D1) мы использовали то, что

$$|\sin Kr| = 2\pi^{-1} - 4\pi^{-1} \left(\frac{1}{3} \cos 2Kr + \frac{1}{15} \cos 4Kr + \frac{1}{35} \cos 6Kr + \dots \right). \quad (22.69)$$

Проведенные расчеты при используемых далее параметрах показали, что влияние вязкости на волновые профили U_a практически отсутствует. Поэтому это влияние на U_a не учитывалось. Однако окончательное выражение для u_a определял эффект малой вязкости. Как хорошо известно (см. раздел 8.6), из-за него сдвиг фазы между возбуждающей и возбуждаемой волнами может быть почти скачкообразным и равным нулю или π , поэтому при расчетах волн в средах, которые полагаются вязкими, мы использовали вместо (22.67) следующие выражения:

$$u_a = -\sin Kr + U_a, \quad (22.70)$$

$$u_a = \sin Kr + U_a. \quad (22.71)$$

Расчеты U_a проводились согласно уравнению (22.59), в котором надо определить $u_a^{(2)}$. Это делалось на основе (22.63). Таким образом, мы дополнительно учитывали эффекты, проистекающие от квадратичной нелинейности. Предполагали перед расчетами, что возникновение сложных волновых структур, содержащих четыре вихря, вызвано членом $\frac{1}{4}\beta C^{-2}J_r^2$ в (22.63). Мы также рассматривали вариант (22.62). Вклад его в волновую эволюцию зависел от координаты, и этот вклад было трудно истолковать. Поэтому на том варианте расчетов мы не останавливаемся.

В верхнем ряду рис. 266 представлены данные экспериментов, которые мы пытались описать. На следующих кривых представлены результаты расчетов. При расчетах кривых 1 сдвиг фаз не учитывался, поэтому применялось выражение (22.70). При расчетах кривых 2 фазовый сдвиг полагался равным π , поэтому применялось выражение (22.71). Использовалось уравнение (22.59). Кривые 1 и 2 похожи друг на друга, так как рассчитывались при близких параметрах, а именно величины $\beta\beta_1^{-1} = 0.5$ (22.57), $\frac{1}{4}\beta C^{-2} = 5.5$ (22.63), $K=0.6$ (22.64), $7=0.00002$ (22.65) и $\zeta=0.02$ (22.66) совпадали. Отличие кривых 1 и 2 определяется величинами $\xi=0.005$ и $I=1950$ (кривая 1) и $\xi=0.01$ и $I=1225$ (кривая 2). Кривые 1а и 2а являются авторской интерпретацией кривых 1 и 2. Эти кривые призваны подчеркнуть определенное подобие расчетов и данных

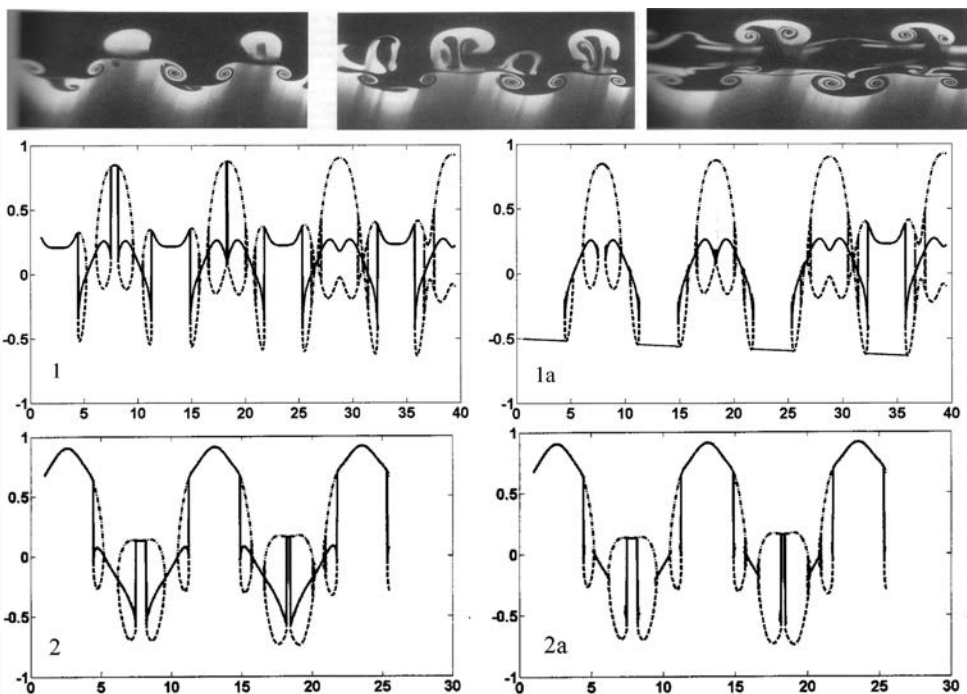


Рис. 266. Результаты экспериментов [1] и попытки моделирования их как трансрезонансного волнового процесса.

экспериментов (рис. 220 и верх рассматриваемого рисунка [1]). Заметим, что в кривые 1a внесены прямые, отсутствующие в рассчитанных кривых 1.

Таким образом, мы нашли, что выражение (22.63), введенное в (22.59), существенно усложняет волновую картину. В эволюционирующих внутри резонансной полосы волнах возникают новые замкнутые структуры. Т.е., согласно нашей интерпретации, возникают новые вихри. Такое истолкование результатов расчетов позволяет говорить об определенном их соответствии с экспериментами.

Проблема возникновения вихрей при распространении волн — основная для настоящей главы. Как отмечалось, в процессе волновой эволюции количество возбуждаемых вихрей может меняться. В частности, вместо двух явно выраженных спиральных структур (рис. 264) возникают трех- или четырехвихревые структуры [1] (см. рис. 220, 264 и 265). Возможность подобного усложнения показана на рис. 266. Результаты дополнительного исследования, приведены на рис. 267.

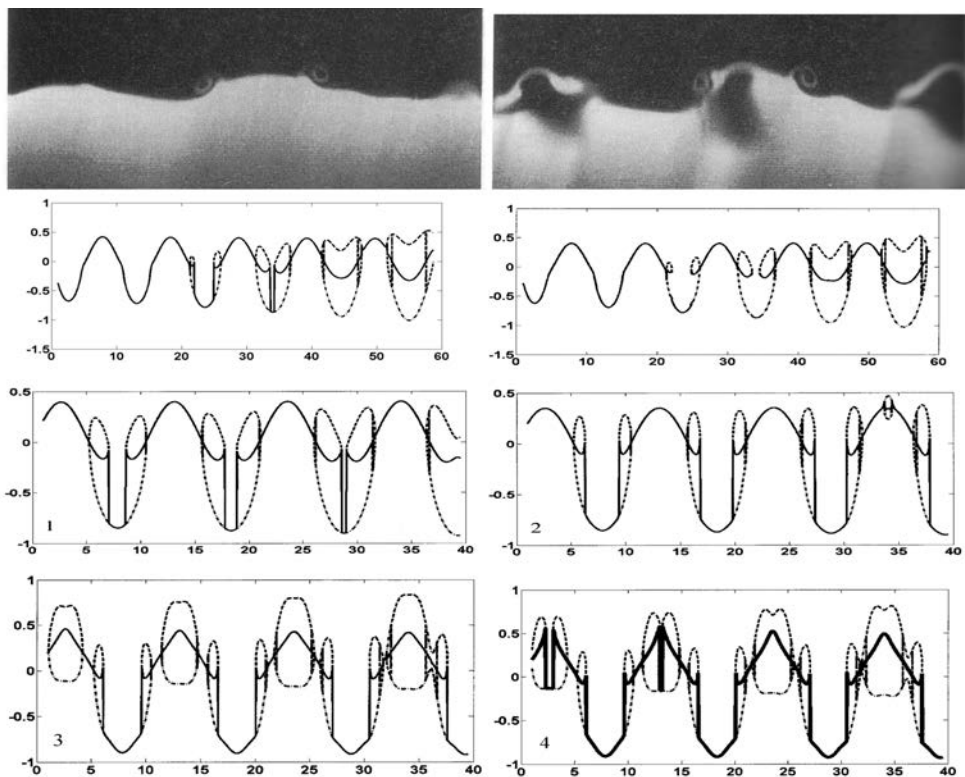


Рис. 267. Данные экспериментов [1] и результаты моделирования эволюции двухвихревых волновых структур в четырехвихревые волновые структуры.

На верху рис. 267 даны волны, наблюдаемые в эксперименте [1]. Кривые на следующей строчке моделируют эксперимент. Слева помещены расчетные кривые, справа — их интерпретация. При расчетах использовалось уравнение (22.57), и мы полагали $\beta\beta_1^{-1} = 0.5$ (22.57), $K = 0.6$ (22.64), $\xi = 0.1$ и $\gamma = 0.0001$ (22.65) и $\zeta = 0.03$ (22.66), $I = 1925$. В выделенной зоне резонанса вынуждающая волна практически не усиливается, но может обрамляться замкнутыми кривыми («ушами»), которые явно соответствуют вихрям, отчетливо различимым на фотографиях (верх рис. 267).

При расчетах кривых 1–4 использовались уравнения (22.59) и (22.63). Мы полагали $\beta\beta_1^{-1} = -0.5$ (22.59), $K = 0.6$ (22.64), $\xi = 0.005$ и $\gamma = 0.00002$ (22.65) и $\zeta = 0.02$ (22.66), $I = 1925$. Изменялась величина $\frac{1}{4}\beta C^{-2}$ в (22.63). Она полагалась равной 0 (кривая 1), -2.5 (2), -5 (3) и -5.5 (4). Так как в процессе прохожде-

ния резонансной полосы скорость C волны меняется, то мы полагаем, что кривые 1–4 в какой-то мере характеризуют возможную трансрезонансную эволюцию волн. В заключение отметим, что теоретические кривые u_a , представленные на рис. 267, находились согласно (22.71).

Рассмотрим теперь результаты расчетов и экспериментов, представленных на рис. 263–267 совместно. Конечно, из их рассмотрения не видно явно подобия результатов расчетов и эксперимента. В частности, нет хорошего соответствия экспериментов и расчетов, показанных на рис. 266 и 267. Представленные там эксперименты лучше соответствуют кривым из разделов 22.4 и 22.5. Возможно это связано с тем, что кривые рис. 266 и 267 найдены для начала трансрезонансного процесса, когда координата и R малы, тогда как теория разделов 22.4 и 22.5 предполагает значительные a и R . Лучше согласуются расчет и эксперимент на рис. 263 и 264. Интересно, что представленные там теоретические кривые согласуются с кривыми рис. 248. Но, несмотря на недостатки, из расчетов следует, что теоретическая модель в принципе учитывает возможность зарождения и возникновения все новых вихрей в процессе трансрезонансной эволюции волн, что согласуется с экспериментом и является принципиально важным. В главе 9 мы показали аналитически, что при своем распространении простая гармоническая волна порождает все более и более высокие гармоники. Если принять во внимание расчеты этой главы, то *можно предположить, что при своем распространении и эволюции простая гармоническая волна за период колебания может породить все большее количество не только высоких гармоник, но и вихрей.*

На этом мы прекратили расчеты катастрофических вихревых волн. В целом, мы выполнили нашу основную задачу. Во-первых, показали, что развитая теория описывает начало их зарождения. Во-вторых, нашли, что усиление волн на поверхности раздела сред и зарождение там вихрей может быть связанным с существованием в пространстве некоторого резонансного условия.

Замечание, заключающее исследование. Очевидно, что волны при своем распространении могут порождать все более высокие гармоники (см. разделы 9.1–9.3). Последние могут порождать вихри. Все это может привести к турбулизации волновой среды. Наряду с этим также трудно представить турбулентные процессы, не сопровождаемые зарождением волн. Видимо, последний факт первым математически рассмотрел Лайтхилл [72]. Согласно ему, порождаемые турбулентностью волны описываются линейным неоднородным волновым уравнением. Но, как уже подчеркивали, сама турбулентность — тоже следствие волновых процессов. Следовательно, ее возникновение также может быть описано волновыми уравнениями.

Согласно моделям разделов 22.4 и 22.5, возникновение вихрей связано не только с высокой (кубической) нелинейностью, но с эффектами вязкости. Однако модель раздела 22.6 связывает появление вихрей только с нелинейностью. На первый взгляд здесь имеется определенное несоответствие выводов. Однако несоответствие не противоречит известному результату теории турбулентности, согласно которому вязкость важна только при наличии в среде высокочастотных гармоник и, обычно, в начале возникновения турбулентности. По мере ее развития длины волн увеличиваются, а вязкие потери уменьшаются. Возникновение и развитие крупных вихрей зависит от нелинейных эффектов.

Задача сведения исследования возникновения разнообразных турбулентных процессов к решению нелинейных волновых уравнений и анализу трансрезонансных явлений была поставлена в [3]. Были сформулированы вопросы — нельзя ли взглянуть на процесс возникновения турбулентности с позиций теории трансрезонансных (катастрофических) волн? Связано ли зарождение турбулентности с трансрезонансными переходами? Полученные в этой главе результаты, явно связывающие возникновение вихрей с волновым процессом и резонансами, в определенной мере отвечают на эти вопросы.

Действительно, в этой главе мы показали возможность изучения зарождения вихревых волн, которые являются важнейшим элементом большинства турбулентных явлений, на основе теоретического исследования катастрофических волн, возникающих при трансрезонансных процессах.

23. От атомов до ранней Вселенной

Намного лучше предвидеть даже без уверенности, чем не предвидеть вообще.

Пуанкаре

В этой главе мы продолжим исследование катастрофических волн. Теперь мы попытаемся распространить полученные выше результаты на неоднородные волны, распространяющиеся в физических полях. В качестве уравнения поля принимаем уравнение Клейна-Гордона. Область применения этого уравнения чрезвычайно широка. Мы уже упоминали, что из него как частный случай следует уравнение Шредингера. Здесь мы также подчеркнем, что уравнение Гросса-Питаевского также следует из уравнения Клейна-Гордона, так как нелинейное уравнение Шредингера практически то же самое, что и уравнение Гросса-Питаевского.

Уравнение Клейна-Гордона является основным уравнением для моделирования начальных возмущений плотности Вселенной непосредственно после окончания инфляционной стадии ее расширения. С другой стороны, из сказанного выше следует, что оно также описывает развитие возмущений в БЭК (Бозе-Эйнштейн конденсате). Таким образом, это замечательное уравнение еще раз подтверждает мысль о возможности моделирования процессов в ранней Вселенной на основе экспериментального и теоретического изучения БЭК.

Для нашего исследования важно то, что скорость света в БЭК может падать почти до нуля. Поэтому скорость волн плотности может там совпадать со скоростью света. Не объясняет ли это высоко-нелинейные волны, существующие в БЭК, и появление там вихрей? С другой стороны, свет в плазме ранней Вселенной также распространялся очень медленно со скоростью, близкой скорости волн плотности. Не определяет ли этот резонанс возникновение в плазме ранней Вселенной вихрей [3]? Указанные резонансы подводят к мысли, что в БЭК и плазме могут возникать катастрофические волны и вихри, аналогичные рассмотренным в предыдущих главах этой части и других частях книги.

В этой главе, исходя из уравнения Клейна-Гордона, мы выводим уравнения, аналогичные уравнениям для резонансных волн, распространяющихся по струне, мембране, поверхности воды или гранулированной среды, а также поверхности раздела оживленных или жидких сред. Делается предположение, что эти резонансные волны могут в какой-то мере соответствовать сильно-нелинейным волнам плотности, существовавшим во времена ранней Вселенной. Кроме сказанного, в главе намечается путь моделирования некоторых сильно-нелинейных волновых патенов, например, «квантового миража».

Заметим, что используемые в главе параллели являются не совсем привычными и очевидными. Автору приходится полагаться на аналогии между явлениями, которые он понимает, и тем, в чем он не уверен, чтобы прийти к некоторым результатам этой главы.

23.1. «Звучащая» Вселенная

И не сорвать тебе цветка,
Не стронув звезд.

Френсис Томпсон

Известно, что в плазме ранней Вселенной могли возникать зоны сгущения. Эти очаги сжатия сменялись затем разрежением, что в последующем приводило к локальным колебаниям гравитации и давления, порождающим сферические волны. В последнее десятилетие в ряде статей, опубликованных в ведущих журналах *Nature* и *Science* (см., например, [81–84]), приводится образное сравнение ранней Вселенной со звучащим колоколом или наполненным водой бассейном, подразумевая, что во всех этих системах возникают резонансные (собственные) волны или колебания. Сейчас, спустя более чем 13 миллиардов лет, Вселенная расширяется во все стороны равномерно, но, как считают некоторые авторы, так было не всегда. В начале, хотя это трудно представить, какое-то время расширение шло только в одной плоскости, а по перпендикулярной этой плоскости оси Вселенная сжималась — подобно мячику, отскакивающему от стенки. Направления расширения–сжатия менялись, Вселенная сжималась то с одной, то с другой стороны, продолжая, конечно, в целом, расширяться. Таким образом, можно в этом случае говорить о собственных, т.е. резонансных, формах колебаний ранней Вселенной. Однако, возможно, звучание Вселенной определялось не звучанием всего ее объема или ее поверхности, а суммой множества локализованных вибрирующих пространственных источников, напоминающих качественно осцилоны (рис. 234), примеры расчета которых даны на рис. 235, 237 и 239, или пульсирующие пузырьки газа в жидкости (раздел 9.5). Скорость возбуждаемых источниками волн близка скорости фотонов в сверхплотной раскаленной плазме, поэтому из-за трансрезонансных эффектов волновые профили искривлялись и преобразовывались в катастрофические. Волны накладывались друг на друга, образуя динамическую пространственную сетку (патены). Эта сетка областей плотности (неоднородностей) в дальнейшем могла эволюционировать в систему галактик и их скоплений, наблюдаемую во Вселенной. Действительно, крупномасштабная карта Вселенной показывает, что галактики — не изолированные в пространстве образования. Они образуют как бы ячеистую структуру.

История изучения эволюции Вселенной после Большого взрыва насчитывает уже более полувека, но только в последнее десятилетие начали с уверенностью говорить о важности акустических и резонансных процессов для того времени. Это, в первую очередь, связано с данными о микроволновом фоновом излучении, собранными в последние годы аппаратом WMAP (WMAP — это специализированная обсерватория, помещенная на спутнике, в автоматическом режиме наблюдавшая за микроволновым фоновым излучением семь лет. Благодаря этому удалось получить очень точную карту фона), а также в ходе эксперимента BOOMERanG в Антарктике. При детальном рассмотрении на карте обнаружилась сетка зон плотности, которая в некоторых случаях напоминает патены, образованные волнами на поверхности гранулированных сред (рис. 233). Автору она также напоминает крупноячеистую часть внутренности вулканической бомбы, нарисованной Чарльзом Дарвином и представленной на рис. 189. В частности, в фоновом излучении обнаружилось круговые зоны (рис. 268(с)). Не образована ли крупномасштабная ячеистая структура Вселенной волнами плотности, которые некогда по ней распространялись? Все это заставляет исследователей все серьезнее относиться к идее о звучащей ранней Вселенной и к моделированию эволюции в ней возмущений плотности. Тем важнее для нас отметить, что сама идея Большого взрыва была сформулирована русским ученым Александром Фридманом [85, 86]. В частности, он математически описал несколько моделей однородной изотропной нестационарно расширяющейся Вселенной. В последующем выяснилось, что, несмотря на принятые идеализации, теория Фридмана дает удивительно хорошее описание нашей Вселенной. Она легла в основание современной космологии. Однако Фридману не довелось это узнать, он умер в 1925 году от брюшного тифа. В 40-е годы Георгий Гамов начал активно разрабатывать и пропагандировать теорию горячей расширяющейся Вселенной, в которой на ранних стадиях эволюции доминировала радиация. Видимо, ему принадлежит основной вклад в создание теории Большого взрыва [87–92]. Интересно, что в 1924 году Гамов был студентом Фридмана и слушал его лекции по космологическим моделям. В своей замечательной статье, написанной с сотрудниками в 1948 году, Гамов предсказал существование микроволнового фонового излучения, испущенного на очень ранних этапах развития Вселенной, — излучения, которое привлекло такое большое внимание астрофизиков в последние годы [90]. Гамов также создал теорию возникновения различных элементов во Вселенной. Жаль, что эти поистине гениальные результаты Фридмана и Гамова не были отмечены нобелевской премией. Заметим, что эти результаты были достойно развиты в трудах таких известных советских и российских ученых, как Лившиц [93], Сахаров [94], Зельдович и Сюняев [95], Сюняев [96], Новиков и Дорошке-

вич [97, 98]. Они в числе первых начали исследовать микроволновое фоновое излучение и рост начальных малых возмущений в расширяющейся Вселенной. В частности, Сюняев и Зельдович предсказали существование акустических пиков в угловом распределении микроволнового фонового излучения. Положение и относительная интенсивность пиков характеризуют ключевые параметры эволюции ранней Вселенной. В 2000 году первые акустические пики в микроволновом фоновом излучении были обнаружены. Таким образом, благодаря указанным выше исследованиям появилась возможность изучать процессы, сопровождающие Большой взрыв и зарождение Вселенной.

Вместе с тем, несмотря на эти огромные успехи существующие наблюдательные технические средства пока не позволяют, как отмечается в Википедии (Интернет), полностью разобраться в другой важнейшей проблеме — зарождении галактик. Есть несколько конкурирующих теорий, объясняющих это явление, но каждая имеет свои серьезные проблемы. В частности, согласно одной из теорий, области плотности, возникшие на последних стадиях развития ранней Вселенной, эволюционировали затем в звезды. Потом начался процесс гравитационного объединения звезд в скопления и далее в галактики. В последнее время эта теория поставлена под сомнение. Современные телескопы способны «заглянуть» так далеко, что видят объекты, существовавшие приблизительно через 400 000 лет после Большого взрыва. Обнаружилось, что на тот момент уже существовали сформировавшиеся области плотности, которые являются прообразами галактик. В них далее начался процесс возникновения звезд.

Мы изложили очень кратко и приближенно несколько положений, характеризующих схему зарождения и эволюции Вселенной. Отдельные ее этапы современные исследователи анализируют с применением сверхмощных компьютеров. Однако, вместе с тем, имеется опыт упрощенного анализа, основанного на тех или иных аналогиях. В частности, некоторые ученые полагают, что высоко-нелинейные среды, например, сверххолодный газ (БЭК), могут служить моделями плазмы ранней Вселенной [98, 99] и, основываясь на них, можно изучать ее эволюцию. Среди таких сред мы назовем также вертикально-возбуждаемый слой слабосвязного материала. Слои жидкости и гранулированных материалов, рассмотренные в главах 20 и 21, могут отделяться от основания, находиться в состоянии свободного полета и периодически соударяться с вибрирующим основанием. В результате скорость волн ряби, распространяющихся по слою, меняется в очень широких пределах и может падать до нуля, так же как скорость света может падать в БЭК почти до нуля [77]. С другой стороны, скорость акустических волн в ранней Вселенной почти равнялась ско-

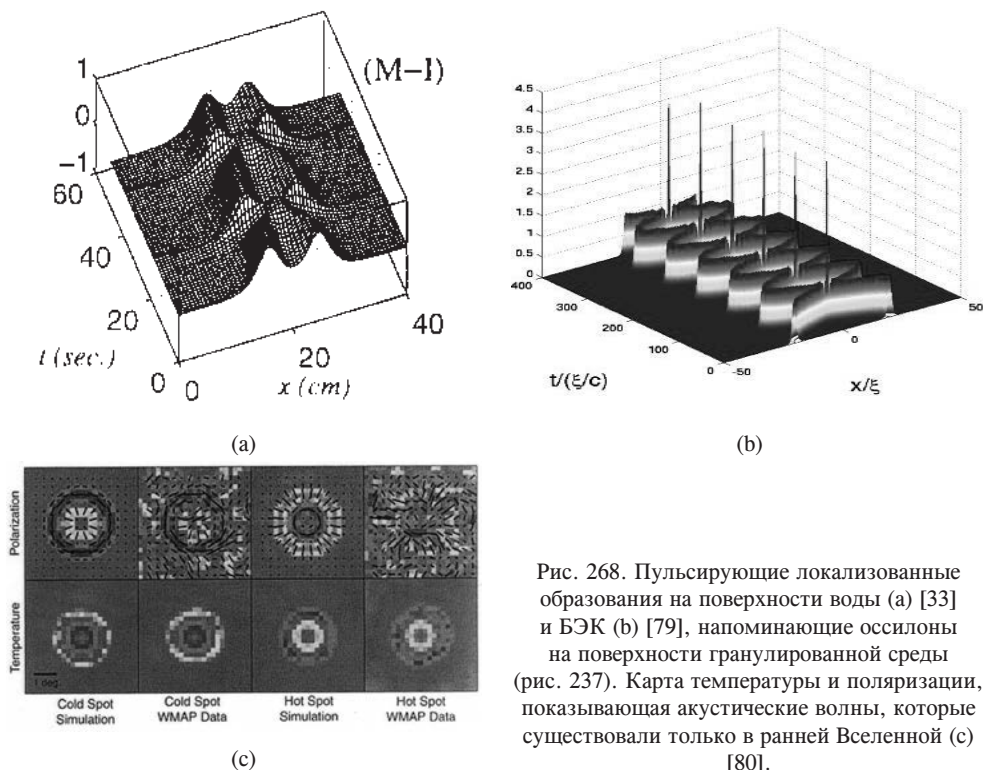


Рис. 268. Пульсирующие локализованные образования на поверхности воды (а) [33] и БЭК (б) [79], напоминающие осцилоны на поверхности гранулированной среды (рис. 237). Карта температуры и поляризации, показывающая акустические волны, которые существовали только в ранней Вселенной (с) [80].

рости света [78], в силу того, что скорость фотонов, сильно-взаимодействующих с окружающей плазмой, была очень мала.

Все это — следствие чрезвычайно сильных нелинейных свойств указанных сред. При возмущении этих сред мы, скорее всего, возбудили бы не гармонические формы колебаний, а нечто более напоминающее волны и вихри. Пульсирующие локализованные образования на поверхности жидких (рис. 241) и гранулированных (рис. 234) сред, локализация возмущений в центре колеблющегося пузырька (рис. 98–100) и вихри, описанные в последних двух главах — все это проявление локальных сингулярностей. Предположим, что множество различных аналогичных сингулярностей, порождающих волны и вихри, существовали и существуют во Вселенной. В последние несколько лет обнаружен след подобных сингулярностей, существовавших в ранней Вселенной. Это кольцевые образования, показанные на рис. 268(с). Они подобны волнам, разбегающимся от камня, брошенного в воду. Если принять модель пульсирующей Вселенной, которая снова в последние годы начинает приобретать

известность, то подобные кольца можно рассматривать как послание из времени предыдущей пульсации Вселенной [80, 81]. Так ли это покажет будущее, в частности, ожидаемая скоро публикация результатов эксперимента «Планк», которые будут почти в 500 раз точнее рассматриваемых до сих пор. Примеры сложных пульсирующих волновых форм на поверхности жидкости и Бозе-Эйнштейн конденсате даны на рис. 268. Возможно подобные пики, порождаемые сходящимися и расходящимися сферическими волнами (рис. 98–100), существовали и в глубинах ранней Вселенной. Возможно их следы обнаружены недавно (рис. 268(c)).

Из приведенного выше для нас особенно интересно то, что в последние годы, благодаря новым данным о микроволновом фоновом излучении, возникновение областей плотности и галактик начали связывать с акустическими гравитационными волнами в ранней Вселенной. Чтобы ввести этот интерес в круг вопросов, которые можно рассмотреть на основе развитой в книге теории, переформулируем его так: можно ли уравнение Клейна-Гордона, которое используется для описания послееинфляционного развития волн в ранней Вселенной, свести к используемым выше алгебраическим уравнениям, описывающим катастрофические волны и эволюцию их в вихри?

23.2. Пример сведения уравнения Клейна-Гордона к алгебраическому уравнению

Хорошие математики видят аналогии между теоремами или теориями, а самые лучшие видят аналогии между аналогиями.

С. Банах

В разделах 22.2 и 22.3 показано, что некоторые модельные уравнения, описывающие волны и течения, могут быть сведены к простейшим уравнениям, описывающим, вместе с тем, формирование катастрофических вихревых волн. Здесь мы получим аналогичный результат для уравнения Клейна-Гордона. Мы уже встречались с одним из вариантов этого уравнения при рассмотрении волн в пузырьковых средах. Этих вариантов очень много. Они используются для описания огромного круга явлений. Достаточно сказать, что из (20.5) и (20.6) (при $\lambda_6 = 0$) следует известное в физике нелинейное уравнение Шредингера [6]. Его можно также рассматривать как некоторый аналог уравнений Максвелла, справедливый для нелинейного релятивистского поля.

Для нас это уравнение очень привлекательно тем, что в случае сильных полей оно содержит высоко-нелинейные члены и оператор Даламбера. В зонах резонанса, где этот оператор обращается в нуль, уравнение может вырождаться в нелинейное алгебраическое уравнение.

Общее представление уравнения Клейна-Гордона (20.5) имеет вид:

$$\Phi_{tt} - c_*^2 \nabla^2 \Phi + c_*^2 \beta_c^2 \partial V / \partial \Phi = 0. \quad (23.1)$$

Выражение для потенциала запишем так [7]:

$$V = V_0 + \left(g^2 T^2 - \frac{1}{2} m^2 \right) \Phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \Phi^4. \quad (23.2)$$

Здесь используются обозначения из [3, 7]. Подставляем (23.2) в уравнение (23.1). В результате оно дает

$$\Phi_{tt} - c_*^2 \nabla^2 \Phi = (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \Phi - \lambda c_*^2 \beta_c^2 \Phi^3. \quad (23.3)$$

Пусть

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U. \quad (23.4)$$

Мы рассматриваем случай, когда в (23.3) член $(m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \Phi$ меньше остальных линейных членов, но больше нелинейного члена. Выражение (23.4) подставляется в (23.3). Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} & (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U)_{tt} - c_*^2 \nabla^2 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U) = \\ & = (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U) - \lambda c_*^2 \beta_c^2 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U)^3. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Далее мы будем рассматривать плоские волны. Введем новые переменные:

$$r = ct - \sum_n^N k_n x_n, \quad s = ct + \sum_n^N k_n x_n. \quad (23.6)$$

Здесь x_n — координаты, $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ и

$$c = c_* + \bar{c}, \quad (23.7)$$

где $\bar{c}$ — возмущение скорости c . Таким образом, предполагается, что скорость волны возмущения отлична от c_* . Например, известно, что скорость распространения волн плотности (звука) в ранней Вселенной составляла $1/\sqrt{3}$ от скорости света. Это отличие учитывает $\bar{c}$. В переменных (23.6) уравнение (23.5) примет вид:

$$\begin{aligned} & \left(c^2 - c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) [(\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U)_{rr} + (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U)_{ss}] + \\ & + 2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U)_{rs} = \\ & = (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U) - \lambda c_*^2 \beta_c^2 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U)^3. \end{aligned} \quad (23.8)$$

Затем мы сводим исследование к решению следующей системы уравнений, вытекающей из (23.8):

$$\left(c^2 - c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) (\Phi_{rr}^{(1)} + \Phi_{ss}^{(1)}) + 2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) \Phi_{rs}^{(1)} = 0, \quad (23.9)$$

$$\begin{aligned} & \left(c^2 - c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) (\Phi_{rr}^{(2)} + \Phi_{ss}^{(2)}) + 2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) \Phi_{rs}^{(2)} = \\ & = (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \Phi^{(1)}, \end{aligned} \quad (23.10)$$

$$\begin{aligned} & \left(c^2 - c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) (U_{rr} + U_{ss}) + 2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) U_{rs} = \\ & = (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 (\Phi^{(2)} + U) - \lambda c_*^2 \beta_c^2 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + U)^3. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Пусть

$$c^2 - c_*^2 \sum_n^N k_n^2 = 0. \quad (23.12)$$

Рассмотрим первые два уравнения системы, учитывая (23.12). Не останавливаясь на деталях их решения, которые аналогичны описанным в разделах 9.2, 21.1 и 22.2, запишем следующие выражения:

$$\Phi^{(1)} = J(r) + j(s), \quad (23.13)$$

$$\begin{aligned} & \Phi^{(2)} = J_*(r) + j_*(s) + \\ & + \frac{1}{2} (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left(c^2 + c_*^2 + \sum_n^N k_n^2 \right)^{-1} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{O} \mathcal{B}(r) dr + r \mathcal{O} \mathcal{B}(s) ds \quad \mathbf{1} \end{aligned} \quad (23.14)$$

Решение (23.14) явно зависит от времени и координаты. Теперь обратимся к третьему уравнению (23.11). Учитывая (23.12)–(23.14), его можно записать так:

$$\begin{aligned} & 2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) U_{rs} = (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left\{ J_*(r) + j_*(s) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left(c^2 + c_*^2 + \sum_n^N k_n^2 \right)^{-1} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{O} \mathcal{B}(r) dr + r \mathcal{O} \mathcal{B}(s) ds \quad \mathbf{1} + U \left. \right\} - \\ & - \lambda c_*^2 \beta_c^2 \left\{ J(r) + j(s) + J_*(r) + j_*(s) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left(c^2 + c_*^2 + \sum_n^N k_n^2 \right)^{-1} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{O} \mathcal{B}(r) dr + r \mathcal{O} \mathcal{B}(s) ds \quad \mathbf{1} + U \left. \right\}^3. \end{aligned} \quad (23.15)$$

Уравнение очень сложно для анализа. Поэтому рассмотрим возможности его упрощения. Первым делом исключим в нем члены, явно содержащие время. Для этого сначала избавимся в (23.15) от вековых членов. Они могут быть удалены с помощью методики, изложенной в разделах 9.2, 21.1 и 22.2. После уничтожения членов, явно зависящих от времени (вековых членов), запишем выражение $\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ так:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} = & J(r) + j(s) + \bar{J}(r) + \bar{j}(s) + \\ & + \frac{1}{2}(m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right)^{-1} 2 \\ & \times \int_0^s (s-r) \mathcal{A}(r) dr + (r-s) \int_0^s \mathcal{A}(s) ds \end{aligned} \quad (23.16)$$

Как следующий важный шаг упрощения уравнения (23.15) мы будем рассматривать волны, бегущие справа налево. В этом случае (23.15) дает

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} = & J(r) + \bar{J}(r) - \\ & - \frac{1}{2}(m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right)^{-1} \sum_n^N k_n^2 x_n \mathcal{A}(r) dr. \end{aligned} \quad (23.17)$$

В результате (23.15) приводится к алгебраическому уравнению для U :

$$\begin{aligned} & (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \times \\ & \times \left[\bar{J}(r) - \frac{1}{2}(m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right)^{-1} \sum_n^N k_n^2 x_n \mathcal{A}(r) dr + U \right] - \\ & - \lambda c_*^2 \beta_c^2 \left[J(r) + \bar{J}(r) - \frac{1}{2}(m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left(c^2 + c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right)^{-1} 2 \right. \\ & \left. \times \sum_n^N k_n^2 x_n \mathcal{A}(r) dr + U \right]^3 = 0. \end{aligned} \quad (23.18)$$

В случае одномерной волны, бегущей в направлении оси x_1 , уравнение (23.18) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \left[\bar{J}(r) - \frac{1}{2}(m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 (c^2 + c_*^2 k_1^2)^{-1} k_1^2 x_1 \mathcal{A}(r) dr + U \right] - \\ & - \lambda c_*^2 \beta_c^2 \left[J(r) + \bar{J}(r) - \frac{1}{2}(m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 2 \right. \\ & \left. \times (c^2 + c_*^2 k_1^2)^{-1} k_1^2 x_1 \mathcal{A}(r) dr + U \right]^3 = 0. \end{aligned} \quad (23.19)$$

Если $c^2 \neq c_*^2 \sum_n^N k_n^2$, то в окрестности условия (23.12) уравнение (23.19) дополняется второй производной и принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left(c^2 - c_*^2 \sum_n^N k_n^2 \right) U_{rr} + (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 2 \\ & \times \left[\bar{J}(r) - \frac{1}{2}(m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 (c^2 + c_*^2 k_1^2)^{-1} k_1^2 x_1 \mathcal{A}(r) dr + U \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda c_*^2 \beta_c^2 \left[J(r) + \bar{J}(r) - \frac{1}{2} (m^2 - 2g^2 T^2) c_*^2 \beta_c^2 \right. \\
& \left. \times (c^2 + c_*^2 k_1^2)^{-1} k_1^2 x_1 \frac{d}{dr} (r) dr + U \right]^3 = 0.
\end{aligned} \quad (23.19a)$$

Таким образом, мы свели уравнение (23.3) к уравнениям (23.19) или (23.19a) для U . Некоторые коэффициенты этих уравнений содержат явно координату. Интересно, что (23.19) и (23.19a) имеют коэффициент $(m^2 - 2g^2 T^2)$, который может играть роль трансрезонансного параметра, если он меняется от нуля. Можно предполагать, что условие малости разности $c^2 - c_*^2 \sum_n^N k_n^2$ (23.12)

является условием глобального резонанса во всем объеме ранней Вселенной, а условие малости $(m^2 - 2g^2 T^2)$ играет роль локального резонанса. Из самой структуры уравнений следует, что при соответственно выбранных параметрах они описывают многие катастрофические волны, рассмотренные в этой книге.

Из (23.19) и (23.19a) можно вывести многие уравнения, которые использовались выше. Следовательно, (23.19) и (23.19a) описывают широкий спектр волн подобных цунами, гигантским океанским волнам, осцилонам и волнам Фарадея, а также волн, обрамленных вихрями или эволюционирующих в вихри. Это согласуется с публикациями: Miniati, F. et al., 2000. Properties of cosmic shock waves in large-scale structure formation. *Astrophys. J.*, 542, 608–621 и «Oscillons after inflation» M.A.Amin, R.Easther, H. Finkel, R. Flauger, M.P. Hertzberg. 2011. arXiv:1106.3335v2 [astro-ph.CO], результаты которой созвучны представленным в настоящем разделе, а также в [3, 126]. Сказанное делает задачу детального изучения решений этих уравнений очень интересной. У нас нет возможности реализовать этот интерес, так же как приступить к исследованию катастрофических волн, описываемых уравнениями электромагнитного поля (см. (20.4)).

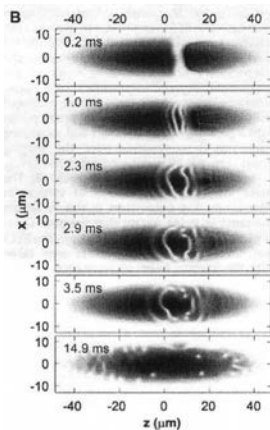
Таким образом, мы рассмотрели многомерное уравнение Клейна-Гордона и свели его к знакомым нам алгебраическому или обыкновенному дифференциальному уравнениям. Это позволяет предположить, что в соответствующих физических полях могут возникать катастрофические волны, подобные рассмотренным в этой книге.

23.3. От атома до ранней Вселенной

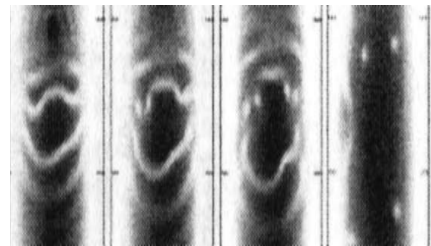
Наблюдаемый мир — всего лишь след катастрофических волн, прокатывавшихся по ранней Вселенной?

В настоящем разделе мы кратко рассмотрим некоторые вопросы возникновения катастрофических волн в ранней Вселенной. Отметим, что хотя основные проблемы нелинейной акустики ранней Вселенной были сформулированы сорок лет назад, вопросы возникновения катастрофических волн и эволюции их в вихри тогда еще не ставились.

Начнем с того, что из волнового уравнения для поля (раздел 23.2) мы получили уравнения, которые качественно никак не отличаются от уравнений, полученных для поверхностных резонансных волн. Эти уравнения могут описывать эволюцию волн в вихри. Таким образом, открывается возможность единообразного описания резонансных катастрофических волн в совершенно разных физических системах. В частности, из этого результата следует, что трансрезонансная эволюция волн и вихрей, исследованная в книге, может быть полностью перенесена на динамику поля. Резонансные условия усиления и эволюции волн могут быть, по нашему мнению, во всех полях и средах. Например, вихри в жидком гелии возникают, когда ионы начинают двигаться через жидкость быстрее, чем некоторая критическая скорость [100]. Из этого следует, что волны поля могут быть также разнообразны, как волны на поверхности раздела сред. Действительно, хорошо известно, что ударные волны, солитоны и вихри существуют в БЭК.



(a)



(b)

Рис. 269. Развитие начального возмущения плотности БЭК в вихри: общий вид фотографии (a) и четыре увеличенных, повернутых на 90 градусов, фотографий (b). Светлые точки на фото соответствуют вихрям [101] (см. также рис. 245).

На рис. 269(а) видно, как первоначальное возмущение (верхнее фото) искривляется, в результате чего на профиле возникшей волны появляются складки, которые затем порождают вихри. Заметим, что в этом эксперименте волны света в БЭК распространялись очень медленно со скоростью, близкой скорости звука в конденсате, т.е. выполнялось определенное резонансное условие между звуком, т.е. волнами плотности, и светом.

Для нас возможность такого резонанса очень важна, так как в этом случае развитая в книге теория резонансных катастрофических волн сразу распространяется на область взаимодействия света со звуком. Но может это важно не только для нашей теории? Мы думаем, что — да, ведь были времена, когда наша Вселенная только появилась после Большого взрыва и когда в ней скорость звука составляла $1/\sqrt{3}$ от скорости света. Следовательно, там были условия для резонансного усиления возмущений плотности и эволюции их в вихри, которые нам известны под именем спиральных галактик.

Рассмотрим кратко важные для нас первые этапы эволюции самой Вселенной. При этом мы следуем [7]. Первый этап — это Большой взрыв и инфляция. Для нас этот этап интересен тем, что благодаря квантовым эффектам во Вселенной возникли начальные возмущения плотности. Они очень малы, так как и Вселенная не больше футбольного мяча, однако, они определяют дальнейшее развитие Вселенной. Второй этап, который продолжается около секунды, для нас важен тем, что его динамика описывается уравнением Клейна-Гордона. Это уравнение содержит малые возмущения, проистекающие из первого этапа. Если принять условие резонанса, то это уравнение сводится приблизительно к рассмотренному в разделе 23.2. Третий этап — плазмы. Происходит дальнейшее развитие возмущений, распространяющихся теперь в плазме.

Математическое описание и исследование волн в космической сверхплотной плазме того времени — очень сложная задача. Имеется много подходов к исследованию возникающих там волн, волновой турбулентности и зарождающихся галактик. В те далекие времена плотность фотонов была высока и давление света в миллионы раз превосходило давление вещества. Для нас важно, что на этом этапе Вселенная продолжала быть очень горячей и плотной, так что фотоны все время встречали заряженные частицы и имели невысокую скорость. Вместе с тем скорость звука сильно не менялась, т.е. выполнение условия резонанса продолжалось. Поэтому возмущения резонансно усиливались и эволюционировали в волны плотности, где давление фотонного газа доминировало. Соответственно, могли иметь место исследованные в этой книге трансрезонансные процессы, в частности, эволюция волн в вихри. Приблизительно 350 000 лет после Большого взрыва температура Вселенной упала

ниже 3000 градусов по Кельвину. Электроны и протоны в плазме начали объединяться и формировать атомы. Фотоны практически не взаимодействуют с нейтральными атомами, и поэтому свет начал распространяться по Вселенной. Именно этот свет известен как микроволновое фоновое излучение. Таким образом, он несет информацию о Вселенной почти 400 000 лет назад давности. В момент образования нейтральных атомов условия резонанса перестали выполняться, но к этому времени Вселенная была заполнена вихревыми образованиями — зародышами галактик.

Обсуждаемая эволюция показывает, что влияние квантовых эффектов, которое обычно (даже в БЭК) проявляется в малых масштабах, в инфляционно расширяющейся ранней Вселенной быстро увеличивалось и становилось космологически значимым. Таким образом, квантовые неоднородности в результате инфляционного расширения могли быть растянуты до значимых размеров, обеспечивая семена для формирования больших астрофизических тел наподобие галактик. Следовательно, возникшие впоследствии кластеры галактик и сами галактики являются макроскопическим проявлением квантовых эффектов и резонансного развития нелинейных волн плотности на ранних этапах эволюции Вселенной.

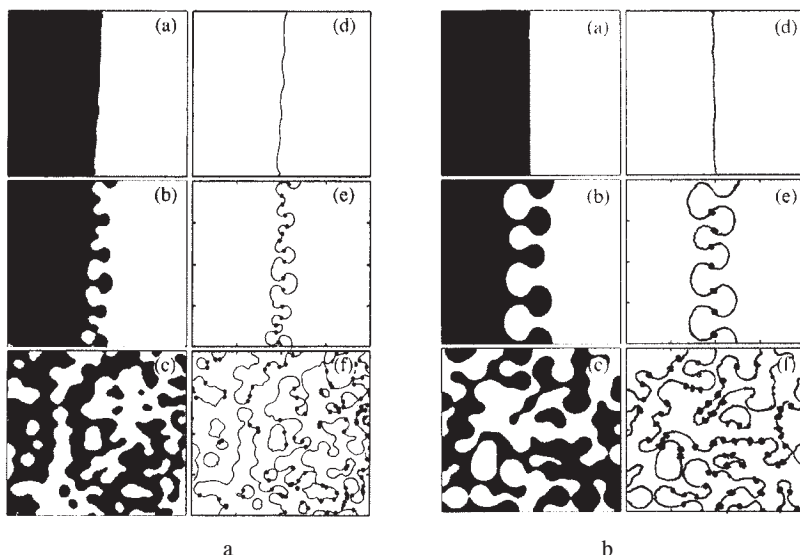


Рис. 270. Эволюция начального возмущения границы раздела сред в «эластика» формы, вихри и турбулентность. Возникновение вихрей (точки) в течение реакции Белоусова-Жаботинского (а). Возникновение вихрей и турбулентности согласно численному решению уравнения Гинзбурга-Ландау (b) [55].

Чтобы проиллюстрировать описанную умозрительную последовательность событий, приведем некоторые результаты экспериментов и расчетов. Они не имеют прямого отношения к космогонии, тем не менее, возможно, отражают динамику зарождения вихрей во Вселенной.

В работе [55] было проведено исследование эволюции возмущения на поверхности раздела сред в вихри. Мы можем поставить эти возмущения в соответствие начальным возмущениям, возникшим после рождения Вселенной. На рис. 270 (а, слева), взятом из [55], показано, как поверхность раздела сред изменяется в результате роста начальных возмущений (время = 100, 300 и 1700 сек). Рис. 270 (а, справа) показывает положения вихрей для тех же моментов времени. Таким образом, там продемонстрирована эволюция первоначально гладкой границы в грибовидные волны, которые далее трансформируются в хаотическую смесь двух сред и вихрей. Рис. 270b показывает аналогичное развитие неустойчивости раздела сред, рассчитанное по уравнению Гинзбурга-Ландау. Если принять во внимание рис. 270, то можно представить, что после возникновения возмущений во Вселенной они сразу после периода инфляции могли эволюционировать в «эластика» формы и вихри.

В целом, представленные на рис. 270 результаты для нас не новость. Эволюция волн в вихри в результате неустойчивости показана на рис. 97, 204, 247, 253, 255, 257 и 259. Результаты расчетов, качественно описывающие этот процесс, представлены на рис. 254, 256 и 262–267. Однако на рис. 270 мы видим не только развитие волн в вихри, но и результаты этого развития — кластеры вихрей. Не было ли нечто подобное на начальных этапах эволюции Вселенной? В конце третьего этапа фотонное давление резко упало, скорость волн тоже. Теперь трудно даже представить, что когда-то скорость волн плотности была близка скорости света, т.е. существовало глобальное условие резонанса. Действительно, исследуя современное состояние Вселенной, локальная плотность вещества в которой почти везде почти равна нулю, невозможно вообразить в ней распространение акустических возмущений.

Суммируем сказанное. Согласно теории Большого взрыва, во время инфляционного расширения возникли крошечные флуктуации — пики плотности и зоны разрежения. Области плотности, где гравитация была выше, воздействовали на окружающую среду, как упавший камень на поверхность воды. В результате в плазме Вселенной возникли волны. Затем эти волны начали нелинейно взаимодействовать друг с другом, резонансно усиливаться и трансформироваться в катастрофические волны. Возможно, все это напоминало развитие неустойчивости Рихтмайера-Мешкова (рис. 97, 259) или опрокидывание внутренних волн (рис. 205, 255, 257). Возникающие при этом «брызги»

плотности и вихри послужили зародышами, эволюционирующими со временем в галактики разной формы и их скопления.

Можно предполагать, что непосредственно после Большого взрыва при бесконечно быстром расширении на почти бесконечно малом отрезке времени возникали хаотически распределенные возмущения плотности, порождающие волны давления и плотности. Однако из них до наших дней Вселенная избирательно, как колокол, сохранила только основные гармоники. Следы же гравитационных волн от начальных хаотически распределенных возмущений и порожденных ими хаотических волновых патенов плотности отпечатались в виде галактик. Качественно процесс возникновения галактик мог соответствовать представленной на рис. 270 картине эволюции начальных возмущений в вихри. Там начальная неправильность трансформируется в «эластика» форму, кластеры вихрей и струй. Конечно, подобную сложную трансформацию невозможно описать на основе теории разделов 22.4 и 22.5. Однако развитые в главах 20–22 подходы к моделированию катастрофических волн могут, возможно, дать некоторое понимание эволюции ранней Вселенной.

Рассмотрим преобразование гармонической ряби и «эластика» форм в эллиптические изолированные структуры, которые, исходя из рис. 248, 254, 256, 258, 260–267, можно трактовать как вихри. Пусть эволюцию ряби можно описать следующим уравнением:

$$-0.11(J+\dot{)}^5 + (J+\dot{)}^3 + (3R / 2^{2/3})J++ \cos\Omega a = 0. \quad (23.20)$$

Мы принимаем в (23.20), что $R = 0.0025\Omega a + \tanh(0.025\Omega a)$, где Ωa изменяется от 20 до -980 [3]. Результаты вычислений представлены на рис. 271.

Согласно рис. 258с и 271, гармоническая волна растет и преобразовывается сначала в ударную, а затем в грибовидную волну. Картина усложняется, когда $R(r) \approx -0.1$. В результате образуются два ряда подобных эллипсу структур (вихри) и пилообразная кривая. Подобные эллипсу структуры (вихри) уменьшаются и исчезают, когда $R \approx -1.2$, а пилообразная кривая преобразовывается

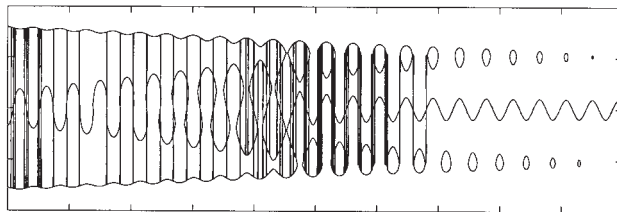


Рис. 271. Рост волн ряби, образование грибовидных волн, петель и групп, подобных эллипсоиду структур (вихрей). По оси откладывается трансрезонансный параметр R , который изменяется от 0.4 до -1.25 [3].

в гармоническую кривую. Напомним, что кривые рисунков определяются решениями алгебраического уравнения пятой степени. Поэтому, в принципе, для каждого значения R возможен перескок с одной ветки решения на другую, т.е. скачкообразное изменение рассчитываемых величин.

В целом, рис. 271 можно трактовать как некоторую модель процессов, сопровождающих зарождение вихревой «дорожки» Кармана. С другой стороны, при самом идеализированном анализе этот рисунок можно трактовать как бифуркационную диаграмму типа «вилки» (см. рис. 261 и 263А), которая описывает эволюцию гармонических волн в «эластика» формы и вихри. В начале диаграммы гармоническая волна искажается в ударную и далее в «эластика» форму. Этот участок как бы соответствует «ручке вилки». Далее следует переходная зона, где возможны многочисленные перескоки из одного состояния в другое. Зона соответствует точке бифуркации «вилки». За $R \approx -0.7$ формируются пилообразная кривая и две цепочки устойчивых эллипсоидальных структур. Они как бы образуют три «зуба вилки». Конечно, описанная схема — только очень грубая диаграмма возможной бифуркационной картины, так как проследить влияние перескоков на эволюцию волн трудно, да эта цель и не ставится здесь.

Рис. 258с и 271 можно трактовать также как некоторый обобщенный аналог картин трансрезонансной эволюции начальных возмущений, представленных на рис. 217–219, 245 (b, c), 248, 253–267. В работе [3] высказана мысль, что рис. 271 дает схематическое представление о резонансном характере развития возмущений в ранней Вселенной, приводящем к зарождению вихрей и галактик.

Таким образом, в последних разделах мы изложили и в какой-то мере иллюстрировали достаточно широко распространенную точку зрения, объясняющую формирование галактик волновыми процессами, возникшими после Большого взрыва. Некоторая оригинальность изложенного материала связана только с тем, что мы подчеркиваем резонансный характер эволюции первоначально-гладких возмущений. Как только их скорость стала много ниже скорости света (фотонов) и условие резонанса даже приближенно перестало выполняться, то образование зародышей галактик прекратилось. Согласно такой точке зрения, в настоящее время галактики только эволюционируют. Возможны слияния малых галактик в большие, но появление новых сгущений плотности космической среды, где может начаться процесс образования галактик, не возможен.

23.4. Единообразное описание резонансных катастрофических волн

Величайшее искусство как в теории, так и в практической жизни состоит в том, чтобы превратить проблему в постулат.

Гете

Колебания поверхностей характеризуются обычно определенными собственными формами (собственными функциями или собственными модами). Этим формам соответствует набор собственных чисел. Они часто определяются, другими словами, как резонансы. Например, собственными модами колебаний струн, газа в трубах и воды в контейнерах простейшей формы служат синусоидальные функции, которым соответствуют определенные собственные числа (резонансные частоты). Однако это справедливо только для волн, имеющих очень малую амплитуду. Если амплитуда колебаний значительна, то начинают играть роль нелинейные эффекты. В результате значения собственных частот и форм колебаний меняются [3–5, 26, 102–104].

Управляющее уравнение. В [3] была сделана попытка единообразного описания многих волн, возникающих в окрестности резонансов. Было принято, что решение многих волновых уравнений в окрестности резонанса можно представить в виде двух бегущих независимых волн, каждая из которых описывается следующим обыкновенным уравнением (21.48):

$$J_{++} D_2 J_{++} D_4 J_{++} D_1 (J_{+})^2 + D_3 (J_{+})^3 + D_* J_{-} = d_* . \quad (23.21)$$

Очевидно, что в случае бесконечно малых возмущений последнее уравнение может дать некоторый набор гармонических функций, определяющих собственные формы колебаний и собственные числа некоторой идеализированной системы. Но что будет, если волны будут катастрофическими? Другими словами, во что эволюционируют гармонические функции, определяющие волновое решение линеаризованных задач в случаях резонансов?

Читатель может видеть, что исследование почти всех рассмотренных в книге волн сводится к решению различных упрощенных выражений для (23.21). Исходя из накопленного опыта, мы решили исследовать суммы (или разности) функций

$$J(r) - J(s), \quad (23.22)$$

где $J(r)$ и $J(s)$ — решения уравнения (23.21). Эти решения искали в виде (21.48). Было принято, что

$$J(r) = B \tanh(e \sin \gamma_-) \cos^k \gamma_- + A \operatorname{sech}^2(e \sin \gamma_-) \cos^k \gamma_- + C \cos^z \gamma_-, \quad (23.23)$$

$$J\zeta(s) = B \tanh(e \sin 7_+) \cos^k 7_+ + A \operatorname{sech}^2(e \sin 7_+) \cos^K 7_+ + C \cos^z 7_+, \quad (23.23a)$$

где $\zeta_- = \pi L^{-1} M(r + c_-)$, $\zeta_+ = \pi L^{-1} M(r + c_+)$, A, B, C, e , — неизвестные константы, k, K, z и M — целые числа, c_-, c_+ — произвольные постоянные, L — длина. Здесь и в (23.22):

$$\begin{aligned} r &= a(t)k_{12} - k_1(x) - k_2(y) - K_{12}(x, y), \\ s &= a(t)k_{12} + k_1(x) + k_2(y) + K_{12}(x, y), \end{aligned} \quad (23.24)$$

$k_1(x), k_2(y), a(t)$, и $K_{12}(x, y)$ — произвольные функции. Можно видеть, что выражения (23.23) и (23.23a) могут аппроксимировать ударные волны, солитоны и волны типа кноидальных. Т.е. это сильно-локализованные волны, разделенные практически невозмущенными интервалами. Конечно, выражения (23.23) и (23.23a) не описывают складчатые волновые профили или вихревые волны, которые, если рассматривать общий случай, описываются уравнением (22.21).

Выражения (23.22), (23.23) и (23.23a) описывают взаимодействие и конкуренцию между нелинейными, рассеивающими и дисперсионными эффектами. Причем (23.23) и (23.23a) могут определять бесконечные спектры волн, потому что $M = 1, 2, 3, \dots$ Выражение (23.23) подставляется в (23.21). Затем, приравнявая к нулю нелокализованные члены и члены, содержащие $\operatorname{sech}^2(e \sin 7_-)$ или $\tanh(e \sin 7_-)$, мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} C(D_2 - z\pi^2 L^{-2} M^{-2}) \cos^z \zeta_- + D_1 B^2 \cos^{2k} 7_- + D_1 C^2 \cos^{2z} 7_- + \\ + 3D_3 C B^2 \cos^{2k+z} 7_- + D_3 C^3 \cos^{3z} 7_- = d_*, \end{aligned} \quad (23.25)$$

$$\begin{aligned} A(D_2 - K\pi^2 L^{-2} M^{-2}) \cos^K \zeta_- - 2Ae^2 \pi^2 L^{-2} M^{-2} \cos^{K+2} 7_- - \\ - D_1 B^2 \cos^{2k} 7_- + 2D_1 A C \cos^{K+z} 7_- + D_4 B e \pi L^{-1} M^{-1} \cos^{k+1} 7_- - \\ - 3D_3 C B^2 \cos^{2k+z} 7_- + 3D_3 A C^2 \cos^{K+2z} 7_- + \\ + D_* B C e \pi L^{-1} M^{-1} \cos^{z+k+1} \zeta_- = 0, \end{aligned} \quad (23.26)$$

$$\begin{aligned} D_3 A^3 \cos^{3K} 7_- + 3D_3 C A^2 \cos^{2K+z} 7_- + D_1 A^2 \cos^{2K} 7_- + \\ + D_* A B e \pi L^{-1} M^{-1} \cos^{K+k+1} \zeta_- = 0, \end{aligned} \quad (23.27)$$

$$\begin{aligned} B(D_2 - k\pi^2 L^{-2} M^{-2} + 2D_1 C \cos^z \zeta_-) \cos^k 7_- + D_3 B^3 \cos^{3k} 7_- + \\ + 3D_3 B C^2 \cos^{2z+k} 7_- = 0. \end{aligned} \quad (23.28)$$

Для фиксированных k, K и z можно получить алгебраические уравнения, определяющие A, B, C и e из (23.25)–(23.28). Мы подчеркиваем снова, что обыкновенное дифференциальное уравнение (23.21) и решения (23.22), (23.23) претендуют на описание решения многих волновых уравнений. Следуя [3], рассмотрим несколько случаев, когда коэффициенты в (23.23) могут быть легко найдены. После чего записывается выражение, являющееся суммой соответствующих бегущих волн.

(I). Пусть $A=C=0$, $k=1$, и $d_* = D_1 B^2 / 2$. В этом случае $B^2 = 4(\pi^2 L^{-2} M^{-2} - D_2) / 3D_3$ и $e = BMLD_1 / \pi D_4$. Таким образом, квадратично-нелинейные и вязкие эффекты приняты во внимание. Если $D_3 = (\pi^2 L^{-2} M^{-2} - D_2) / 3$, тогда мы имеем:

$$\eta = 2h[\tanh(e \sin \zeta_-) \cos 7_- + \tanh(e \sin 7_+) \cos 7_+]. \quad (23.29)$$

Решение (23.29) — некоторая модификация выражений для ударных волн, бегущих в слабовязкой среде (газе или воде), которые рассматривались в главе 13. Мы нашли там, что (23.29) описывает много экспериментальных данных.

(II). Пусть $A=0$, $k=0$, $z=1$ и $D_1 \neq 0$, $d_* = 0$. В этом случае можно найти, что

$$B^2 = (3\pi^2 L^{-2} M^{-2} - 2D_2) / 8D_3, \quad C^2 = -(2D_2 + \pi^2 L^{-2} M^{-2}) / 4D_3 \\ \text{и } e = 3BCMLD_3 / \pi D_4.$$

Если $D_3 = (3\pi^2 L^{-2} M^{-2} - 2D_2) / 32$, то $B = \pm 2$, и мы имеем следующее выражение для η :

$$\eta = h[2 \tanh(e \sin \zeta_-) + C \cos 7_- + \\ + 2 \tanh(e \sin 7_+) + C \cos 7_+]. \quad (23.30)$$

(III). Пусть $B=0$, $K=z=2$ и $d_* = 0$. В этом случае можно найти $A = -3C - 6D_1 / 5D_3$ и $e^2 = \pi^2 M^2 L^2 (2D_2 / 3 - 4\pi^2 M^{-2} L^{-2} / 3 + D_1 C + 5D_3 C^2 / 4)$, где $C=0$ и C определяется уравнением: $5D_3 C^2 + 6D_1 C + 8D_2 - 16\pi^2 M^{-2} L^{-2} = 0$. Теперь мы можем записать:

$$\eta = h[A \operatorname{sech}^2(e \sin \zeta_-) + C] \cos^2 7_- + \\ + h[A \operatorname{sech}^2(e \sin 7_+) + C] \cos^2 7_+. \quad (23.31)$$

Последнее выражение описывает резонансные солитоны (раздел 13.5) и многие экспериментальные данные. Рассмотрим случай, когда $C=0$ и $e \rightarrow \infty$, тогда волна преобразовывается в частицу (струя), и мы имеем, приблизительно:

$$\eta = hA[\operatorname{sech}^2(e \sin \zeta_-) \cos^2 7_- + \operatorname{sech}^2(e \sin 7_+) \cos^2 7_+]. \quad (23.32)$$

Для жидких слоев мы имеем $A \approx 2$ в (23.32).

(IV). Пусть $D_1 = 0$, $B = 0$, $K=z=1$ и $d_* = 0$. В этом случае можно найти $A = -3C$, $e^2 = 2 - 2\pi^2 M^2 L^2 D_2$, и $C^2 = 2(\pi^2 M^{-2} L^{-2} - D_2) D_3^{-1}$. Теперь мы можем записать:

$$\eta = -hC[3 \operatorname{sech}^2(e \sin \zeta_-) - 1] \cos 7_- - \\ - hC[3 \operatorname{sech}^2(e \sin 7_+) - 1] \cos 7_+. \quad (23.33)$$

Для жидких слоев мы находим, что $C = 1.7(h/L)^{1/3}$ в (23.33). Полученные выражения будут использоваться ниже при моделировании некоторых экспериментальных данных.

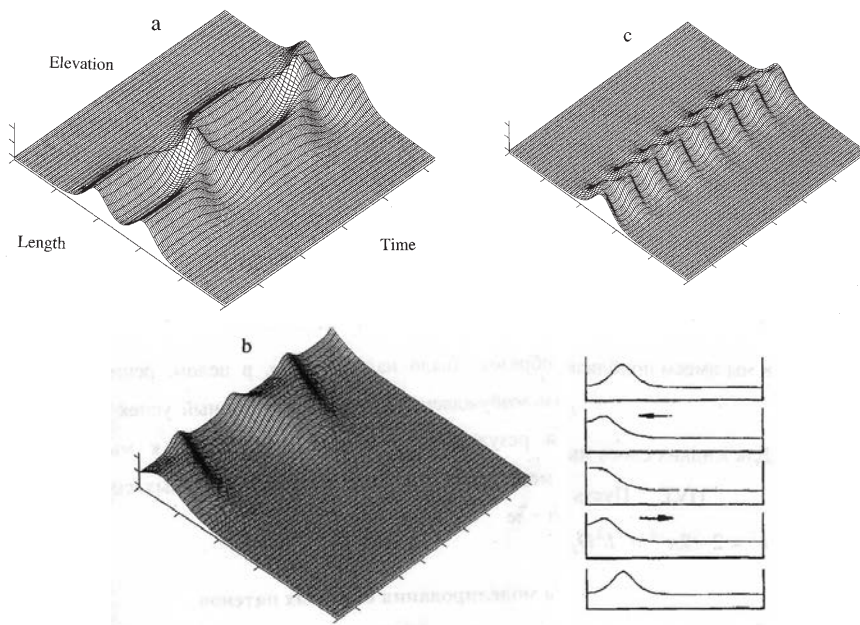


Рис. 272. Результаты (a, b, c) моделирования поверхностных волн [3], наблюдаемых в [33, 105, 106]. Волна (b) показывает колебания солитона у стенки. Экспериментальные данные для этого случая [105] приведены внизу справа.

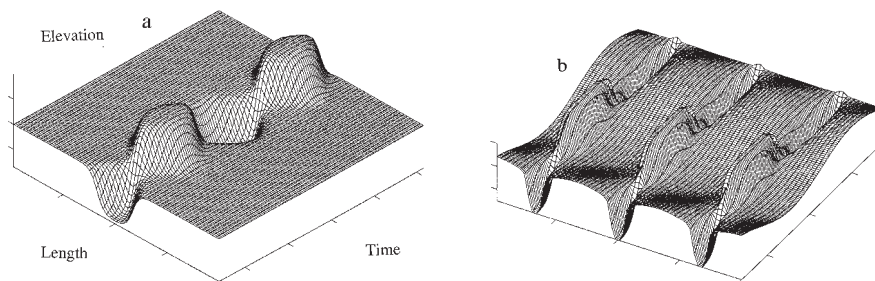


Рис. 273. Результаты моделирования осцилонов [3], параметрически-возбуждаемых на поверхности слоя суспензии [44].

Моделирование некоторых экспериментальных данных. Как пример использования полученных решений рассмотрим (23.32). Основываясь на нем, мы дополнительно рассмотрим наблюдаемые в вытянутом прямоугольном

контейнере аномальные параметрически-возбуждаемые поверхностные волны. В некоторых случаях возбуждались две изолированные волны, которые колебались относительно середины контейнера (см. рис. 231, 232), в других случаях волна колебалась относительно стенки [105], наконец, в некоторых случаях волна, практически не двигаясь, стояла в центре [106]. В [33] моделирование указанных волн осуществлялось путем численного решения уравнения Шредингера. Результаты наших расчетов, основанных на решении (23.32), представлены на рис. 272.

Осцилоны на поверхности слоя суспензии были обнаружены в [44]. Мы уже обсуждали эти волны ранее, а именно, привели их фотографии и результаты расчетов двух осцилонов (см. рис. 239). На рис. 273, взятом из [3], приведены результаты расчетов, основанных на решении (23.33) для одного и трех осцилонов. Найдено [3], что решение (23.33) достаточно хорошо описывает данные экспериментов (см. рис. 239).

Таким образом, в целом, решение (23.22) описывает широкий круг параметрически-возбуждаемых волн. Определенный успех в использовании решений (23.22) при моделировании результатов экспериментов привел к мысли использовать эти решения при качественном моделировании более сложных волновых систем и патенов. Мы их рассмотрим в следующем разделе.

23.5. Примеры моделирования сложных патенов

Легкий, доселе не слышанный звон.
Вот он — возник. И с холодным вниманием
Жду, чтоб понять, закрепить и убить.

А. Блок

Недостаток существенно приближенных решений предыдущего раздела, который вместе с тем дает некоторую свободу рук, в том, что аргументы произвольных функций $J(r)$ и $J(s)$ (23.22) практически не определены. Мы только знаем, что сумма или разность этих функций должны приближенно удовлетворять оператору Даламбера (условие резонанса) и что функции описывают волны, имеющие локализованный, быстро-переменный профиль. Принимаем, что эти условия выполняются автоматически. Затем позволим себе небольшое отступление исторического характера. А именно, вспомним приписываемое великому математику Коши высказывание, которое мы цитируем в полуполюгендарной форме «если имеется решение, содержащее 3 произвольных неизвестных, то оно может описать слона. Если в нашем распоряжении содержится четвертая произвольная величина, то слона можно заставить махать хвостиком». Подчеркнем, что в нашем распоряжении имеется решение

(23.22), (23.23), которое содержит более чем четыре произвольных функций и постоянных. Посмотрим, как ими можно распорядиться.

Учитывая сказанное в работе [3], было предложено отыскивать функции $J(r)$ и $J(s)$ в следующем виде:

$$J'(r) = \operatorname{sech}^2(e \sin 7_-) \cos^2 7_-, \quad J'(s) = \operatorname{sech}^2(e \sin 7_+) \cos^2 7_+. \quad (23.34)$$

Здесь $7_- = M^{-1}(r + c_-)$ и $7_+ = M^{-1}(s + c_+)$, где

$$r = \alpha(t) - \sin^w k_1 x + b^* \sin^v k_2 y, \quad s = \alpha(t) + \sin^w k_1 x + \sin^v k_2 y. \quad (23.35)$$

Здесь используются безразмерные переменные $r, s, 7_-, 7_+, \alpha(t)$. В [3] было показано, что, подбирая соответствующим образом функции $J'(r)$ и $J'(s)$, можно описать очень красивую динамику волн на плоскости. Однако не всегда эту динамику можно истолковать и связать с какими-то экспериментальными данными. Правда, в последние годы появились более широкие возможности поиска указанного соответствия (значительное количество динамических паттернов можно найти в Интернете, например, по адресу «resonantie» в YouTube).

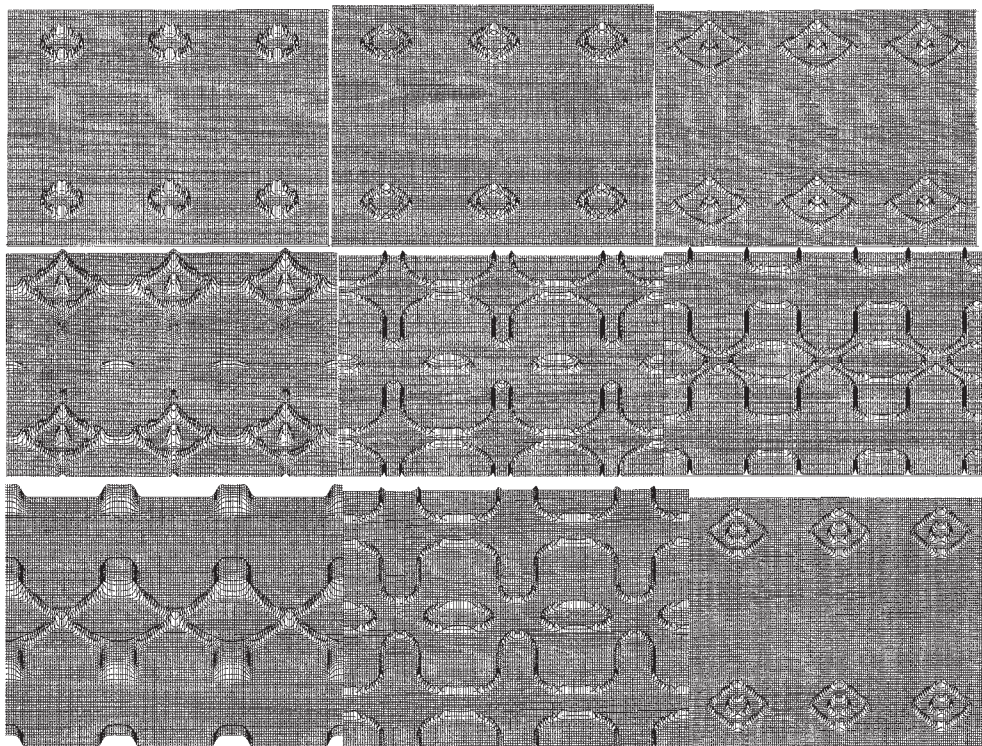


Рис. 274. Пример сложного волнового периодического паттерна [3].

Динамический патен, взятый из [3], приведен на рис. 274. При расчетах было принято, что $b^* = -1$, $c_i = 0.5$, $M = 1$, $e = 30$, $w = 4$, $v = 5$, $k_1 = k_2 = 3$ и $a(t) = B_* k_{12} [\sin(\omega t / k_{12}) - 0.333 \sin^3(\omega t / k_{12})]$ в (23.35). Показана последовательность волновых патенов, вычисленных для 9 моментов времени, покрывающих почти весь период колебаний. Патены демонстрируют возникновение из «ничего» возмущений, которые затем эволюционируют в сложные структуры, исчезающие далее в «никуда». Можно поставить в соответствие указанной динамике многие процессы в окружающем нас мире. Другой пример сложной волновой эволюции дан на рис. 275.

Рис. 274 и 275 демонстрируют сложную картину эволюции волн. Можно видеть первоначальное развитие, которое сменяется взаимодействием, преоб-

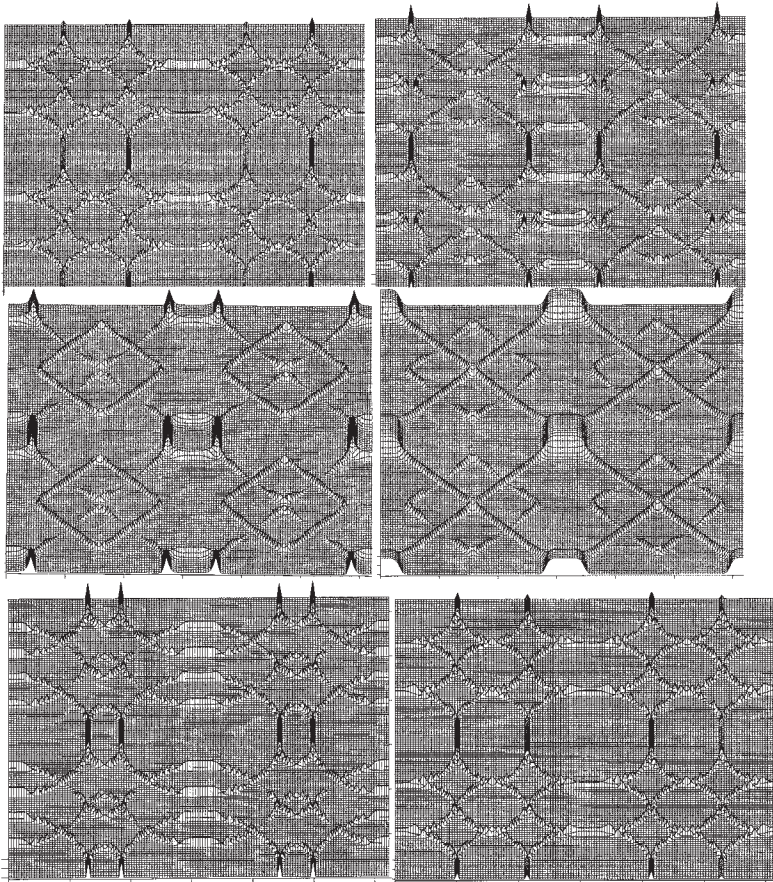


Рис. 275. Пример сложного волнового периодического патена [3].

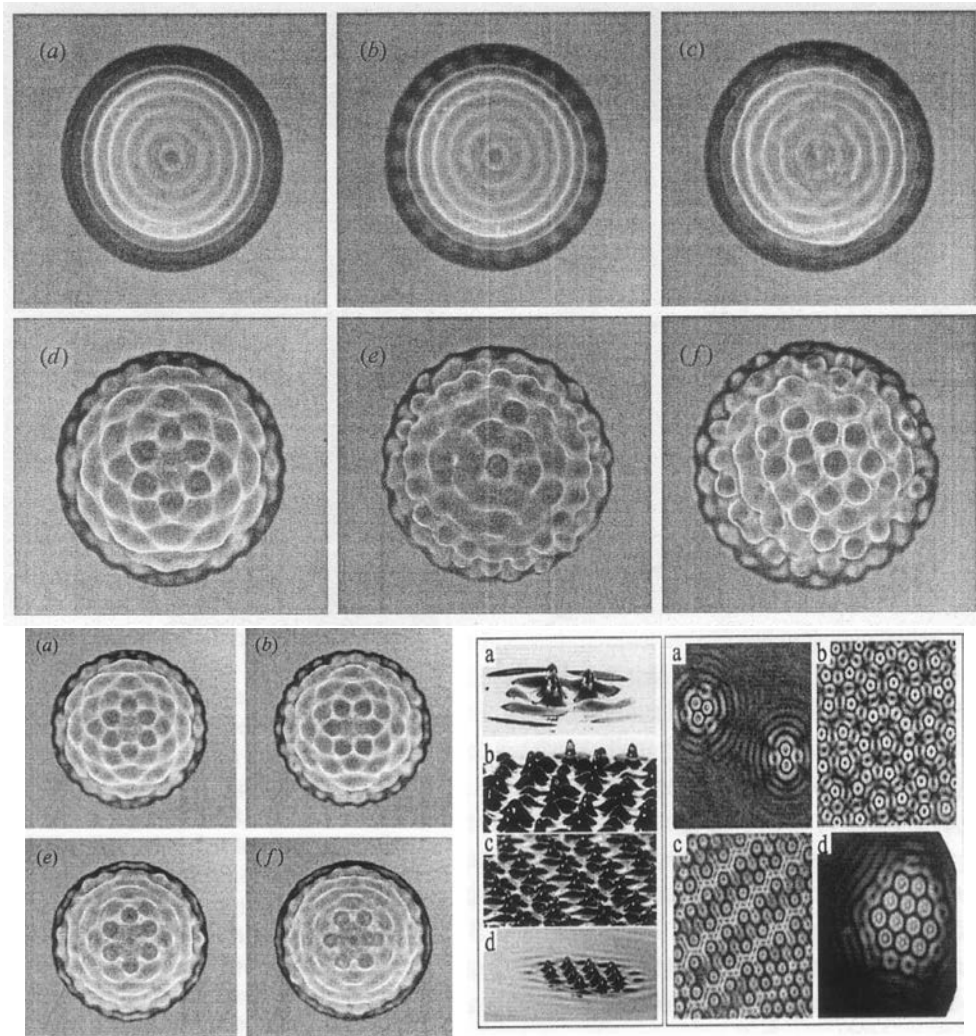


Рис. 276. Волновые формы на поверхности капли (верх и низ слева) [109]. Оссилонь и образованные ими патены на поверхности жидкой среды, возникающие при сложном периодическом возбуждении (низ справа) [44].

разованием и исчезновением локализованных элементов, оканчивающееся возвратом в начальное состояние. Возможность возникновения патенов, подобных представленным на рис. 274 и 275, можно связать с периодическим изменением гравитации (хотя автору рис. 274 напоминает «танец» хромосом или фотонов [107, 108]).

Примеры эволюции поверхностных волн, возбуждаемых на поверхности капли или жидкой среды, показаны на рис. 276. На верхней части рисунка показан кольцевой патен ((a)–(c)), причем последний затем, как в калейдоскопе, меняет свою структуру ((d)–(f)). Еще более сложная динамика поверхности капли показана на нижней части рисунка (слева). Там проглядываются очень красивые структуры. Возможно, эти структуры описывают динамику изменения высоко-нелинейных волновых поверхностных собственных форм капли. Внизу справа рис. 276 показаны кластеры высоко-локализованных осциллирующих волн (осцилонов), возбуждаемых на поверхности жидкой среды. Там же приведены возникающие сложные поверхностные патены.

При моделировании данных рис. 276 мы принимали, что $J\psi = 0$ и

$$r = 1 - a(t) - \text{sech}^2(e \sin r) \cos^2 r, \\ r = 1 - a(t) - \text{sech}(e_* R_*) \sin^N(k_1 \varphi_*) - 0.75 \sin^N(k_2 R_*) \quad (23.36)$$

в (23.22). Здесь $R_* = (x^2 + 0.6y^2)^{0.5} - 1$, $\varphi_* = \arg \tan(x / y)$ и e_* — постоянная.

При расчетах мы приняли сначала, что $e=5$, $e_*=2$, $N=4$, $k_1=k_2=8$. Затем, варьируя значения e_* , k_1 , k_2 , мы получили ряд других патенов (рис. 277). Как и в экспериментах динамика включает в себя кольцевые волны. Полнос

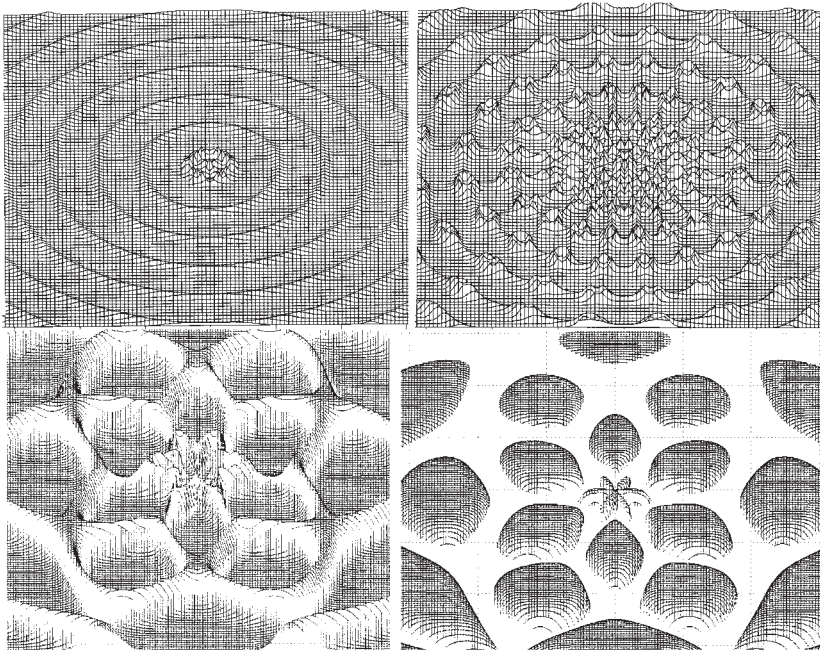


Рис. 277. Результаты развития резонансных патенов (см. также рис. 207 и 271).

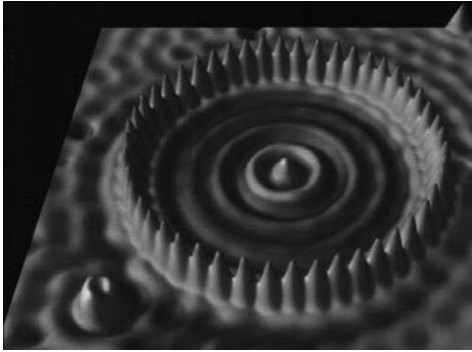


Рис. 278. Взаимодействие волн, образующее круговую рябь («квантовый мираж») в пределах кольца 48 атомов меди [38].

является как бы источником возмущений, из-за которых радиальная симметрия патенов нарушается. В результате появляются патены, имеющие ячеистую структуру. В целом, описанная картина качественно согласуется с экспериментальными данными.

На рис. 278 показан «квантовый мираж». Это «поверхностный» патен, возникающий при взаимодействии потока электронов с группой из 48 атомов кристалла меди, расположенных по кругу. В результате наложения волн де Бройля внутри кольца возникает круговая рябь, а за атомами — ячеистая

структура, напоминающая показанную на рис. 276 и 277.

В [3] выражение (23.36) было использовано для моделирования отдельных элементов квантового миража, показанного на рис. 278. Здесь мы воспроизводим патен, рассчитанный для 36 атомов [3], и даем также пример расчета 48 атомов (рис. 279). Видно, что они качественно описывают круговую рябь в центральной части миража.

Мы напоминаем, что все патены, показанные на рис. 274, 275, 277 и 279, определяются волновой функцией (23.22) и (23.23). Эта функция также описывает другие динамические патены, которые рассматривались в [3]. Они могут быть использованы для аналитического описания процессов динамического взаимодействия различных поверхностных волн, вплоть до изображения результатов наложения волн де Бройля при их распространении на слое БЭК.

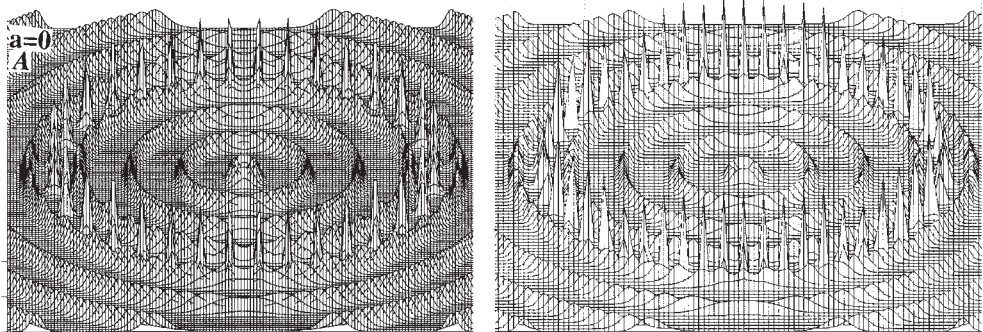


Рис. 279. Результаты аналитического моделирования «квантового миража» [3].

23.6 Заключение

Этот космос, тот же самый для всех, не создал никто из богов, ни из людей, но он всегда был, есть и будет вечно живым огнем, мерами разгорающимся и мерами погасающим.

Гераклит

Последняя часть книги посвящена влиянию высокой нелинейности на трансрезонансную эволюцию волн. В ней мы в какой-то мере реализовали план исследований трансформирования волн в вихри и приложений теории катастрофических волн к анализу поверхностной атомизации и эволюции ранней Вселенной, который был представлен в [3]. Детали этого плана были подсказаны словами Дарвина: ... *Лайелль также дал рисунокobelиска в Калабрии, где отдельные камни были частично повернуты. В подобных случаях перемещение сначала появляется благодаря вихревому движению ниже каждой точки, испытавшей воздействие...*, его описанием поверхностных явлений при моретрясениях, а также статьями автора [4, 5, 24–26, 39–41, 57, 74], со времени публикации которых прошло около 10 лет. При изложении материала мы использовали также результаты частей II и III книги, а также результаты многих выдающихся исследователей. Сложность рассмотренных задач привела к тому, что в основном намечены возможные пути их решения. Однако каждое исследование доведено до числа, что позволило сравнить результаты с экспериментом.

Анализ катастрофических волн сводится к их представлению в виде суммы $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$, где $u^{(1)}$ — линейная составляющая решения, а $u^{(2)}$ определяет быстро растущую квадратичную нелинейную резонансную поправку. Сумма $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ находится согласно методике, развитой в разделе 9.2. Эта сумма подставляется в уравнение, выведенное для $u^{(3)}$. Все это позволяет свести проблему к решению обыкновенных дифференциальных или алгебраических нелинейных уравнений с переменными коэффициентами и вынуждающим членом. Эти уравнения описывают прохождение волн через резонансную область и демонстрируют наличие там большого разнообразия волн и законов их трансрезонансной эволюции. Это выражается как в появлении волн, имеющих многозначные профили, так и в распаде волн и возникновении вихрей.

Значительное внимание автор уделил локализованным волновым эффектам, таким как появление волн ряби, извержение среды из вершин волн, а также возникновение сложных волновых патенов в резонансной области. В частности, моделирование природных волновых процессов и экспериментальных данных на основе построения соответствующих им сильно-нелинейных волно-

вых форм было одним из направлений исследований. Следуя этому пути, мы моделировали формы, возникающие при моретрясении, на поверхности гранулированных сред и жидкой капли, а также при протекании электронной жидкости через систему атомов.

Важное направление этой части связано с возникновением «эластика» форм и эволюции их в вихри. Мы не останавливались ранее на истории исследования подобных форм, хотя она имеет несомненный интерес и позволяет несколько определить место нашей теории в круге других исследований. Отметим, что первую «эластика» форму вида рис. 214 (справа) рассчитал Бернулли. Правая кривая на рис. 213 известна уже столетия под именем «строфоида». Появление других форм, представленных на рис. 211, 213 и 214, некоторые авторы связывают с именами Эйлера и Киргофа [110]. Во всяком случае, уже с конца 19 века эти формы упоминаются в книгах по теории упругости [16]. Трудно проследить, кто первый использовал эти формы для описания волн. Но, по-видимому, применительно к резонансным волнам они использовались в [111, 58]. А именно, Сибгатуллин [111] описывал ими резонансные волны в проводящей жидкости, а Честер [58] — волны, возбуждаемые в трубе с одним открытым концом. Затем они применялись Галиевым [3–5, 47, 57] для качественного исследования резонансных и трансрезонансных волн, возникающих в различных средах.

В последние годы интерес к волнам вида «эластика» возрос, так как оказалось, что подобные волны представляют интерес для нелинейной оптики и могут использоваться как модели для очень коротких импульсов, распространяющихся в нелинейных средах [112–115], а также в других случаях. Мы показали, что с помощью бегущих «эластика» форм можно описать поверхностные волны необычайной формы, возбуждаемые в резонаторах. В частности, они описывают волны, наблюдаемые в замечательных экспериментах Калиниченко [116, 117], которые существенно дополняют результаты, представленные в [30, 34]. Отметим, что некоторые «эластика» кривые, представленные на рис. 211, 213 и 214 в книге [110], называют солитонами Эйлера, а в [112–115] петлеобразными солитонами в отличие от термина, используемого нами, который соответствует терминологии, бытующей в книгах по теории упругости.

В заключение этого краткого обзора отметим, что в книге широко используется термин — локальный резонанс. Отметим, что смысл, который автор вкладывает в него, принципиально отличается от приписываемого тому же термину в некоторых публикациях последних лет. В этом читатель может убедиться, если ознакомится со статьями [118–120].

Достаточно детальное исследование некоторых «эластика» форм позволило нам перейти к следующему исследованию, а именно изучению возможно-

сти их эволюции в вихри. Реализация этого направления связала трансрезонансные явления с такими важными проблемами, как возникновение турбулентности, эволюция волн в Бозе-Эйнштейн конденсате и ранней Вселенной. Оказалось, что эволюция волн в вихри происходит в некоторых сингулярных точках управляющих уравнений и может иметь место только при малой, но не нулевой вязкости. Т.е. при малой вязкости волновая система может начать эволюционировать в совершенно новые формы, отличные от возникающих при нулевой или сильной вязкости.

Волны являются самым распространенным феноменом, связывающим динамические и статические явления [6, 32, 46, 47, 102, 104, 121–131]. Они как существеннейший элемент Природы зародились в самый момент появления Вселенной. В те далекие времена во Вселенной вполне могли появиться катастрофические волны, подобные возникающим в океане или на границе раздела двух сред. Автор полагает, что зарождение и развитие волн в ранней Вселенной определялось резонансом, а именно близостью скорости волн плотности к скорости фотонов (света). Резонанс, согласно развитой в этой части книги схеме, приводит к появлению катастрофических волн, струям и вихрям. Следующий шаг в цепочке рассуждений приводит нас к мысли о формировании галактик [51, 132–141]. Известно, что они имеют часто форму вихрей. Не являются ли они следствием финальной стадии трансрезонансной эволюции катастрофических волн на последних этапах ранней Вселенной?

Последнее десятилетие знаменовалось появлением новых экспериментальных данных о начальной истории Вселенной. Выявилось существенное влияние волн плотности на ее раннюю эволюцию. Возродился взгляд на Вселенную как периодически пульсирующий объект [82, 142]. Может Гераклит (см. эпиграф к этому разделу) был прав? У автора даже возникла мысль о возможности периодических осесимметричных волн в пульсирующей сферической Вселенной, аналогичных показанным на рис. 98–100.

Таким образом, в течение последнего десятилетия предвиденье Лившица, Сахарова, Зельдовича и Сюняева [93–96] о связи эволюции ранней Вселенной с распространяющимися в ней возмущениями и звуком стало почти общим местом [51, 132–141]. Вместе с тем, вопросы возникновения в ранней Вселенной катастрофических волн и эволюции звука в вихри, по-видимому, еще не ставились. Конечно, это не тот звук, который мы слышим в обыденной жизни. Даже самые мощные взрывы вулканов и циклоны — только очень бледная тень возможностей Природы. Возможно, они в максимальной степени реализовались в моменты зарождения нашего мира? Возможно, наблюдаемый мир — всего лишь след резонансных катастрофических волн и вихрей, прокатывавшихся по ранней Вселенной? В последней главе книги мы в общем кон-

тексте исследования пытаемся, качественно, ответить на вопросы — почему первоначально малые возмущения в ранней Вселенной росли и как они трансформировались в вихри.

Мы не знаем всех возможностей Природы, не можем вообразить всех случаев резонансного усиления или подавления в ней и в живых сообществах возмущений. Многие из них лежат вне возможностей наших исследований. В попытках анализа мы прибегаем к высоко-нелинейным уравнениям, которые в сингулярных и резонансных областях имеют огромное количество решений. Здесь мы записали несколько из них в сугубо приближенном виде. Получить и тем более осмыслить эти решения было нелегко. Все это заставляет вспомнить слова Ричарда Феймана: «Сегодня мы не можем сказать с уверенностью, содержит ли уравнение Шредингера и лягушек, и композиторов, и даже мораль, или там ничего похожего и быть не может».

В частности, внутри областей резонанса [144] имеется огромное разнообразие волновых форм. Многие из них не получают развитие, они неустойчивы, другие — ударные волны, солитоны, вихри нам хорошо известны. Другая особенность резонансных процессов в том, что они могут реализовываться, потребляя минимум энергии [145]. Возможно, Природа не прошла мимо указанных достоинств резонансных процессов. Может, она использовала резонансы как при создании новых разнообразных форм, так и при создании систем, минимизирующих энергию, необходимую для их функционирования.

Литература

- [1] Schowalter, D.G., van Atta, C.W., Lasheras, J.C., 1994. A study of streamwise vortex structure in a stratified shear layer. *J. Fluid Mech.*, **281**, 247–291.
- [2] Арнольд, В. И., 1981. Теория катастроф. Знание, Москва.
- [3] Galiev, Sh.U., Galiyev, T.Sh., 2001. Nonlinear transresonant waves, vortices and patterns: From microresonators to the early Universe. *Chaos*, **11**, 686–704.
- [4] Galiev, Sh.U., 2003. The theory of non-linear transresonant wave phenomena and an examination of Charles Darwin's earthquake reports. *Geophys. J. Inter.*, **154**, 300–354.
- [5] Galiev, Sh.U., 2003. Transresonant evolution of wave singularities and vortices. *Phys. Lett., A*, **311**, 192–199.
- [6] Островский, Л.А., Потапов, А.С., 2003. Введение в теорию модулированных волн. Физматлит, Москва. (Ostrovsky L.A., Potapov A.I., 1999. *Modulated Waves. Theory and Applications*. The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore and London).
- [7] Lyth, D.Y., Liddle, A.R., 2009. *The Primordial Density Perturbation*. Cambridge University Press.
- [8] Waitz, I.A., Greitzer, E.M., Tam, C.S. Aero-propulsion systems. In *Fluid Vortices*. Ed. Green, S.L. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [9] Wright, J., Yon, S., Pozrikidis, C., 2007. Numerical studies of two-dimensional Faraday oscillations of inviscid fluids. *J. Fluid Mech.*, **588**, 279–308.
- [10] Faraday, M., 1831. On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by group of particles on vibrating elastic surface. *Phil. Trans. R. Soc.*, London, **121**, 299–340.
- [11] James, A.J., Vukasinovich, B., Smith, M.K., Glezer, A., 2003. Vibration-induced drop atomization and bursting. *J. Fluid Mech.*, **476**, 1–28.
- [12] Wassgren, C.R., Brennen, C.E., Hunt, M.L., 1996. Vertical vibration of a deep bed of granular material in a container. *Trans. of the ASME. J. Appl. Mech.*, **63**, 712–719.
- [13] Taylor, G.I. Instability of jets, threads, and sheets of viscous fluid. In *Proceedings of the 12th Inter. Cong. of Applied Mech.* (Stanford, 1968), Springer-Verlag (1969), 382–8.
- [14] Pocheau, A., Roman, B., 2004. Uniqueness of solutions for constrained Elastica. *Physica D*, **192**, 161–186.
- [15] Jones, N., 1989. *Structural Impact*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [16] Love, A.E.H., 1944. The Mathematical Theory of Elasticity. *Cambridge University Press*, Cambridge.
- [17] Frisch–Fay, R., 1962. Flexible bars. *Butterworths*: London.
- [18] Karsten, R.H., Swaters, G.E., 2000. Nonlinear effects in two-layer large-amplitude geostrophic dynamics. Part 2. The weak-beta case. *J. Fluid Mech.*, **412**, 161–196.
- [19] Lui, X., Duncan, J.H., 2003. The effects of surfactants on spilling breaking waves. *Nature*, **421**, 520–523.
- [20] Aarts, D.G.A., Schmidt, M., Lekkerkerker, H.N.W., 2004. Direct visual observation of thermal capillary waves. *Science*, **304**, 847–850.
- [21] Zeff, B.W., Kleber, B., Fineberg, J., Lathrop, D.L., 2000. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature*, **403**, 401–404.
- [22] Longuet–Higgins, M.S., 1983. Bubbles, breaking waves and hyperbolic jets at a free surface. *J. Fluid Mech.*, **127**, 103–121.
- [23] Chester, W., 1981. Resonant oscillations of a gas in an open-ended tube. *Proc. R. Soc. Lond., A*, **377**, 449–467.
- [24] Galiev, Sh.U., 2000. Unfamiliar vertically excited surface water waves. *Phys. Lett., A*, **266**, 41–52.
- [25] Galiev, Sh.U., 1999. Topographic effect in a Faraday experiment, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 6963–7000.
- [26] Galiev, Sh.U., 1998. Is There Some New Kind of Nonlinear Surface Waves? Rep. **584**, School of Engineering, The University of Auckland.
- [27] Taylor, G.I., 1953. An experimental study of standing waves. *Proc. Royal Soc., A*, **CCXVIII**, 44–59.
- [28] Das, S.P., Hopfinger, E.J., 2008. Parametrical forced gravity waves in a circular cylinder and finite-time singularity. *J. Fluid Mech.*, **599**, 205–228.
- [29] Royon–Lebeaud, A., Hopfinger, E.J., Cartellier, A., 2007. Liquid sloshing and wave breaking in circular and square-base cylindrical containers. *J. Fluid Mech.*, **577**, 467–494.
- [30] Jiang, L., Perlin, M., Schultz W.W., 1998. Period tripling and energy dissipation of breaking standing waves. *J. Fluid Mech.*, **369**, 273–299.
- [31] Niederhaus, C.E., Jacobs, J.W., 2003. Experimental study of the Richtmyer–Meshkov instability of incompressible fluids. *J. Fluid Mech.*, **485**, 243–277.
- [32] Kharif, C., Pelinovsky, E., Slunyaev, A., 2009. *Rogue Waves in the Ocean*. Springer.

- [33] Wang, X., Wei, R., 1997. Dynamics of multisoliton interactions in parametrically resonant systems. *Phys. Rev. Lett.*, **78** (14), 2744–2747.
- [34] Tu, J., Lin, H., Lu, L., Chen, W., Wei, R., 2002. Spatiotemporal evolution from a pair of polarity solitons to chaos. *Phys. Lett. A* **304**, 79–84.
- [35] Umbanhowar, P.B., Melo, F. & Swinney, H.L., 1996. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, **382**, 793–796.
- [36] Bizon, C., Shattuck, M.D., Swift, J.B., McCormick, W. D., Swinney, H. L., 1998. Patterns in 3D vertically oscillated granular layers: simulation and experiment. *Phys. Rev. Lett.*, **80**(1), 57–60.
- [37] Cross, M.C. & Hohenberg, P.C., 1993. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, **65**, 851–1112.
- [38] Suplee, C., 1999. Physics in The 20th Century. *Harry N. Abrams*.
- [39] Galiev, Sh.U., 1999. Unfamiliar waves excited due to parametric and resonant effects. Proc. Conf. *Unsolved Problems of Noise and Fluctuations* (UPoN '99), 11–15th July 1999, Adelaide, Australia, 321–326.
- [40] Galiev, Sh.U., 2000. Unfamiliar waves excited due to parametric and resonant effects. In *Unsolved Problems of Noise and Fluctuations*, eds. D.Abbott, B. Kish. American Institute of Physics, 361–367.
- [41] Galiev, Sh.U., 2000. Unfamiliar surface water waves. Proc. *International Conference of Applied Mechanics* (SACAM 2000), 11–13 January 2000, Durban, South Africa. Eds. S.Adali, E.V. Morozov, V.E. Verijenko, 166–171.
- [42] Cerda, E., Melo, F., Rica, S., 1997. Model for subharmonic waves in granular materials.
- [43] Clement, E., Labous, L., 2000. Pattern formation in a vibrated granular layer: the pattern selection issue. *Phys. Rev. E*, **62** (6), 8314–8323.
- [44] Lioubashevski, O., Hamiel, Y., Agnon, A., Reches, Z., Fineberg, J., 1999. Oscillons and propagating solitary waves in a vertically vibrated colloidal suspension. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(16), 3190–3193.
- [45] Douady, S., Fauve, S., Laroche, C., 1989. Subharmonic instability and defects in a granular layer under vertical vibrations/ *EuroPhys. Lett.*, **8**(7), 621–627.
- [46] Galiev, Sh.U., 2009. Modelling of Charles Darwin's Earthquake Reports as Catastrophic Wave Phenomena. researchspace. auckland. ac. nz/handle/2292/4474.
- [47] Galiev, Sh.U., 2008. Strongly-nonlinear wave phenomena in restricted liquids and their mathematical description. In: *New Nonlinear Phenomena Research*. Ed. Perlidze, T., Nova Science Publishers, New York, 109 –300.
- [48] Jiang, L., Ting, C.-L., Perlin, M., Schultz, W.W., 1996. Moderate and steep Faraday waves: instabilities, modulation and temporal asymmetries. *J. Fluid Mech.*, **329**, 275–307.

[49] Clement, E., Vanel, L., Rajchenbach, J., Duran, J., 1996. Pattern formation in a vibrated granular layer. *Phys. Rev. E* **53**, 2972–2975.

[50] Beji, S. & Nadaoka, K., 1997. A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves. *Proc. R. Soc. Lond., A*, **453**, 319–332.

[51] Volovik, G., 2003. *The Universe in a Helium Droplet*. Claredon Press. Oxford.

[52] Викулин, А. В. Взгляд физика: вращательное движение как характерное свойство пространства-времени Вселенной. Интернет.

[53] Lahay, T. et al, 2008. d-Wave Collapse and Explosion of a Dipolar Bose–Einstein Condensate. *Phys Rev Lett.*, **101**(8), 080401.

[54] Proukakis, N.P., Parker, N.G., Frantzeskakis, D.J., Adam, C.S., 2004. Analogies between dark solitons in atomic Bose–Einstein condensates and optical systems. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6**, S380–S391.

[55] Marts, B., Hagberg, A., Meron, E., Lin, A.L., 2004. Bloch–front turbulence in a periodically forced Belousov–Zhabotinsky reaction. *Phys Rev Lett.*, **93**(10), 108305.

[57] Galiev, Sh.U., 2003. Transresonant evolution of waves and the Richtmyer–Meshkov instability: from microstructures to the Universe. In *Proc. Joint Conf. ‘New Geometry of Nature’*, vol. **I**, Kazan State University, Kazan, Russia, August 25–September 5.

[58] Chester, W., Moser, A., 1982. On an equation which describes the resonant oscillations of a gas in an open-ended tube. *Proc. R. Soc. Lond., A*, **380**, 409–415.

[59] Merkli, P., Thomann, H., 1975. Transient to turbulence in oscillation pipe flow. *J. Fluid Mech.*, **68**, 567–575.

[60] Caton, F., Janiaud, B., Hopfinger, E.J., Stability and bifurcations in stratified Taylor–Couette flow. *J. Fluid Mech.*, **419**, 93–124.

[61] Sarpkaya, T., 2002. Experiments on the stability of sinusoidal flow over a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, **457**, 157–180.

[62] Sagaunt, P., Cambon, C. Homogeneous Turbulence Dynamics. *Cambridge University Press*, 2008.

[63] Shiri, A, George, W.K., Naughton, J.W., 2008. Experimental study of the far field of incompressible swirling jets. *AIAA Journal*, **46** (8), 2002–2009.

[64] Fluid Vortices. Ed. Green, S.L. *Kluwer Academic Publishers*, 1995.

[65] Smith, C.R., Walker, J.D.A., 1995. Turbulent wall-layer vortices. In *Fluid Vortices*. Ed. Green, S.L. *Kluwer Academic Publishers*.

[66] Bjorn, H. and et al., 2004. Experimental observation of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science*, **305**. 1594–1598.

- [67] Zakharov, V.E., 1968. Stability of periodic waves of finite amplitude on surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **N2**, 190–194.
- [68] Zakharov, V., Dias, F., Pushkarev, A., 2004. One-dimensional wave turbulence. *Phys. Reports*, **398**, 1–65.
- [69] Newell, A.C., Rumpf, D., 2011. Wave turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **43**, 59–78.
- [70] Horn, D.A., Imberger, J., Ivey, G.N., Redekopp, L.G., 2002. A weakly nonlinear model of long internal waves in closed basins. *J. Fluid Mech.*, **467**, 269–287.
- [71] Prigogine, I., 1997. The End of Certainty. *The Free Press*: New York.
- [72] Lighthill, M.J., 1954. On sound generated aerodynamically, II, Turbulence as a source of sound. *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, **222**, 1–32.
- [73] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., 1988. Гидродинамика. Наука, Москва.
- [74] Галиев, Ш. У., Галиев, Т. Ш., 1994. Линейные и нелинейные вынужденные колебания течения пузырьковой жидкости в деформируемой трубе. *Проблемы Прочности*, **26 (9)**, 633–654.
- [75] Ciamara, M.P., Coniglio, A., Nicodemi, M., 2005. Shear instability in granular mixture. *Phys Rev Lett.*, **94(18)**, 188001.
- [76] Fringer, O., Street, R.L., 2003. The dynamics of breaking progressive interfacial waves. *J. Fluid Mech.*, **494**, 319–353.
- [77] Magueijo, J. 2003. Faster Than the Speed of Light: The story of a scientific speculation. Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.
- [78] Wright, E.L., 2007. Acoustic waves in the early Universe. *J. Phys.: Confer. Ser.*, **118**, 012007.
- [79] Martin, A., Parker, N., Gardiner, S., Adams, C. Solitons and vortices in atomic BECs. Durham University.
- [80] Cowen, R., 2010. Ancient dawn's early light refines age of Universe. *Science News*, February 27, **177 (5)**, 7.
- [81] Penrose, R., 2010. Cycles of Time: An Extraordinary New View of the Universe. Bodley Head.
- [82] Abbott, B.P. et al., 2009. An upper limit on the stochastic gravitational-wave background of cosmological origin. *Nature*, **460**, 990–994.
- [83] Miller, C.J., Nichol, R.C., Butuski, D.J., 2001. Acoustic oscillations in the early Universe and today. *Science*, **292**, 2302–2303.
- [84] Claudio, A., 2005. Galaxy patterns preserve an imprint of the Big Band. *Science*, **307**, 508.
- [85] Friedmann, A., 1922. Über die krümmung des raumes (On space curvature). *Zeitschrift für Physik*, **10**, 377–387.

[86] Friedmann, A., 1924. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, **21**, 326–332.

[87] Gamow, G., 1946. Expanding Universe and the origin of elements. *Phys. Rev.* **70**, 572–573.

[88] Gamow, G., 1946. Rotating universe? *Nature* **158**, 549.

[89] Gamow, G., 1948. The evolution of the Universe. *Nature* **162**, 680–682.

[90] Alpher, R. A., Bethe, H., Gamow, G., 1948. The origin of chemical elements. *Phys. Rev.* **73**(7), 803–804.

[91] Gamow, G., 1948. The origin of elements and the separation of galaxies. *Phys. Rev.* **74**, 505–506.

[92] Gamow, G., 1952. *The Creation of the Universe*, Viking Press, New York.

[93] Lifshitz, E., 1946. On the gravitational stability of the expanding universe. *J. Phys. USSR*, **10**, 116–129.

[94] Сахаров, А. А., 1965. Начальная стадия расширения Вселенной и возникновение неоднородности распределения вещества. *ЖЭТФ*, **49**, 345–358.

[95] Zel'dovich, Ya.B., Sunyaev, R.A., 1969. The interaction of matter and radiation in a hot-model Universe. *Astrophys. Space Science*, **4**, 301–316.

[96] Sunyaev, R.A., 1978. Fluctuations of the microwave background radiation. In *Large Scale Structure of the Universe*, Eds. M.S. Longair, J. Einasto. Reidel, Dordrecht, Holland.

[97] Novikov, D.I., 2006. *The Physics of the Cosmic Microwave Background*. Cambridge University Press.

[98] Дорошкевич А.Г., Новиков И.Д., 1964. Средняя плотность излучения в Метагалактике и некоторые вопросы релятивистской космологии. *ДАН СССР*, **154** (4), 809–811.

[99] Викулин, А. В. Взгляд физика: вращательное движение как характерное свойство пространства-времени Вселенной. Интернет.

[100] Donnelly, R.J., 1991. *Quantized Vortices in Helium II*. Cambridge Univ. Press.

[101] Dutton, Z., Budde, M., Slowe, C., Hau, L.V., 2001. Observation of quantum shock waves created with ultra-compressed slow light pulses in a Bose–Einstein condensate. *Science*, **293**, 663–668.

[102] Сибгатуллин, Н. Р., 1984. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. Наука, Москва. (Sibgatullin, N. R., 1991. *Oscillations and Waves in Strong Gravitational and Electromagnetic Fields*, Springer).

[103] Galiev, Sh.U., Galiev, T.Sh., 1998. Resonant traveling surface waves. *Phys. Lett., A*, **311**, 192–199.

[104] Галиев, Ш. У., 1988. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. Наукова думка: Киев.

- [105] Wang, X., Wei, R., 1994. Observations of collision behavior of parametrically excited standing solitons. *Phys. Letters, A*, **192**, 1–4.
- [106] Chen, W., Wei, R., Wang, B., 1995. Nonpropagating interface solitary waves in fluids. *Phys. Letters, A*, **208**, 197–202.
- [107] Zeilinger, A., 2010. Dance of the Photons: From Einstein to Quantum Teleportation. FSG.
- [108] Pryde, G., 2010. Tripping the light fantastic. *Nature*, **467**, 1042–1043.
- [109] Vukasinovic, B., Smith, M.K., Glezer, A., 2007. Dynamics of a sessile drop in forced vibration. *J.Fluid Mech.*, **587**, 395–423.
- [110] Filippov, A. T., 2000. The Versatile Soliton. Birkhauser, Boston (Филиппов, А. Т., 1990. Многоликий солитон. Наука, Москва).
- [111] Сибгатуллин, Н. Р., 1972. О резонансных поперечных колебаниях при резонансе в упругом слое и слое идеально проводящей жидкости. *ПММ*, **36**, 79–87.
- [112] Kawagishi, T., Mizuguchi, T., Sano, M., 1995. Points, walls, and loops in resonantly oscillatory media. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3768 – 3771.
- [113] Parkes, E.J., 2008. Some periodic and solitary travelling-wave solutions of the short-pulse equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, **38**, 154–159.
- [114] Kuetché, V.K., Bouetou, T. B., Kofane, T. C., 2008. On exact N -loop soliton solution to nonlinear coupled dispersionless evolution equation. *Phys. Lett.*, **A**, **372**, 665–669.
- [115] Parkes, E.J., 2010. A note on loop-soliton solutions of the short-pulse equation. *Phys. Lett.*, **A**, **374**. 4321–4323.
- [116] Калиниченко, В. А., 2009. О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска. *Изв. РАН, МЖГ*, **N4**, 141–148.
- [117] Калиниченко, В. А., 2009. Нелинейные эффекты в поверхностных и внутренних волнах Фарадея. Докторская диссертация. Институт проблем механики РАН.
- [118] Glebov, S.G., Kiselev, O.M., Lazarev, V.A., 2003. Soliton generation by local resonance interaction. arXiv:nlin/0302039v1 [nlin.SI].
- [118] Tomás, R., Bai, M., Calaga, R., Fischer, W., 2005. Measurement of global and local resonance terms. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **8**, 024001.
- [120] Wei, Z., Fu, J., Cao, Y., Wu, C., Li, H., 2010. The impact of local resonance on the enhanced transmission and dispersion of surface resonances. *Photonics Nanostruct.*, **8** (2), 94–101.
- [121] Mei, C.C., Stiassnie, M.S., Yue, D.K.–P., 2005. Theory and Applications of Ocean Surface Wave. Part 2. Nonlinear Aspects, World Scientific: NJ.
- [122] Osborne, A.R., 2010. Nonlinear Ocean Waves. Academic Press.

[123] Advanced Numerical Models for Simulating Tsunami Waves and Runup. Eds. P. L.-F. Liu, H. Yeh, C. Synolakis, World Scientific, 2008.

[124] Faltinsen, O.M., Timokha, A.N., 2009. Sloshing. Cambridge University Press.

[125] Tsunamis. Ed. E.N. Bernard, A.R. Robinson, Harvard University Press, 2009.

[126] Galiev, Sh. 2010. Charles Darwin's geophysical reports as models of the theory of catastrophic waves. *researchspace.auckland.ac.nz/browse*

[127] Campbell, D.K., Flach, S., Kivshar, Y.S., 2004. Localizing energy through nonlinearity and discreteness. *Physics Today*, **January**, 43–49.

[128] Любимов, Д. В., Любимова, Т. П., Черепанов, А. А., 2003. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. Физматлит, Москва.

[129] Ахмедиев Н. Н., Анкевич А., 2003. Солитоны: нелинейные импульсы и пучки. Физматлит, Москва. (Akhmediev, N.N.; Ankiewicz, A., 1997. Solitons. Chapman & Hall.).

[130] Кившар Ю. С., Агравал Г. П., 2005. Оптические солитоны. Физматлит, Москва.

[131] Левин, Б. В., Носов, М. А., 2005. Физика цунами и родственных явлений в океане. ЯНУС-К, Москва. (Levin, B., Nosov, M., 2009. Physics of Tsunamis. Springer).

[132] Caldwell, R., Kamionkowski, M., 2001. Echoes from the Big Band. *Scientific Am.*, **January**, 38–43.

[133] Eisenstein, D.J., Bennett, C., 2008. Cosmic sound waves rule. *Physics Today.*, **April**, 44–50.

[134] Shandarin, S.F., Zeldovich, Ya., B., 1989. The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium. *Rev. Modern Physics.*, **61** (2), 185–220.

[135] Coles, P., Chiang, L.-Y., 2000. Characterizing the nonlinear growing of large-scale structure in the Universe. *Nature*, **406**, 376–378.

[136] D'Onghia, T., Besla, G., Cox, T.J., Hernquist, L., 2009. Resonant stripping as the origin of dwarf spheroidal galaxies. *Nature*, **460**, 605–607.

[137] Sunyaev, R.A., Zel'dovich, Ya.B., 1980. Microwave background radiation as a probe of the contemporary structure and history of the universe. *Ann. review astronomy astrophysics*, **18**, 537–560.

[138] Birkinshaw et al., 1984. The Sunyaev-Zel'dovich effect towards three clusters of galaxies. *Nature* **309**, 34–35.

[139] Golda, Z.A., Woszczyna, A., 2001. Acoustics of early universe-Lifshitz versus gauge-invariant theories. *J. Math. Phys.*, **42** (2), 856–862.

- [140] Liu, C., 2005. Ripples in the cosmic pond. *Natural History*, **April**, 62–63.
- [141] Seife, C., 2001. Echoes of the Big Bang put theories in tune. *Science*, **292**, 823.
- [142] Smolin, L., 2010. Space–time torn around. *Nature*, **476**, 1034–1035.
- [143] Stockman, M.I., 2010. Dark-hot resonances. *Nature*, **467**, 541–542.
- [144] O’Connell, A.D., Hofheinz, M., Ansmann, M. et al., 2010. Quantum ground state and single–photon control of a mechanical resonator. *Nature*, **464**, 697–703.

Заключение

Помимо Библии, никакая книга не оказала такого большого влияния на мышление людей Запада, как *Происхождение Видов* Дарвина.

Мауг, Е., 2002. Последнее слово о Дарвине?
Nature, **419**, 781–782.

1. Трудности расчета и прогнозирования катастрофических природных явлений

...что заставляет нас ставить себе требования, которые мы не в силах выполнить?..

Гете

Я ничего не боюсь ...

Джамал Валиди

В последние годы все большее внимание общественности привлекают неожиданные катастрофические природные волновые явления, такие как землетрясения, взрывы вулканов и цунами. Может ли современная наука их предвидеть, проследить заранее их развитие и последствия? Ведь наука располагает мощными компьютерами, хорошо обоснованными уравнениями и численными методами их решения, так что можно было бы ожидать, что сейчас нет нерешаемых задач, в том числе и исследования катастрофических природных явлений. Однако это не всегда так. Иногда, стандартное применение численных методов может дать ошибочные результаты. Это может иметь место, когда задача сводится к анализу высоко-нелинейных уравнений.

Все необычные, непривычные для нас явления в окружающем мире связаны с тем или иным проявлением нелинейных, глубинных свойств Природы. Поясним эту мысль. Огромное количество происходящих вокруг нас процессов и явлений можно приближенно интерпретировать как линейные. Они качественно не меняются на малых отрезках времени и пространства. Они часто повторяются. Мы к ним привыкли. Эти процессы обычно хорошо описываются линейными уравнениями. В частности, линейными алгебраическими уравнениями, которые мы помним со школы. Решение каждого линейного уравнения единственно, оно гладкое и непрерывное, т.е. решение описывает единственный вполне определенный процесс. Образно выражаясь, решение может описать только одну кошку и вполне определенного цвета, т.е. она не может поменять цвет, а при изменении ее размеров суть кошки не меняется.

Например, линейное уравнение не опишет эволюцию кошки в тигра, т.е. гладкой незаметной волны в движущееся на вас безжалостное, ужасающее цунами.

Если мы хотим более точно описать реальность, мы должны использовать нелинейные уравнения. В отличие от линейных уравнений они могут иметь много решений. Например, хорошо известное из школьной программы квадратное уравнение имеет два решения. Возвращаясь к образу кошки, мы можем трактовать эти решения как черную или белую кошку и даже как кошку черно-белого цвета, причем мы не знаем какого цвета кошка соответствует реальной. В частности, используя два решения, можно образовать составное решение, которое можно трактовать как очень быструю эволюцию черной кошки в белую или превращение домашнего котенка в нападающего тигра. Последний нелинейный случай можно рассматривать как описывающий некоторые катастрофические реальности.

В общем случае произвольного нелинейного уравнения можно получить много сильно отличающихся решений, и исследователь оказывается перед сложной проблемой выбора решения, которое соответствует изучаемому процессу. Если процесс далек от катастрофического, то решение должно находиться недалеко от линейного решения, и это позволяет нам остановиться на так называемых слабо-нелинейных решениях. В общем же случае исследователь должен привлекать данные наблюдений или экспериментов, или полагаться на свою интуицию и чувство прекрасного при выборе из многих решений решения, соответствующего исследуемому процессу. Как мы уже отмечали во введении, видимо, исключительно развитое эстетическое чувство позволило Планку, Пуанкаре, Эйнштейну, Бору, де Бройлю, Гейзенбергу и другим построить в начале 20-го века новую физику. Напомню здесь, что, помимо математических наук, Пуанкаре был крупнейшей фигурой в физике. Его, по праву, как и Эйнштейна, называют создателем специальной теории относительности. Эйнштейн, истинный сын и гений 20-го века, более оперативно опубликовал свои результаты по специальной теории, о которых, гений и сын 19-го века, уже заявлял Пуанкаре. Он опубликовал свои результаты буквально неделями позднее Эйнштейна, хотя они были сданы в печать раньше. Нечто подобное повторилось и позднее, когда уравнения гравитационного поля Давид Гильберт вывел почти одновременно с Эйнштейном, который опередил его в публикации на пару недель. Поэтому некоторые авторы называют эти уравнения уравнениями Гильберта-Эйнштейна. Конечно, это ни в коей мере не затеняет общепризнанные гениальные результаты Эйнштейна.

Сказанное определяет основную трудность исследования катастрофических волновых процессов. Другая трудность определяется тем, что наши ис-

следования всегда приближенные. Всегда есть вероятность, что при анализе мы не учли какой-либо эффект, который определяет источник катастрофы. Если привлечь знаменитую аналогию с бабочкой, то всегда при изучении зарождения катастрофы есть угроза, что мы не учли при расчетах решающего влияния взмаха ее крыла.

Мы выделили две причины трудности расчета и прогнозирования катастроф, которые связаны в значительной степени с методологией исследования.

Наконец, напомним, что мы живем в условиях неполной информированности. В частности, если и знаем, то очень приближенно условия, при которых возникает природная катастрофа. Например, почти всегда неизвестны важные параметры месторасположения и движения подземных масс вещества Земли, приводящие к землетрясениям, т.е. мы не знаем начальных параметров для вычислений. Указанные причины не позволяют нам проводить точные предсказания и расчеты природных волновых катастрофических явлений.

Конечно, все это справедливо для достаточно сложных и неоднородных явлений. При решении относительно простых задач некоторые численные методы демонстрируют удивительно хорошее описание как возникновения складчатых волновых фронтов, так и эволюции волн в вихри (см. рис. 248 и 265). Однако, в целом, надежды на подавляющее могущество численных расчетов при прогнозировании погодных, климатических и катастрофических изменений в природе пока себя не оправдали. Поэтому, возможно, при изучении некоторых сильно-нелинейных природных процессов численные методы должны быть дополнены качественными методами, такими, например, как теория катастроф. В этом ключе может быть также полезной теория, развитая в книге. В частности, она может дать важные предварительные данные об изучаемых катастрофических волновых процессах, после чего их можно уточнить, применяя современные численные методы.

На фоне сказанного удивительно, что имеются случаи, когда численные расчеты, пусть приближенно, моделируют реальные катастрофы. Это связано с тем, что иногда при очень сильных движениях некоторые параметры процесса становятся несущественными, а влияние начальных условий на результат становится не очень важным. Например, результат катастрофических землетрясений иногда больше зависит от топографии и геологии поверхности Земли, чем от интенсивности землетрясения в его очаге. В этом случае ошибка в интенсивности в несколько раз практически не влияет на оценку прочности зданий, если мы правильно учли влияние на сейсмический удар поверхностных топографий и механических свойств почв. То же самое справедливо для расчета волн цунами.

2. Основные составляющие и выводы развитой теории катастрофических волн

Бывает нечто, о чем говорят: «Смотрите, вот это новое»; но это было уже в веках.

Экклезиаст 1.10

Как уже отмечалось, у книги две основные цели. С одной стороны — систематизировать сообщения Дарвина о катастрофических событиях, сопоставив их с современными данными. С другой стороны, развить теорию катастрофических волн, которая, пусть приближенно, описывает некоторые наблюдения Дарвина. В основу развитой теории положены «малые делители» и резонансы, полноправным образом введенные в науку в конце 19 века гениальным французским математиком и физиком Анри Пуанкаре, а также статьи: Галиев, Ш. У., Ильгамов М. А., Садыков, А. В., 1970. О периодических ударных волнах в газе. *Изв. АН СССР, МЖГ*, N2, 57–66; Галиев, Ш. У., 1972. Вынужденные установившиеся колебания нелинейно-упругого слоя. *Изв. АН СССР, МТТ*, N1, 58–63; Galiev, Sh.U., Galiev, T.Sh., 1998. Resonant travelling surface waves. *Phys. Lett., A*, **246**, 299–305, в которых рассматриваются волны в конечных резонаторах.

Природные катастрофы и волны. Катастрофические события названы так потому, что они, часто, неожиданны и сопровождаются нестационарными, волновыми процессами. Таких событий становится все больше и больше. Согласно Центру исследований катастроф (Center for Research of Enviromental Decisions, Earth Institute, Columbia University), в последние 40 лет происходит быстрый рост числа этих природных катастрофических явлений. С этим можно согласиться. Возможно, мы вступили в очередной период катастрофического изменения климата и лика Земли. Но не исключено, что человеческая активность — истинная причина грядущих возможных природных катаклизмов. Поясним сказанное. Если система Земля–океан–атмосфера находится изначально в состоянии очень хрупкого равновесия, то наши шахты, газовые и нефтяные выработки, искусственные тепловые поля и потоки, огромные водохранилища, — несмотря на их относительно малый суммарный эффект, могут вывести систему из равновесия. Неустойчивое равновесие Природы может нарушить и небольшое возмущение. Ближайшее будущее покажет, так ли это.

В этом контексте вспоминается фантастический рассказ одного из английских писателей (Герберта Уэллса), который автор читал в детстве. В нем люди бурят сверхглубокую скважину. Когда они прошли земную кору, Земля начала

сотрясаться. Оказалось, что она живое существо, — и даже относительно слабое, вызванное людьми, точечное возмущение вывело ее из оцепенения с катастрофическими последствиями. Не подошли ли мы к описанной ситуации?

Конечно, перед тем как делать далеко идущие выводы надо внимательно рассмотреть и изучить случаи быстрого изменения лика Земли, зафиксированные в ее геологии и в истории человечества. Наблюдения Чарльза Дарвина представляют огромный интерес и в этом контексте. Действительно, он был первым натуралистом, который был очевидцем огромной природной катастрофы, давшим достаточно полное научное рассмотрение этого ужасного феномена. Именно научное — это легко видеть, сопоставляя страницы Дарвина с описаниями Плинием Старшим и Плинием Младшим процесса и результатов извержения вулкана Везувий в 79 году. В целом, свидетельств различных природных катастроф, носящих в первую очередь фактический и эмоциональный характер, опубликовано за историю человечества очень много. Видимо, первым можно считать данное в шумерском эпосе о Гильгамеше. Ниже мы приведем несколько выдержек из этого великого литературного произведения.

Богов великих потоп устроить склонило их сердце.
Ходит ветер шесть дней, семь ночей,
Потопом буря покрывает землю.
При наступлении дня седьмого
Буря с потопом войну прекратили,
Те, что сражались подобно войску.
Успокоилось море, утих ураган — потоп прекратился.

Едва занялось сияние утра,
С основанья небес встала черная туча.
Адду гремит в ее середине,
Шуллат и Ханиш идут перед нею,
Идут, гонцы, горой и равниной.
Эрагаль вырывает жерди плотины,
Идет Нинурта, гать прорывает,
Зажгли маяки Ануннаки,
Их сияньем они тревожат землю.
Из-за Адду цепенеет небо,
Что было светлым, — во тьму обратилось,
Вся земля раскололась, как чаша.
Первый день бушует Южный ветер,
Быстро налетел, затопляя горы,
Словно войною, настигая землю.

Не видит один другого,
И с небес не видать людей.
Боги потопа уstraшились,...

Сказанное в эпосе можно трактовать по-разному, но не исключено, что дано описание совместного действия грандиозного землетрясения (Вся земля раскололась, как чаша), вулканов (Зажгли маяки Ануннаки/ Их сияньем они тревожат землю) и гигантского цунами (Адду гремит в ее середине/Шуллат и Ханиш идут перед нею/Идут, гонцы, горой и равниной/Эрагаль вырывает жерди плотины/Идет Нинурта, гать прорывает), нахлынувшего на Южную Месопотамию. Были разрушены ирригационные сооружения, после чего земля оказалась затопленной на многие годы, а может и столетия до возникновения на ранее затопленных землях Шумерского государства. Описанный потоп и приведенная в эпосе история с сооружением корабля, спасшем избранного Зиусудра, его семью и животных, в слегка измененном виде, воспроизведены в Библии, хотя временная дистанция между этими выдающимися литературными произведениями порядка 1500–2500 лет. Надо сказать, что в те времена эволюция общества протекала настолько медленно, что поколения сохраняли память о прошлом в течение сотен и даже тысяч лет. Только в последние десятилетия информация начала создаваться, накапливаться и наслаиваться так быстро, что в массовом сознании память не закрепляется и стирается в буквальном смысле за годы. Вспомним, что в отличие от этого поэмы Гомера изначально передавались от поколения поколению устно. На них и на более ранних сказаниях воспитывались сотни поколений. В них же сохранялась их долговременная память. В частности, из шумерских таблиц известно, что в Шумере существовала традиция ритуального убийства специально назначаемого царя, царствовавшего только пять дней, во искупление грехов всего общества. Позднее в христианской религии искупителем выступает Иисус. Интересно, что он носит титул — Иисус Назаретянин, Царь Иудейский. Именно царь, аналогия с шумерской традицией несомненна.

Основные картины, нарисованные в эпосе другими литературными средствами, описаны Дарвином. Конечно, грандиозность масштаба этих картин была разная, однако, основные составляющие описаний одинаковы, это землетрясение, извержение вулканов и цунами. Все это, согласно Дарвину, результат потери местной устойчивости земной коры.

Катастрофическое событие — не обязательно следствие катастрофической причины. Даже слабое воздействие на Природу может иметь значительные последствия. Например, землетрясение в Японии, произошедшее в марте 2011 года, сформировало волны цунами, которые докатились до берегов Ан-

тарктиды и откололи от материка огромные айсберги. Как предполагают специалисты NASA, проделав такой долгий путь, волны должны были достичь Антарктиды, будучи высотой всего лишь 30 сантиметров. Однако и этого оказалось достаточно, для того чтобы шельфовый ледник Зульцбергер раскололся на несколько кусков, самый крупный из которых по площади превосходит Манхэттен — 6 на 9 километров. Толщина ледяных глыб составляет около 80 метров. Конечно, цунами от мощнейших природных катастроф могут оказывать неизмеримо более сильное воздействие на Природу, чем в упомянутом случае шельфового ледника. Например, затопить и изменить поверхность огромных заболоченных равнин, как это, возможно, было в Междуречье. Наконец, катастрофы в Природе — часто следствие так называемого эффекта домино.

В название развитой в книге теории входит слово — катастрофический, которое также входит в название *Теории катастроф*, которая успешно развивается последние 50 лет. Она описывает ситуации, когда маленькие воздействия приводят к значительным изменениям. Это результат того, что теория рассматривает обычно системы, находящиеся очень близко к неустойчивым состояниям. Важным достоинством этой теории катастроф является то, что она не требует сложных математических построений и может описывать ситуации не количественно, а качественно. Ее результаты и выводы могут часто иллюстрироваться алгебраическими соотношениями и простыми геометрическими образами.

Из сопоставления сказанного с теорией, изложенной в книге, видна определенная аналогия этих двух теорий. Они нелинейны и развиты для случаев, когда линейные подходы перестают работать, т.е. теории рассматривают сингулярные ситуации. Обе теории приводят часто к простым, даже алгебраическим, соотношениям. Вместе с тем развитая в книге теория имеет вполне определенное самостоятельное лицо. В первую очередь это связано с тем, что в нашем случае рассматриваются резонансные ситуации. Объектом исследований являются нелинейные волны, а исходным пунктом служат дифференциальные уравнения в частных производных. Автор использует идею резонанса для объяснения возникновения необычайных волн при различных природных катастрофах. В первую очередь это относится к волнам, возникающим при землетрясениях на поверхностях океана и оживленных верхних слоях Земли, а также к катастрофическим океанским волнам-убийцам. Математически описаны новые классы волн, профили которых имеют складки, кратеры, извергают капли или струи, или обрамлены вихрями. Полученные результаты имеют значительную общность, так как следуют из волновых уравнений, описывающих высоко-нелинейные волны в различных средах и полях.

Основные составляющие и выводы теории. Из сказанного следует, что теория охватывает широкий круг волновых явлений. В книге рассмотрены короткие и длинные, поверхностные и внутренние волны, распространяющиеся в жидкости, газе или плазме ранней Вселенной. В некоторых случаях волны возбуждаются явно заданной вынуждающей силой, в других случаях имеем самовозбуждение волн, поэтому детали исследования и достигнутая точность решения той или иной задачи отличаются. Однако так как рассматриваются волны вполне определенного катастрофического типа, то имеется вполне явное подобие составляющих используемого каждый раз метода исследования и его результатов. Известно, что существуют два основных метода решения нелинейных задач математической физики: численный метод и метод возмущений. Реализация каждого из них требует глубочайших и обширнейших знаний. Но даже они не гарантируют успех исследования. В частности, они не устраняют полностью основную трудность применения метода возмущений, заключающуюся в появлении малых делителей (или резонансов) в решении (см. разделы 8.1 и 9.1–9.3). Несмотря на огромные усилия выдающихся ученых эта проблема, согласно сведениям автора, полностью не решена. В книге мы предложили новый, унифицированный путь выхода из затруднения. Пришло понимание внутреннего единства разнообразных сложных волновых, слабо изученных нелинейных процессов. Все они имеют резонансное происхождение. Оказалось, что вблизи резонансной полосы исследование может быть связано с непреодолимыми трудностями, связанными с необходимостью учета одновременного взаимодействия нелинейных, вязкостных и дисперсионных эффектов. Однако в окрестности точного резонанса влияние нелинейности становится подавляющим, что резко упрощает исследование, сводя его зачастую к решению алгебраического уравнения. Сингулярные и вековые (растущие во времени и/или в пространстве) члены, которые возникают при использовании традиционного метода возмущений могут не исчезнуть полностью, но начинают нести новую смысловую нагрузку. Они определяют ширину резонансной полосы и зачастую позволяют описывать новые физические эффекты. Такие эффекты, как возникновение цунами, гигантских океанских волн и волн Фарадея, а также вихрей при трансрезонансной эволюции волн.

Таким образом, важнейшее значение для книги имеет понятие резонанса. Если внимательно взглянуть то видно, что это понятие отождествляется со случаем, когда в некоторых точках при некоторых условиях важнейшие линейные члены в нелинейном волновом уравнении обращаются в нуль. Окрестность этих случаев определяет резонансную полосу. Например, в случае вынужденных колебаний в конечных резонаторах это имеет место, когда по длине

резонатора укладывается, почти точно, конечное количество волн. Тогда линейные члены могут исчезнуть на границе резонатора. В других случаях катастрофическое усиление возникает, если некоторое возмущение начинает распространяться с определенной, характерной для рассматриваемой точки среды, скоростью. Таким возмущением для океана может служить ветер или волна, вбегающая в резонансную полосу. Характерная скорость может равняться $\sqrt{gh}$ или определяться соответствующим дисперсионным соотношением, или равняться скорости света. Внутри полосы исходное уравнение эволюционирует в другие уравнения, вплоть до трансформации в нелинейные алгебраические уравнения. В книге проводится идея, что такая возможность существует для всех сред и волн. В качестве иллюстрации теории используется поверхностные волны, волны в стратифицированных средах и волны сжатия, хотя также сделана попытка рассмотрения волн материи на основе уравнения Клейна-Гордона.

Отметим основные положения метода:

1. Проблема исследования всех катастрофических волн является проблемой исследования вынужденных нелинейных резонансных волн.

2. В случае наличия вынуждающей силы на границах задачи или в управляющих уравнениях решается прямая задача о вынужденных резонансных колебаниях. Эта методика реализуется для волн, возбуждаемых при линейных резонансах. Однако в случае нелинейного резонанса методика несколько меняется.

3. В случае нелинейного, например квадратичного резонанса, решение управляющего волнового уравнения ищется в виде суммы двух членов, которая подставляется в уравнение. Затем оно сводится к системе двух уравнений, определяющих каждый член суммы. Причем первый член определяется однородным линейным дифференциальным уравнением, а второй член суммы определяется нелинейным уравнением, содержащим вынуждающий член.

4. При рассмотрении собственных волн, исследование искусственно сводится к расчету вынужденных нелинейных резонансных волн. Это делается следующим образом. Решение управляющего волнового уравнения ищется в виде конечной суммы, которая подставляется в уравнение. Затем это уравнение сводится к системе уравнений, определяющих каждый член суммы. Причем первые члены суммы определяются однородными или неоднородными линейными дифференциальными уравнениями, а последний член суммы определяется нелинейным уравнением, содержащим вынуждающий член. Таким образом, введение конечной суммы принципиально меняет начальную постановку задачи. Она сводится к изучению вынужденных нелинейных резонансных волн.

5. Волновая катастрофа — не только сингулярность в амплитуде или на волновом профиле, но и локализация сингулярности по частоте или пространству.

6. На поверхностях жидких и гранулированных сред могут возникать точки и полосы резонансов. Возможно, они определяют катастрофическое усиление сейсмических и океанских волн.

Легко видеть, что волновые уравнения, используемые в книге, подобны. Вместе с тем они являются представителями широкого класса волновых уравнений, справедливых в различных ситуациях и средах. Это, а также общность развитого метода анализа катастрофических волн, позволило описать широкий круг наблюдений и экспериментов. Обычно задача исследования сводилась к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого или второго порядка, а чаще к решению нелинейных алгебраических уравнений. Полагаем, что именно стремление к простоте, открыло путь анализа круга задач, достаточно далеких от традиционно рассматриваемых в книгах по нелинейным волнам. Подчеркнем основные результаты использования предложенного метода:

1. Возникновение катастрофических волн связано с выполнением того или иного условия резонанса.

2. Катастрофические волны — результат взаимодействия нелинейных и дисперсионных эффектов.

3. Катастрофические волны описываются, в некоторых случаях, составными решениями нелинейных волновых уравнений.

4. Катастрофические волны, определяемые составными решениями волновых уравнений, возникают в природных высоко-нелинейных процессах, когда влияние дисперсии мало или равно нулю. Эти волны могут иметь очень крутые и складчатые фронты.

5. Катастрофические волны, возникающие при сильно-дисперсионных процессах, имеют относительно гладкий фронт и могут описываться одной гармоникой.

6. Амплитуда катастрофических океанских волн может быть от 2-х до 4-х амплитуд нерезонансных волн.

7. Катастрофические волны могут описывать переход от гармонических к турбулентным процессам.

В книге развиваются введенные автором идеи трансрезонансной волны и локального резонанса, а также вводится фундаментальное для океанских катастрофических волн понятие *океанская резонансная полоса*. Возникновение ее зависит от профиля дна, локальной, ступенчатой неоднородности океана по глубине, а также от ветра, океанских течений и ветер-волна взаимодействия.

Последние факторы могут очень сильно влиять на возможность зарождения катастрофических океанских волн. Наиболее просто учесть влияние океанских течений на волны (см. раздел 11.4). Они меняют локально скорость волн и, возможно, способствуют образованию резонансных полос в океане. Время существования катастрофической океанской волны мало, так как протяженность резонансных полос не более нескольких километров. С другой стороны, возникнув, катастрофическая волна меняет окружающую среду (воздушные потоки, приповерхностные и волновые характеристики океана), нарушает условие резонанса и теряет устойчивость. Все это определяет кратковременность существования катастрофических океанских волн и то, что они почти всегда возникают одиночными. Качественный учет теорией многих параметров позволил записать аналитические решения, описывающие большое разнообразие транс-резонансных и катастрофических волн.

Наука не имеет границ. Например, понятие уединенной волны и солитонные решения, полученные первоначально для волн на воде, используются теперь во всех областях науки. То же справедливо для ударных разрывов и ударных волн. Не исключено, что рассмотренные в книге катастрофические волны тоже имеют широкую область применимости. Автор полагает, что наблюдаемое усложнение математического аппарата исследований механических и физических проблем, связано, иногда, с отсутствием новых идей. Новые прикладные и фундаментальные проблемы не всегда требуют развития сложных математических методов, скорее, они нуждаются в генерировании нетрадиционных подходов. Такой подход реализован в книге, и он основан на идее резонанса. На основе такого подхода мы рассмотрели широкий круг волновых задач, настолько широкий, что даже затронули проблему турбулентности. Согласно нашему приближению, возникновение турбулентности связано с резонансами, а именно появлением резонансных (сингулярных, вековых) членов в нелинейных волновых уравнениях и их решениях (см. главы 9 и 22).

Таким образом, сформулированы концепции и результаты теории катастрофических волн. Мы остановились на основах этой теории в самом конце книги, после того как показали широту и многогранность ее применения. Другие важные выводы по отдельным проблемам, рассмотренным в книге, читатель увидел в разделах 3.9, 10.6, 16.4, 17.5, 19.8 и 23.6. Теперь остановимся на самом важном, что определяет всю книгу.

3. Геофизическое наследие Чарльза Дарвина

...На небольшое число натуралистов, обладающих значительной гибкостью ума..., эта книга, может быть, повлияет; но я обращаюсь с доверием к будущему — к молодому подрастающему поколению ...

**Чарльз Дарвин, О происхождении видов
путем естественного отбора, Лондон,
Джон Мюррэй, 1859.**

Катастрофические землетрясения повторяются сейчас все чаще и чаще, поэтому как их описание, так и фактический материал, представленный Дарвином, становятся все важнее и интереснее для читателей и специалистов. Конечно, данные Дарвина, касающиеся природных катастрофических явлений, существенно заслоняются другими геологическими исследованиями Дарвина, тем более его общеизвестными гениальными работами. Возможно, поэтому они практически не обсуждались в научной литературе. Такое невнимание удивляет, так как его наблюдения сопровождалось анализом катастрофических явлений и очень широкими обобщающими выводами. Поэтому автор, учитывая приближающийся 200-летний юбилей Дарвина, решил обратить внимание научной общественности на его исследования, связанные с катастрофическими землетрясениями, динамикой земной поверхности и океана. Отметим, что у решения написать предлагаемую вниманию читателя книгу было еще второе дно. Дело в том, что в течение более 10 лет автор, основываясь на данных Дарвина, строил теорию катастрофических волн, призванную объяснить описанное им поведение волн цунами, а также появление катастрофической океанской волны, встреченной *Биглем* около мыса Горн.

Таким образом, автор написал эту книгу, преследуя две главные цели. Первая — привлечь внимание к результатам Дарвина, которые могли бы быть важными для развития наук о Земле, но не были фактически обсуждены. Преследуя эту цель, мы привели наблюдения Дарвина в некоторую систему, связав их с современными наблюдениями разрыхления почвы во время землетрясения, с усилением сейсмических волн в топографиях и геологических структурах и с исследованиями связи землетрясений и последующих извержений вулканов. Дарвин предложил «простой» механизм — вызванное землетрясением возвышение поверхности Земли, — чтобы объяснить катастрофические сейсмические явления. Эта ключевая идея дополняется в книге предложением рассматривать топографии, геологические структуры, океанический шельф и тому подобные объекты как природные резонаторы. Все это позволило объяснить «дрожание» островов и горных хребтов, извержение вулканов и особен-

ности эволюции цунами во время землетрясений. Рассмотрению этих грандиозных природных явлений посвящена первая часть книги. При ее написании автор, чтобы как можно яснее представить читателю наблюдения Дарвина и современные данные, практически не использовал математические выражения. Вторая цель — математическое моделирование некоторых фактов, сообщенных Дарвином. Преследуя эту цель, мы рассмотрели поверхностные волны, используя переменные Лагранжа, и, затем, развили теорию нелинейных катастрофических волн. Используя ее, мы описали сложную прибрежную эволюцию волн цунами и возникновение — ниоткуда — океанской катастрофической (экстремальной) волны. Катастрофический рост высоты этих волн связывается с явлением резонанса. В случае океанской волны усиление лежит от двух до четырех высот первоначальной (неусиленной) волны.

Так же как наблюдения Дарвином видового разнообразия птиц на территории весьма ограниченного пространства подвели его к созданию теории эволюции видов, так же и наше математическое исследование подвело нас к мысли, что высокая нелинейность, проявляющаяся в областях резонанса, может описать катастрофические процессы в более широком контексте, чем только наблюдения Дарвина. Действительно, волновая нелинейность, по-видимому, одно из важнейших свойств Природы. Это свойство не зависит от масштаба явления и может быть связано как с возникновением и развитием Вселенной, так и с эволюцией элементарных частиц и их рождением из вакуума. Возникновение органической жизни и ее эволюция — пример удивительно плодотворного проявления нелинейности. В частности, имеются особые процессы, которые можно назвать резонансными, при которых нелинейные свойства сред, физических полей и живых сообществ проявляются особенно сильно. Следуя сказанному как руководящей идее, мы распространили в этой книге математическое исследование на резонансные катастрофические волны, имеющие сложный складчатый профиль, которые могут эволюционировать в капли, струи и вихри. Это позволило нам рассмотреть процессы атомизации жидких поверхностей, зарождение вихрей и турбулентности, а также сложные патены. В последних главах книги теоретическое исследование распространяется на волновые уравнения, которые призваны описывать зарождение вихрей в Бозе-Эйнштейна конденсате и ранней Вселенной.

Автор надеется, что подобный комплексный подход к изучению определенной части научного наследия Чарльза Дарвина будет способствовать формированию в обществе нелинейного мышления, позволяющего увидеть за линейной видимостью нелинейную сущность практически любого процесса или явления.

В заключение подчеркнем, что влияние исследований Дарвина вышло далеко за пределы только науки. Введенная и обоснованная им идея эволюции оказалась в центре социальной и духовной жизни человеческого общества. Частный случай понятия эволюции — идея прогресса — легла в основу множества социальных, политических и технологических доктрин. Кажется, что Дарвин предвидел такую возможность. Почти два десятилетия он мучился, не решаясь на публикацию *Происхождение видов*. В частности, она с математической безупречностью показала ненужность бога для объяснения законов природы. Как тонко чувствующий человек, Дарвин чувствовал даже некоторую вину за последнее. Вину разрушителя детских снов человечества. ...*Это все равно как признание в убийстве* ...писал он своему другу Джозефу Хукеру (Joseph Hooker). Но вряд ли Дарвин ожидал, насколько строгой, трагической, опасной и грандиозной покажется его книга другим людям.

Последнее замечание. В самом широком смысле рассчитанные в книге волны можно назвать трансрезонансными. Действительно, в ней практически не рассматриваются волны, которые возникают вдали от резонансов, т.е. в случаях, когда оператор Даламбера во всей области исследований имеет величину, далекую от нуля. Вместе с тем в книге довольно много места уделено резонансным волнам, под которыми подразумеваются волны, возникающие в конечных резонаторах при фиксированной частоте возбуждения, близкой определенной резонансной частоте резонатора. Однако основное внимание уделено волнам, проходящим резонансные полосы. Подобные трансрезонансные волны могут быть и в конечных резонаторах, если вынуждающая частота не фиксирована, а меняется, проходя резонансную частоту. В книге показано, что цунами и экстремальные (катастрофические) океанские волны являются частными случаями трансрезонансных волн. Эти волны во многих случаях имеют сложные складчатые фронты, которые являются предметом изучения теории катастроф. Сказанное, а также стремление к упрощению терминологии, привели к тому, что в книге чаще используется термин катастрофические, чем трансрезонансные волны.

Благодарности

Я благодарю профессоров М.Ильгамова, Р.Ганиева, Р.Нигматулина и В.Фомина (Российская академия наук). Контакты с ними в течение многих десятилетий позволили мне ориентироваться в сложном мире нелинейной науки.

Некоторые результаты работы были получены в сотрудничестве с профессорами Н.Ахмедиевым, Ю.Кившаром и доктором А.Анкевич (A. Ankiewicz) (Австралийский национальный университет) и профессором И.Габитовым (Лос-Аламосская национальная лаборатория) во время моих посещений Канберры и Лос-Аламоса. Выражаю признательность профессору В. Seymour, пригласившему меня и профессора М. Mortell (университет Колледжа, Ирландия) обсудить резонансные волны в университет Британской Колумбии. Эта встреча и обсуждения были очень важны для меня. Я счастлив поблагодарить профессоров D.Bhattacharyya, R. Flay и G. Mallinson (университет Окленда). Вместе с ними я рассмотрел некоторые аспекты развития нелинейных волн.

Автор выражает благодарность профессорам R. Clifton (Brown University, RI), J. Norman (University of Liverpool), R. Evans (British Geological Survey), D. Abbott (The University of Adelaide) и P. Brothers, M. Davies, I. Collins, M. Pender, B. Mace, V. Kescman, S. Fakirov (университет Окленда), а также профессорам Д. Муштари, Ю. Коноплеву (Казанский университет) и доктору И. Сибгатуллину (Московский университет) за помощь на различных стадиях работы над книгой.

Мне хочется отметить вклад давно ушедших от нас академика Валентина Валентиновича Новожилова и профессора Наиля Рахимовича Сибгатуллина. Много лет назад во времена моего общения с этими выдающимися людьми в мою душу были заброшены несколько глубоких мыслей. Они медленно прорастали, и их плоды, в значительной мере, определили идеологию и некоторые результаты настоящей книги.

Я благодарю доктора Ти (Garry Tee) (университет Окленда). Он сделал много полезных комментариев к тексту книги, которые учтены автором. Вдохновляющие поддержка и идеи редактора книги профессора В. Лазарева существенно облегчили автору финальный этап работы над ней.

Автор с признательностью отмечает вклад всех тех выдающихся ученых и авторов научных статей, а также сообщений различных вебсайтов и Интернета, данные которых были использованы в книге.

Решающее влияние на идею написания этой книги оказала книга Дарвина, название которой в русском переводе звучит как «Путешествие натуралиста во-

круг света на корабле «Бигль». Каждый раз, когда я перечитывал эту книгу, возникало желание попытаться объяснить некоторые наблюдения на основе моих знаний в механике, математике и физике. Возможно, мне не надо было поддаваться этому искушению, не мне судить. Юбилей Дарвина послужил решающим толчком. Но я бесконечно благодарен этой книге за те часы, дни и годы, которые я провел в размышлениях и трудах, навеянных ею.

Галиев Шамиль Усманович

**Геофизические сообщения Чарльза Дарвина
как модели теории катастрофических волн**

Редактор *В.А. Лазарев*

Подписано в печать 21.11.2011. Формат 70×90 1/16.
Усл. печ. л. 47,97. Тираж 400 экз. Заказ .

Центр современного образования
E-mail: victor_lazarev@mail.ru